УДК 539.3

М.І. Ігнатишин[1], І.Д. Рубіш[2]
[1]Мукачівський державний університет, вул. Ужгородська, 26, 89600, Мукачеве
e-mail: mikolaj.ignatishin@gmail.com
[2]Ужгородський національний університет, вул. Волошина, 54, 88000, Ужгород
e-mail: kaftte@univ.uzhorod.ua

ДОСЛІДЖЕННЯ АЧХ ГАСНИКА МЕХАНІЧНИХ КОЛИВАНЬ ЗА ФОРМУЛАМИ КАРДАНО

В роботі досліджено АЧХ маятникового та циліндричного гасників механічних коливань з допомогою тригонометричних формул Кардано, отримано аналітичні формули та розраховано значення резонансних частот гасника. Аналітичні співвідношення корисні в плані оптимізації параметрів гасників механічних коливань на стадії їх конструювання для забезпечення більш ефективного гасіння зовнішніх збурюючих впливів.

Ключові слова: гасник механічних коливань, АЧХ (амплітудно-частотна характеристика), тригонометричні формули Кардано, маятникові та циліндричні типи гасників.

Вступ

Механічні гасники коливань мають широке застосування у техніці. Вони призначені для гасіння коливань механізмів, машин, будівельних споруд тощо [1, 2, 3]. Причиною виникнення небажаних коливань можуть бути техногенні та природні фактори, наприклад, землетрус.

Актуальним є дослідження та аналіз відомих конструкцій гасників механічних коливань, отримання співвідношень, що пов'язують динаміку лінійних та нелінійних коливань [1, 2, 3, 4] гасника з його конструктивними і механічними характеристиками, подальше формулювання оптимізаційних задач на базі отриманих математичних формул, вдосконалення відомих та синтез нових механічних гасників для зменшення шкідливих наслідків техногенних та природних катастроф пов'язаних з механічним руйнуванням механізмів, машин та споруд. Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла застосовують в своїх дослідженнях Левина Е.Е., Маневич А.И., (дослідження вимушених коливань циліндричного гасника коливань, рис. 1), Клименко А.А., Милин Ю.В. (нелінійні коливання маятникових гасників коливань).

1. Об'єкт, предмет та методи дослідження

Об'єктом дослідження є механічна система двох тіл, що взаємодіють між собою через силу тиску та тертя і одне з тіл зазнає періодичне збурення заданої частоти та амплітуди через пружну ланку та знаходиться під дією дисипативної сили пропорційної швидкості.

Предметом дослідження є математична модель гасника механічних коливань. В дослідженнях застосовані методи механіки деформівного твердого тіла та математичного аналізу.

2. Постановка задачі та мета роботи

В роботі Левина Е.Е., Маневич А.И. [1] побудовано математичні моделі маятникового та циліндричного гасників коливань, отримано комплексні амплітуди A та B коливань масивного тіла та гасника коливань:

для маятникового гасника

$$\begin{cases} A = \dfrac{\mu\tilde{\Omega}^2 B - iU_0}{1-\tilde{\Omega}^2 + i\tilde{\beta}\tilde{\Omega}} \\ B = \dfrac{i\tilde{\Omega}^2 U_0}{-\left(1-\tilde{\Omega}^2 + i\tilde{\beta}\tilde{\Omega}\right)\left(\tilde{\omega}^2 - \tilde{\Omega}^2\right) + \tilde{\Omega}^4\mu} \end{cases} \tag{1}$$

для циліндричного гасника

$$\begin{cases} A = \dfrac{\mu\tilde{\Omega}^2 B - iU_0}{1-\tilde{\Omega}^2 + i\tilde{\beta}\tilde{\Omega}} \\ B = \dfrac{i\tilde{\Omega}^2 U_0}{-\left(1-\tilde{\Omega}^2 + i\tilde{\beta}\tilde{\Omega}\right)\left(\tilde{\omega}^2 - 3\tilde{\Omega}^2/2\right) + \tilde{\Omega}^4\mu} \end{cases} \tag{2}$$

де

$$\mu = \frac{m}{M+m},\quad \widetilde{\Omega} = \Omega\sqrt{\frac{M+m}{k}}, U_0 = \frac{u_0}{R-r}$$
$$\widetilde{\omega} = \sqrt{\frac{g}{k}\cdot\frac{M+m}{R-r_0}},\ \widetilde{\beta} = \frac{\beta}{\sqrt{k(M+m)}} \tag{3}$$

m - маса гасника, M - маса масивного тіла коливання якого гасить гасник, k - жорсткість пружини, $\frac{H}{м}$; r_0, u_0 - радіус циліндричного гасника, амплітуда зовнішнього збурення $м$; R - радіус циліндричної поверхні, $м$; Ω - кутова частота вимушених коливань, c^{-1}; β – коефіцієнт в'язкого тертя, ${}^{кг}/_{c}$; рис. 1.

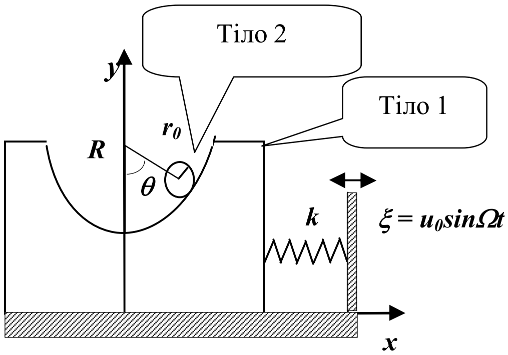

Рис. 1. Тіло 2 має форму циліндра. Тіло 1 – масивне тіло, тіло 2 - гасник механічних коливань масивного тіла

Необхідно дослідити амплітуду коливань A масивного тіла, співвідношення (1) та (2), на екстремум, знайти аналітичні формули для розрахунку резонансних частот коливання масивного тіла з гасником.

Представимо модулі комплексних амплітуд (1) та (2) так:

для маятникового гасника

$$|A| = U_0\sqrt{\frac{\left(\widetilde{\Omega}^2 - \widetilde{\omega}^2\right)^2}{\begin{gathered}\widetilde{\omega}^4 + \left[\left(\widetilde{\beta}^2 - 2\right)\widetilde{\omega}^2 - 2\right]\widetilde{\omega}^2\widetilde{\Omega}^2 + \\ + \left\{1 + \left[2\left(2 - \widetilde{\beta}^2 - \mu\right) + \widetilde{\omega}^2\right]\omega^2\right\}\widetilde{\Omega}^4 + \\ + \left(2\widetilde{\omega}^2\mu + 2\mu - 2\widetilde{\omega}^2 + \widetilde{\beta}^2 - 2\right)\widetilde{\Omega}^6 + \\ + (\mu - 1)^2\widetilde{\Omega}^8\end{gathered}}} \tag{4}$$

для циліндричного гасника

$$|A| = U_0\sqrt{\frac{\left(3\widetilde{\Omega}^2 - 2\widetilde{\omega}^2\right)^2}{\begin{gathered}4\widetilde{\omega}^4 + \left[\left(\widetilde{\beta}^2 - 2\right)\widetilde{\omega}^2 - 3\right]\widetilde{\omega}^2\widetilde{\Omega}^2 + \\ + \left\{9 + 4\left[\widetilde{\omega}^2 - 3\widetilde{\beta}^2 + 2(3-\mu)\right]\widetilde{\omega}^2\right\}\widetilde{\Omega}^4 + \\ + \left\{4(2\mu - 3)\widetilde{\omega}^2 + 3\left[2\left(2\mu - 3\right) + 3\widetilde{\beta}^2\right]\right\}\widetilde{\Omega}^6 + \\ + (2\mu - 3)^2\widetilde{\Omega}^8\end{gathered}}} \tag{5}$$

Щоб отримати аналітичні вирази для резонансних частот коливання масивного тіла для маятникового та циліндричного гасника механічних коливань необхідно дослідити на екстремум підкореневі вирази співвідношень (4) та (5). Таке дослідження приводить до рівняння 12-го степеня, котре нескладними перетвореннями може бути зведене до рівняння 5-го степеня. Останнє, згідно теореми Абеля-Руффіні, немає закритої форми розв'язків, тобто форми, що містить тільки арифметичні операції та радикали довільного степеня. Тому, дослідимо на екстремум знаменник підкореневого виразу співвідношень (4) та (5). Нами встановлено, що мінімум знаменника з великою точність співпадає з максимумом підкореневого раціонального дробу.

3. Основна частина

Знайдемо похідні цих знаменників по $\widetilde{\Omega}$ і прирівняємо їх до нуля. Відкинувши розв'язок $\Omega = 0$ отримаємо рівняння шостого степеня:

для маятникового гасника

$$\begin{gathered}8(\mu-1)^2\widetilde{\Omega}^6 + 6\left(2\widetilde{\omega}^2\mu + 2\mu - 2\widetilde{\omega}^2 + \widetilde{\beta}^2 - 2\right)\widetilde{\Omega}^4 + \\ + 4\left\{1 + \left[2\left(2 - \widetilde{\beta}^2 - \mu\right) + \widetilde{\omega}^2\right]\omega^2\right\}\widetilde{\Omega}^2 + \\ + 2\left[\left(\widetilde{\beta}^2 - 2\right)\widetilde{\omega}^2 - 2\right]\widetilde{\omega}^2 = 0\end{gathered} \tag{6}$$

для циліндричного гасника

$$8(2\mu-3)^2\tilde{\Omega}^6+6\left\{\begin{matrix}4(2\mu-3)\tilde{\omega}^2+\\+3\begin{bmatrix}2(2\mu-3)+\\+3\tilde{\beta}^2\end{bmatrix}\end{matrix}\right\}\tilde{\Omega}^4+$$
$$+4\left\{9+4\begin{bmatrix}\tilde{\omega}^2-3\tilde{\beta}^2+\\+2(3-\mu)\end{bmatrix}\tilde{\omega}^2\right\}\tilde{\Omega}^2+ \tag{7}$$
$$+8\left[\left(\tilde{\beta}^2-2\right)\tilde{\omega}^2-3\right]\tilde{\omega}^2=0$$

Якщо позначимо $\tilde{\Omega}^2=x$, то одержимо два рівняння третього степеня:

для маятникового гасника

$$8(\mu-1)^2x^3+6\begin{pmatrix}2\tilde{\omega}^2\mu+2\mu-\\-2\tilde{\omega}^2+\tilde{\beta}^2-2\end{pmatrix}x^2+$$
$$+4\left\{1+\left[2\begin{pmatrix}2-\tilde{\beta}^2-\\-\mu\end{pmatrix}+\tilde{\omega}^2\right]\omega^2\right\}x+ \tag{8}$$
$$+2\left[\left(\tilde{\beta}^2-2\right)\tilde{\omega}^2-2\right]\tilde{\omega}^2\quad=0$$

для циліндричного гасника

$$8(2\mu-3)^2x^3+6\left\{\begin{matrix}4(2\mu-3)\tilde{\omega}^2+\\+3\begin{bmatrix}2(2\mu-3)+\\+3\tilde{\beta}^2\end{bmatrix}\end{matrix}\right\}x^2+$$
$$+4\left\{9+4\begin{bmatrix}\tilde{\omega}^2-3\tilde{\beta}^2+\\+2(3-\mu)\end{bmatrix}\tilde{\omega}^2\right\}x+ \tag{9}$$
$$+8\left[\left(\tilde{\beta}^2-2\right)\tilde{\omega}^2-3\right]\tilde{\omega}^2=0$$

Розв’яжемо отримані кубічні рівняння за тригонометричними формулами Кардано [5].

Константи кубічного рівняння

$$ax^3+bx^2+cx+d=0 \tag{10}$$

позначимо:

маятниковий гасник

$$a=8(\mu-1)^2,\ \ \mathrm{b}=6\begin{pmatrix}2\tilde{\omega}^2\mu+2\mu-\\-2\tilde{\omega}^2+\tilde{\beta}^2-2\end{pmatrix},$$
$$\mathrm{c}=4\left\{1+\begin{bmatrix}2\begin{pmatrix}2-\tilde{\beta}^2-\\-\mu\end{pmatrix}+\\+\tilde{\omega}^2\end{bmatrix}\omega^2\right\}, \tag{11}$$
$$\mathrm{d}=2\left[\left(\tilde{\beta}^2-2\right)\tilde{\omega}^2-2\right]\tilde{\omega}^2\,.$$

циліндричний гасник

$$\mathrm{a}=8(2\mu-3)^2,\ \mathrm{b}=6\left\{\begin{matrix}4(2\mu-3)\tilde{\omega}^2+\\+3\begin{bmatrix}2(2\mu-3)+\\+3\tilde{\beta}^2\end{bmatrix}\end{matrix}\right\},$$
$$c=4\left\{9+4\begin{bmatrix}\tilde{\omega}^2-3\tilde{\beta}^2+\\+2(3-\mu)\end{bmatrix}\tilde{\omega}^2\right\}, \tag{12}$$
$$\mathrm{d}=8\left[\left(\tilde{\beta}^2-2\right)\tilde{\omega}^2-3\right]\tilde{\omega}^2$$

Далі

$$p=-\frac{b^2}{3a^2}+\frac{c}{a},\ \mathrm{q}=\frac{2\mathrm{b}^3}{27\mathrm{a}^3}-\frac{bc}{3a^2}+\frac{d}{a},$$
$$\mathrm{Q}=\left(\frac{\mathrm{p}}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2, \tag{13}$$
$$\alpha=\sqrt[3]{-\frac{\mathrm{q}}{2}+\sqrt{Q}},\ \beta=\sqrt[3]{-\frac{\mathrm{q}}{2}-\sqrt{Q}}$$

Корені кубічного рівняння (10):

$$\mathrm{y}_1=\alpha+\beta,\quad \mathrm{y}_2=-\frac{\alpha+\beta}{2}+i\frac{\alpha-\beta}{2}\sqrt{3},$$
$$\mathrm{y}_3=-\frac{\alpha+\beta}{2}-i\frac{\alpha-\beta}{2}\sqrt{3},$$
$$x_1=y_1-\frac{b}{3a},\quad x_2=y_2-\frac{b}{3a}, \tag{14}$$
$$x_3=y\ \ -\frac{b}{3a}.$$

Отже, стаціонарним точкам знаменника підкореневих виразів (4) та (5) будуть відповідати частоти:

$$\tilde{\Omega}_1=\sqrt{x_1},\qquad \tilde{\Omega}_2=\sqrt{x_2},\qquad \tilde{\Omega}_3=\sqrt{x_3} \tag{15}$$

Для значень $\tilde{\omega}=1.2$, $\mu=0.1$, $\tilde{\beta}=0.05$ та $U_0=0.05$ розраховано по дві частоти, що відповідають резонансним стаціонарним точкам:

для маятникового гасника

$$\tilde{\Omega}_1=0.932,\ \tilde{\Omega}_2=1.357, \tag{16}$$

для циліндричного гасника

$$\tilde{\Omega}_1 = 0.883,\ \tilde{\Omega}_2 = 1.147, \qquad (17)$$

На рис. 2 побудовано амплітудно-частотні характеристики з допомогою програмного пакета MathCad, що відповідають співвідношенням (4) та (5) і співпадають з отриманими [1].

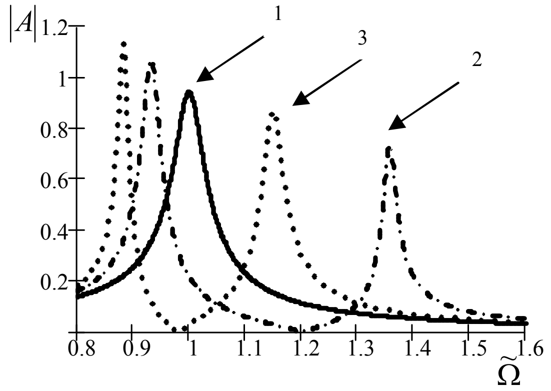

Рис. 2. Амплітудно-частотні характеристики:
1 - масивне тіло без гасника, 2 - маятниковий гасник,
3 - циліндричний гасник

Висновки

Як бачимо з рис. 2 (як видно з формул (3) частота $\tilde{\Omega}$ та амплітуда $|A|$ безрозмірні), маятниковий гасник зміщує одну резонансну частоту вліво, а другу вправо від резонансної частоти тіла без гасника, аналогічно робить і циліндричний гасник. Він лівий пік зміщає далі вліво, а правий дещо ближче - вправо. Отримані в даній праці аналітичні формули (11)-(14) являють собою алгоритм для розрахунку резонансних частот тіла з гасником і можуть застосовуватись у подальшому для визначення параметрів $\tilde{\omega}$, μ, $\tilde{\beta}$ гасника механічних коливань за заданими значеннями $\tilde{\Omega}_1$ та $\tilde{\Omega}_2$, котрі в свою чергу залежать від резонансної частоти масивного тіла без гасника. За розрахованими параметрами $\tilde{\omega}$, μ, $\tilde{\beta}$ далі можлива оптимізація конструктивних та механічних характеристик гасника: m - маси гасника, r_0 - радіуса циліндричного гасника, R - радіуса циліндричної поверхні, рис. 1. Для більш ефективного гасіння коливань доцільно змінити форму гасника [6], залишивши незмінною масу m, зробити гасник у вигляді гантелі з моментом інерції, що забезпечить необхідні параметри $\tilde{\omega}$, μ, $\tilde{\beta}$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Левина Е.Е., Маневич А.И., Вынужденные нелинейные колебания тела с цилиндрическим гасителем колебаний. – Методи розв’язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла, С. 167-176, вип. 11, 2010 http://www.nbuv.gov.ua/_scripts/wwwi32.exe/%5Bin=_scripts/ref.in%5D
2. Вибрации в технике. Т.6. Защита от вибраций и ударов: справочник / под ред. К.В. Фроловна. – М.: Машиностроение, 1981. – 456 с.
3. Корнеев Б.Г. Динамические гасители колебаний / Б.Г. Корнеев, Л.М. Резников. – М.: Наука, 1988. – 304 с.
4. Клименко А.А., Милин Ю.В. Нелинейные формы колебаний механической системы с маятниковым гасителем колебаний. – Механика твердого тела, с. 162-171, вып. 40. – 2010.
5. http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D1%80%D0%B8%D0%B3%D0%BE%D0%BD%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D0%BE%D1%80%D0%BC%D1%83%D0%BB%D0%B0_%D0%92%D0%B8%D0%B5%D1%82%D0%B0
6. Ігнатишин М.І. Математичне моделювання механічного гасника коливань в системі MathCad. - Науковий вісник Мукачівського державного університету. Серія технічні науки. – №12(7). – С. 12-18. – 2012.

Стаття надійшла до редакції 30.01.2013

M.I. Ignatishin[1], I.D. Rubish[2]
[1]Mukachevo State University, 89600, Mukachevo, Uzhhorod Str., 26
[2]Uzhhorod National University, 88000, Uzhhorod, Voloshin Str., 54

RESEARCH RESPONSE QUENCHER MECHANICAL VIBRATIONS BY THE FORMULA Of CARDANO

In present paper the frequency response and a cylindrical pendulum absorbers mechanical oscillations using trigonometric formulas of Cardano, analytical formulas and calculated values of the resonance frequencies of the absorber. Analytical relations are useful to optimize the parameters of mechanical vibration dampers on the stage of construction to ensure a more effective suppression of external disturbances.

Keywords: mechanical vibration absorber, frequency response, trigonometric formulas Cardano, pendulum absorbers and coil types.

Н.И. Игнатишин[1], И.Д. Рубиш[2]
[1]Мукачевский государственный университет, 89600, Мукачево, ул. Ужгородская, 26
[2]Ужгородский национальный университет, 88000, Ужгород, ул. Волошина, 54

ИССЛЕДОВАНИЯ АЧХ ГАСИТЕЛЯ МЕХАНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ЗА ФОРМУЛАМИ КАРДАНО

В работе исследованы АЧХ маятникового и цилиндрического гасителей механических колебаний с помощью тригонометрических формул Кардано, получены аналитические формулы и рассчитаны значения резонансных частот гасителя. Аналитические соотношения полезны в плане оптимизации параметров гасителей механических колебаний на стадии их конструирования, для обеспечения более эффективного тушения внешних возмущающих воздействий.

Ключевые слова: гаситель механических колебаний, АЧХ (амплитудно-частотная характеристика), тригонометрические формулы Кардано, маятниковые и цилиндрические типы гасителей.