ТРИЧЛЕННІ РЕКУРЕНТНІ СПІВВІДНОШЕННЯ ДЛЯ КОЕФІЦІЄНТІВ РАКА КВАНТОВОЇ АЛГЕБРИ $U_q(su_2)$

І.І. Качурик

Технологічний університет Поділля, 280016, Хмельницький-16, вул. Інститутська, 11

На основі теорії базисних функцій одержані різні вирази і тричленні рекурентні співвідношення для коефіцієнтів Рака квантової алгебри $U_q(su_2)$. Показано, що в асимптотичній границі рекурентні формули для q-коефіцієнтів Рака дають рекурентні формули для q-коефіцієнтів Клебша-Гордана.

1. В даний час у фізиці все більше зацікавлення викликають квантові симетрії, які формулюються на мові квантових груп. Їх застосування вимагає розробки в рамках теорії представлень добре розробленого обчислювального формалізму, особливо теорії коефіцієнтів Клебша-Гордана (ККГ) і коефіцієнтів Рака (КР).

Мета даної роботи – знайти, спираючись на теорію базисних гіпергеометричних функцій, тричленні рекурентні формули для КР (і ККГ) такої простої (але важливої для фізики) квантової алгебри, як $U_q(su_2)$. (Початкові відомості про цю алгебру і її незвідні представлення можна знайти у монографії [1]).

2. Алгебра $U_q(su_2)$ породжується трьома елементами E^+, E^- і H, які задовільняють комутаційні співвідношення такого вигляду:

$$[H, E^\pm] = \pm E^\pm,$$

$$[E^+, E^-] = \left(q^H - q^{-H}\right)/\left(q^{1/2} - q^{-1/2}\right),$$

де q – параметр деформації. При $q \to 1$ генератори $E^\pm$ і H переходять відповідно в генератори $J^\pm$ і J_z алгебри Лі su_2. Скінченно-вимірні незвідні представлення алгебри $U_q(su_2)$ задаються цілим або напівцілим невід'ємним числом l. В просторі H_l представлення T_l, що відповідає числу l, можна ввести ортонормований базис e_m, $m = -l, -l+1, \dots, l$, на елементи якого оператори $E^\pm$, H діють за формулами

$$E^\pm e_m = \left([l \mp m][l \pm m + 1]\right)^{1/2} e_{m\pm 1},$$

$$He_m = me_m.$$

Тут $[x]$ позначає q-число

$$[x] = \left(q^{x/2} - q^{-x/2}\right)/\left(q^{1/2} - q^{-1/2}\right) = q^{-(n-1)/2}\left(1 - q^n\right)/\left(1 - q\right).$$

Відмітимо, що для алгебри $U_q(su_2)$, на відміну від звичайної алгебри su_2, маємо $T_i \otimes T_j \neq T_j \otimes T_i$.

КР квантової алгебри $U_q(su_2)$ з'являються при розгляді тензорного добутку $T_1 \otimes T_2 \otimes T_3$. Простір $H_1 \otimes H_2 \otimes H_3$ представлення $T_1 \otimes T_2 \otimes T_3$ може розглядатись як $(H_1 \otimes H_2) \otimes H_3$ або як $H_1 \otimes (H_2 \otimes H_3)$. Базисні елементи $e_p^{[(l_1 l_2)l_{12}, l_3, l]_q}$, $e_p^{[l_1(l_2 l_3)l_{23}, l]_q}$ цих просторів зв'язані унітарною матрицею R_q [1]:

$$e_p^{[(l_1 l_2)l_{12}, l_3, l]_q} = \sum_{l_{23}} R_q\left(l_1 l_2 l_3, l_{12} l_{23}, l\right) e_p^{[l_1(l_2 l_3)l_{23}, l]_q}.$$

Числа цієї матриці називають КР квантової алгебри $U_q(su_2)$ або q-КР. В подальшому будемо позначати їх через $R_q(abd, cf, e)$. Вони зв'язані з q-$(6j)$-символами $\begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{Bmatrix}_q$ рівністю

$$\begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{Bmatrix}_q = (-1)^{a+b+d+e}\left([2c+1][2f+1]\right)^{-1/2} \times$$

$\times R_q(abd, cf, e)$.

Явний вигляд q-$(6j)$- коефіцієнтів через одну суму був отриманий (доволі складним шляхом) у [2] (досить простий спосіб відповідних обчислень описаний у роботі [3]):

$$\begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{Bmatrix}_q := \Delta(abc)\,\Delta(cde)\,\Delta(aef)\,\Delta(bdf)\times$$
$$\times\sum_r \frac{(-1)^r [r+1]!\left([a+c+d+f-r]![b+c+e+f-r]!\right)^{-1}}{[r-a-b-c]![r-c-d-e]![r-a-e-f]![r-b-d-f]![a+b+d+e-r]!}\,, \quad (1)$$

де
$$\Delta(abc) \equiv \left(\frac{[a+b-c]![a-b+c]![-a+b+c]!}{[a+b+c+1]!}\right)^{1/2},\ [n]! \equiv [n][n-1]\cdots[1].$$

Порівнюючи цю формулу з відповідною формулою для $(6j)$-коефіцієнтів алгебри $su(2)$ (див. (9.2(1)) у [4]), приходимо до висновку, що з останніх вирази для q-$(6j)$-коефіцієнтів можна отримати заміною звичайних факторіалів $n!$ на q-факторіали $[n]!$. Приведений тут вираз для них можна записати у такому вигляді:

$$\begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{Bmatrix}_q = \frac{(-1)^{a+b+d+e}\,\Delta(abc)\,\Delta(aef)\,\Delta(cde)\,\Delta(dbf)\,[a+b+d+e+1]!}{[a+b-c]![a+e-f]![b+d-f]![d+e-c]![c+f-a-d]![c+f-b-e]!}\times$$
$$\times{}_4\Phi_3\left(\begin{matrix} q^{c-a-b}, q^{f-a-e}, q^{f-b-d}, q^{c-d-e} \\ q^{-a-b-d-e-1}, q^{c+f-b-e+1}, q^{c+f-a-d+1} \end{matrix}; q, q\right), \quad (1)$$

Тут ${}_4\Phi_3(z)$ - базисна гіпергеометрична функція аргументу $z=q$. В загальному випадку

$${}_{s+1}\Phi_s\left(\begin{matrix} a_1, a_2, \ldots, a_s \\ b_1, b_2, \ldots, b_s \end{matrix}; q, z\right) \equiv$$
$$\equiv {}_{s+1}\Phi_s(a_1, a_2, \ldots, a_s; b_1, b_2, \ldots, b_s | q, z) = ,$$

де $(a;q)_n = \prod_{j=0}^{n-1}(1-aq^j)$, $(a;q)_0 = 1$.

Детальні відомості про такі функції можна знайти у книзі [5]. Використовуючи співвідношення

$${}_4\Phi_3\left(\begin{matrix} -n, \alpha, \beta, \gamma \\ \delta, \rho, \sigma \end{matrix}; q, q\right) = q^{n(\beta+\gamma-\delta)}\frac{(q^{\alpha-\rho-n+1};q)_n (q^{\alpha-\sigma-n+1};q)_n}{(q^\rho;q)_n (q^\sigma;q)_n}\times$$
$$\times{}_4\Phi_3\left(\begin{matrix} -n, \alpha, \delta-\beta \\ \delta, \alpha-\rho-n+1, \alpha-\sigma-n+1 \end{matrix}; q, q\right), \quad (2)$$

яке справедливе при умові збалансованості $\alpha+\beta+\gamma-n+1=\delta+\rho+\sigma$ суми ${}_4\Phi_3$, одержимо інші вирази для q-$(6j)$-символів, а саме ті, які є q-аналогами відомих у фізиці виразів для звичайних $(6j)$-символів (див. [4]). Для всіх випадків умова збалансованості виконується.

Нехай $n=b+d-f$, $\alpha=f-a-c$, $\beta=c-a-b$, $\gamma=c-d-e$, $\delta=c+f-a-d+1$, $\rho=-a-b-c-d-1$, $\sigma=c+f-b-c+1$. Тоді із (1) з допомогою (2) з урахуванням формул

$$\left(q^{N+1};q\right)_r=q^{r(r+2N-1)/4}(1-q)^r\frac{[N+r]!}{[N]!},\tag{3}$$

$$\left(q^{-N};q\right)_r=(-1)^r(1-q)^r\frac{q^{r(r-2N-3)/4}[N]!}{[N-r]!},\tag{4}$$

виводимо (q-аналог формули (9.2(11)) із книги [4]):

$$\begin{Bmatrix}a & b & c\\ d & e & f\end{Bmatrix}_q=$$
$$=\frac{(-1)^{a+b+d+e}\Delta(abc)\Delta(aef)\Delta(bdf)\Delta(cde)[a+e+f+1]![a+d+c-f]![b+d+f+1]!}{[2f+1]![a+b-c]![a+e-f]![b+d-f]![d+e-c]![d+c-e]![a+c-b]![c+f-a-d]!}\times$$
$$\times{}_4\Phi_3\left(\begin{matrix}q^{f-a-e},q^{f-b-d},q^{e-a+f+1},q^{b+f-d+1}\\ q^{f-a-d-c},q^{f+c-a-d},q^{2f+2}\end{matrix};q,q\right).\tag{5}$$

Покладемо у (1) $n=b+d-f$, $\alpha=c-a-b$, $\beta=c-d-e$, $\gamma=f-a-e$, $\delta=-a-b-d-e-1$, $\rho=c+f-b-e+1$, $\sigma=c+f-a-d+1$ і застосуємо перетворення (2), використавши (3) і (4). Те ж проробимо при $n=a+b+c+1$, $\alpha=-b-d-f-1$, $\beta=c-a-b$, $\gamma=f-b-d$, $\delta=-2b$, $\rho=e-a-b-d$, $\sigma=-a-b-d-e-1$. В результаті отримаємо q-аналог формули (9.2(12)) із книги [4]:

$$\begin{Bmatrix}a & b & c\\ d & e & f\end{Bmatrix}_q=$$
$$=\frac{(-1)^{b+c+e+f}\Delta(abc)\Delta(aef)\Delta(cde)\Delta(bdf)[2b]![b+f+c+e+1]![b+f+c-e]!}{[a+b-e]![b+c-e]![c+e-d]![d+c-e]![a+f-e]![b+d-f]![b+f-d]![f+e-a]!}\times$$
$$\times{}_4\Phi_3\left(\begin{matrix}q^{a-b-c},q^{-a-b-c-1},q^{-b-d-f-1},q^{d-b-f}\\ q^{-2b},q^{-b-c-e-f-1},q^{e-b-f-c}\end{matrix};q,q\right).\tag{6}$$

Покладемо у виразі (6) спочатку $n=a+b+c+1$, $\alpha=-b-d-f-1$, $\beta=c-a-b$, $\gamma=f-b-d$, $\delta=-a-b-d-e-1$, $\rho=e-a-b-d$, $\sigma=-2b$, потім – $n=a+c-b$, $\alpha=b-d-f$, $\beta=-c-d-e-1$, $\gamma=-a-e-f-1$, $\delta=-a-d-f-c-1$, $\rho=b-c-e-f$, $\sigma=b-a-d-e$ і обидва рази застосуємо (2). Приходимо до формули (q-аналог формули (9.2(10) із [4])

$$\begin{Bmatrix}a & b & c\\ d & e & f\end{Bmatrix}_q=$$

$$= \frac{(-1)^{a+d+c+f}\,\Delta(abc)\,\Delta(bdf)\,[a+d+f+c+1]!\,[a+e+d-b1]!\,[c+f+e-b]!}{\Delta(aef)\,\Delta(cde)\,[a+e+f+1]!\,[a+c-b]!\,[d+c+e+1]!\,[d+f-b]!}\times$$
$$\times{}_4\Phi_3\left(\begin{matrix} q^{-a-e-f-1}, q^{b-a-c}, q^{b-d-f}, q^{-c-d-e-1} \\ q^{-a-d-f-c-1}, q^{b-a-d-e}, q^{b-c-e-f} \end{matrix};q,q\right). \qquad (7)$$

З цієї формули з допомогою (2)-(4) також в два кроки (1) $n=a+c-b$, $\alpha=$ $=b-d-f$, $\beta=-c-d-e-1$, $\gamma=-a-e-f-1$, $\delta=-a-d-f-c-1$, $\rho=b-c-e-f$, $\sigma=b-$ $-a-d-c$; 2) $n=d+f-b$, $\alpha=b-a+c+1$, $\beta=b-a-e$, $\gamma=b-d+f+1$, $\delta=2b+2$, $\rho=b-a-d+c+1$, $\sigma=b-a-d-e$) приходимо до такого виразу для q-$(6j)$-коефіцієнтів (q-аналог формули (9.2(9) із книги [4]):

$$\begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{Bmatrix}_q =$$
$$= \frac{(-1)^{a+d+f+c}\Delta(aef)\Delta(bdf)[a+d+f-c]!\,[b+e-a]!\,[c+e-d]!}{\Delta(abc)\Delta(cdb)[b+e-a-d]!\,[b+c+e-f+1]!\,[d+f-b]!\,[a+f-e]!}\times$$
$$\times{}_4\Phi_3\left(\begin{matrix} q^{b-a+c+1}, q^{b-d-f}, q^{e-a-f}, q^{c+e-d+1} \\ q^{b-a-d+e+1}, q^{b+c+e-f+2}, q^{c-a-d-f} \end{matrix};q,q\right), \qquad (8)$$

Порівнюючи одержані формули із відповідними їм "класичними" аналогами, приходимо до висновку, що вони відрізняються від останніх заміною m на $[m]!$ і ${}_4F_3(n,a,b,c;d,e,f;1)$ на ${}_4\Phi_3(n,a,b,c;d,e,f;q,q)$. При $q=1$ вони співпадають. Кожен з отриманих виразів для q-$(6j)$-символів можна представити через суму типу (1'). Наявність різних виразів для q-КР зручне для дослідження їх властивостей симетрії, асимптотичних властивостей, одержання частинних значень, які не містять сум.

3. Для отримання рекурентних співвідношень для q-КР або q-$(6j)$-символів треба знайти відповідне співвідношення для базисної гіпергеометричної функції ${}_4\Phi_3$, через яку вони виражаються. Щоб цього досягти скористаємось результатами роботи [6]. На основі формул (2.9) і (2.10) цієї роботи після деяких перетворень знаходимо такий зв'язок між трьома базисними функціями ${}_4\Phi_3$, параметри яких відрізняються на 1:

$${}_4\Phi_3\left(q^\alpha,q^\beta,q^\gamma,q^\delta;q^i,q^j,q^k\,\middle|\,q,q\right)=\frac{[\beta][\alpha-i]}{[i][\alpha-\beta]}\,{}_4\Phi_3\left(q^\alpha,q^{\beta+1},q^\gamma,q^\delta;q^{i+1},q^j,q^k\,\middle|\,q,q\right)-$$
$$-\frac{[\beta-i][\alpha]}{[i][\alpha-\beta]}\,{}_4\Phi_3\left(q^{\alpha+1},q^\beta,q^\gamma,q^\delta;q^{i+1},q^j,q^k\,\middle|\,q,q\right). \qquad (9)$$

Тут було враховано, що $q^{\alpha+\beta+\gamma+\delta+1} = q^{i+j+k}$. Будемо підставляти у (9) вирази ${}_4\Phi_3$ через $\begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{Bmatrix}_q$ із приведених вище формул.

Почнемо з формули (1). Кладемо тут $c-a-b=\alpha$, $f-a-e=\beta$, $f-b-d=\gamma$, $c-d-e=\delta$, $-a-b-d-e-1=i$, $c+f-b-\ -e+1=j$, $c+f-a-d+1=k$. Визначаємо відповідні $_4\Phi_3$ і підставляємо у (9). Після деяких обчислень одержуємо співвідношення між трьома q-$(6j)$-коефіцієнтами, параметри яких відрізняються на 1/2:

$$[c-b+e-f]\left([a+b+c+1][a+e+f+1]\right)^{1/2}\begin{Bmatrix} a & b & c\\ d & e & f\end{Bmatrix}_q =$$
$$=\left([a+b-c][a+f-e][b+f-d][b+d+f+1]\right)^{1/2}\begin{Bmatrix} a-1/2 & b-1/2 & c\\ d & e & f-1/2\end{Bmatrix}_q -$$
$$-\left([a-b+c][a+e-f][c+e-d][d+c+e+1]\right)^{1/2}\begin{Bmatrix} a-1/2 & b & c-1/2\\ d & e-1/2 & f\end{Bmatrix}_q, \quad (10)$$

де ми ввели нові позначення:
$(\delta-\alpha-\beta+(+\gamma-i+j-k-1)/4=a$,
$(\delta+\beta-\alpha-\gamma-i-j+k-1)/4=b$,
$(\alpha+\delta-i-1)/2=c$,
$(\alpha-\delta+j-k+\beta-\gamma-1)/4=d$,
$(\alpha-\beta-\delta+\gamma-i-j+k-1)/4=e$, $(\beta+\gamma-i-1)/2=f$.

Якщо у (9) підставити $_4\Phi_3$, виражену із (5), поклавши $f-a-e=\alpha$, $f-b-d=\beta$, $e-a+f+1=\gamma$, $b+f-d+1=\delta$, $2f+2=i$, $f+c-a-d=j$, $f-c-a-d=k$, то з точністю до позначень одержимо таку рекурентну формулу:

$$[a+e-b-d]\left([a-e+f+1][d-b+f+1]\right)^{1/2}\begin{Bmatrix} a & b & c\\ d & e & f\end{Bmatrix}_q =$$
$$=\left([a+e-f][b+d+f+2][c+d-e+1][c-d+e]\right)^{1/2}\begin{Bmatrix} a & b & c\\ d+1/2 & e-1/2 & f+1/2\end{Bmatrix}_q -$$
$$-\left([a-b+c+1][b-a+c][a+e+f+1][b+d-f]\right)^{1/2}\begin{Bmatrix} a+1/2 & b-1/2 & c\\ d & e & f+1/2\end{Bmatrix}_q. \quad (11)$$

Звернемось тепер до формули (6). Кладемо $a-b-c=\alpha$, $-a-b-c-1=\beta$, $-b-d-f-1=\gamma$, $d-b-f=\delta$, $-2b=i$, $-b-c-e-f-1=j$, $e-b-f-c=k$. На основі (9) отримуємо (ми знову перейменували параметри):

$$[2a+1]\left([b+d-f][-b+d+f+1]\right)^{1/2}\begin{Bmatrix} a & b & c\\ d & e & f\end{Bmatrix}_q =$$
$$=\left([a+b-c][a+b+c+1][a+e-f][f+e-a+1]\right)^{1/2}\begin{Bmatrix} a-1/2 & b-1/2 & c\\ d & e & f+1/2\end{Bmatrix}_q +$$
$$+\left([b+c-a][a-b+c+1][a+f-e+1][a+f+e+2]\right)^{1/2}\begin{Bmatrix} a+1/2 & b-1/2 & c\\ d & e & f+1/2\end{Bmatrix}_q. \quad (12)$$

Аналогічно, поклавши
$-a-e-f-1=\alpha, b-a-c=\beta$,
$b-d-f=\gamma, -c-d-e-1=\delta$,
$-a-d-f-c-1=i$,
$b-a-d-e=j$,
$b-c- \ -e-f=k$ у (7) і
$b-a+c+1=\alpha$, $b-d-f=\beta$,
$e-a-f=\gamma$, $c+e-d+1=\delta$, $b-a-d+e+1=i$,
$b+c+e-f+2=j$, $c-d-a-f=k$ у (8),
з допомогою (9) (використавши (3) і (4)) приходимо до таких рекурентних формул для q-$(6j)$-коефіцієнтів

$$[b-c+e+f+1]\left([a+b+c+1][a+f-e]\right)^{1/2}\begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{Bmatrix}_q =$$

$$=\left([a-b+c][e-a+f+1][d+c-e][d-c+e+1]\right)^{1/2}\begin{Bmatrix} a-1/2 & b & c-1/2 \\ d & e+1/2 & f \end{Bmatrix}_q -$$

$$-\left([a+b-c][a+e+f+1][b+d+f+1][b-d+f]\right)^{1/2}\begin{Bmatrix} a-1/2 & b-1/2 & c \\ d & e & f-1/2 \end{Bmatrix}_q, \quad (13)$$

$$[d-a+c+f+1]\left([a-b+c][b-d+f+1]\right)^{1/2}\begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{Bmatrix}_q =$$

$$=\left([a+b-c+1][d-b+f][c+d-e][c+d+e+1]\right)^{1/2}\begin{Bmatrix} a & b+1/2 & c-1/2 \\ d-1/2 & e & f \end{Bmatrix}_q +$$

$$+\left([b-a+c+1][a+e-f][e-a+f+1][b+d+f+2]\right)^{1/2}\begin{Bmatrix} a-1/2 & b+1/2 & c \\ d & e & f+1/2 \end{Bmatrix}_q .(14)$$

Якщо за параметри у (9) взяти інші значення з одної й тої ж формули для $\begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{Bmatrix}_q$, то можна одержати рекурентні співвідношення іншого вигляду. Поставимо, наприклад, у (5)
$f-a-e=\alpha$,
$l+f-d+1=\beta$,
$e-a+f+1=\gamma$,
$f-b-d=\delta$,
$f+c-a-d+1=j$,
$f-c-a-d=k$, $2f+2=i$.
Тоді (9) дає

$$[a+b-d+e+1]\left([b+d+f+2][a-e+f+1]\right)^{1/2}\begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{Bmatrix}_q =$$

$$=\left([a+e-f][d-b+f+1][c+e-d][d+c-e+1]\right)^{1/2}\begin{Bmatrix} a & b & c \\ d+1/2 & e-1/2 & f+1/2 \end{Bmatrix}_q -$$

$$-\left([a+b-c+1][a+b+c+2][a+e+f+2][b-d+f+1]\right)^{1/2}\begin{Bmatrix} a+1/2 & b+1/2 & c \\ d & e & f+1/2 \end{Bmatrix}_q .(15)$$

Поклавши у тій же формулі (5) $e-a+f+1=\alpha$, $b-d+f+1=\beta$, $f-a-e=\gamma$, $f-b-d=\delta$, $f+c-a-d+1=j$, $f-a-d-c=k$, $2f+2=i$, з допомогою (9) дістанемо

$$[a+b-d-e]\left([a+e+f+2][b+d+f+2]\right)^{1/2}\begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{Bmatrix}_q =$$

$$=\left([e-a+f+1][d-b+f+1][d-c+e+1][d+c+e+2]\right)^{1/2}\begin{Bmatrix} a & b & c \\ d+1/2 & e+1/2 & f+1/2 \end{Bmatrix}_q -$$

$$-\left([a+b-c+1][a+b+c+2][a-e+f+1][b-d+f+1]\right)^{1/2}\begin{Bmatrix} a+1/2 & b+1/2 & c \\ d & e & f+1/2 \end{Bmatrix}_q . \qquad (16)$$

Перетвореннями симетрії й комбінуванням приведених вище рекурентних співвідношень можна отримати низку інших такого ж типу формул для q-$(6j)$-коефіцієнтів. При цьому корисною може виявитись 4-параметрична тотожність $[a+b][c+d]-[a+c][b+d]=-[a-d][b-c]$ для q-чисел.

4. Для q-коефіцієнтів Рака введемо альтернативне позначення: $R_q(abd,ef,c)=$ $=R^{bdf}_{e-a,c-e,c-a}(c;q)$. В цих позначеннях

$$\begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{Bmatrix}_q = (-1)^{a+b+d+e}\left([2c+1][2f+1]\right)^{-1/2}\times$$
$$\times R^{bdf}_{c-a,e-c,e-a}(e;q). \qquad (17)$$

У роботі [3] показано, що

$$\lim_{j\to\infty} R^{cbc}_{\rho\sigma\tau}(j;q)=\begin{cases} C^{abc}_{\rho\sigma\tau}(q), & |q|\ge 1, \\ C^{abc}_{\rho\sigma\tau}(q^{-1}), & |q|<1, \end{cases} \qquad (18)$$

де $C^{abc}_{\rho\sigma\tau}(q)$ - коефіцієнти Клебша-Гордана квантової алгебри $U_q(su_2)$ і $\tau=\rho+\sigma$. Цей факт дозволяє знайти рекурентні співвідношення для q-ККГ із рекурентних формул для q-$(6j)$-коефіцієнтів. Для цього у відповідних формулах для $\begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{Bmatrix}_q$ треба перейти до альтернативних q-КР згідно (17), ввести перепозначення $a\to j-\rho-\sigma$, $b\to a$, $c\to j-\sigma$, $d\to b$, $e\to j$, $f\to c$ і зробити граничний перехід (18). При цьому необхідно також врахувати, що

$$\lim_{j\to\infty}\frac{[a+j]}{[b+j]}=\begin{cases} q^{(a-b)/2}, & |q|\ge 1, \\ q^{-(a-b)/2}, & |q|<1. \end{cases}$$

Виконавши таку процедуру, наприклад, у формулах (15) і (16) (при $q\ge 1$), одержимо, відповідно

$$q^{(a-b)/4}\left(\frac{[2c+2][a+b+c+2][c-\rho-\sigma+1]}{[2c+1]}\right)^{1/2} C^{abc}_{\rho\sigma\rho+\sigma}(q)=$$
$$=q^{-(a+c-\rho+2)/4}\left([b-a+c+1][b-\sigma+1]\right)^{1/2}C^{a,b+1/2,c+1/2}_{\rho,\sigma-1/2,\rho+\sigma-1/2}(q)+$$
$$+q^{-(b+c-\sigma+2)/4}\left([a-b+c+1][a-\rho+1]\right)^{1/2}C^{a+1/2,b,c+1/2}_{\rho-1/2,\sigma,\rho+\sigma-1/2}(q),$$

$$[a-b-\rho-\sigma]\left(\frac{[2c+2][a+b+c+2]}{[2c+1]}\right)^{1/2} C^{abc}_{\rho\sigma\rho+\sigma}(q)=$$
$$=q^{(a-c-\sigma)/4}\left([a-b+c+1][a-\rho+1][c-\rho-\sigma+1]\right)^{1/2}C^{a+1/2,b,c+1/2}_{\rho-1/2,\sigma,\rho+\sigma-1/2}(q)-$$
$$-q^{(b-c+\rho)/4}\left([b-a+c+1][b+\sigma+1][c+\rho+\sigma+1]\right)^{1/2}C^{a,b+1/2,c+1/2}_{\rho,\sigma+1/2,\rho+\sigma+1/2}(q).$$

Аналогічного типу рівність дає формула (11):

$$q^{-(a+b+1)/4}\left(\frac{[b-a+c+1][c-\rho-\sigma+1][2c+2]}{[2c+1]}\right)^{1/2} C^{abc}_{\rho\sigma\rho+\sigma}(q)=$$
$$=q^{(a-c+\rho+1)/4}\left([a+b+c+2][b-\sigma+1]\right)^{1/2} C^{a,b+1/2,c-1/2}_{\rho,\sigma-1/2,\rho+\sigma-1/2}(q)-$$
$$-q^{(b+c-\sigma+1)/4}\left([a+b-c][a+\rho]\right)^{1/2} C^{a-1/2,b,c+1/2}_{\rho-1/2,\sigma,\rho+\sigma-1/2}(q).$$

Цікаве співвідношення випливає із (12):

$$q^{-(\sigma+2\rho)/4}\left(\frac{[a+b-c][b-a+c+1][2c+2]}{[2c+1]}\right)^{1/2} C^{abc}_{\rho\sigma\rho+\sigma}(q)=$$
$$=q^{(c-a+1)/4}\left([a+\rho][c-\rho-\sigma+1]\right)^{1/2} C^{a-1/2,b,c+1/2}_{\rho-1/2,\sigma,\rho+\sigma-1/2}(q)-$$
$$-q^{-(c-a+1)/4}\left([a-\rho][c+\rho+\sigma+1]\right)^{1/2} C^{a-1/2,b,c+1/2}_{\rho+1/2,\sigma,\rho+\sigma+1/2}(q)$$

Щоб скористатись формулами (10) і (13), попередньо зробимо у них заміни $a \leftrightarrow d$ і $b \leftrightarrow e$, а потім – $a \leftrightarrow c$ і $d \leftrightarrow f$. Тоді з допомогою описаної вище процедури граничного переходу до q-ККГ одержуємо, відповідно

$$[a-b-\rho-\sigma]\left(\frac{[a+b+c+1][2c]}{[2c+1]}\right)^{1/2} C^{abc}_{\rho\sigma\rho+\sigma}(q)=$$
$$=q^{(a-c-\sigma)/4}\left([a-\rho][c-\rho-\sigma][a-b+c]\right)^{1/2} C^{a-1/2,b,c-1/2}_{\rho+1/2,\sigma,\rho+\sigma+1/2}(q)-$$
$$-q^{(b-c+\rho)/4}\left([b-a+c][b+\sigma][c+\rho+\sigma]\right)^{1/2} C^{a,b-1/2,c-1/2}_{\rho,\sigma-1/2,\rho+\sigma-1/2}(q),$$

$$q^{c/4}[a+b+\rho+\sigma+1]\left(\frac{[b+c-a][2c]}{[2c+1]}\right)^{1/2} C^{abc}_{\rho\sigma\rho+\sigma}(q)=$$
$$=q^{-(a+\sigma+1)/4}\left([c-\rho-\sigma][a+b-c+1][a+\rho+1]\right)^{1/2} C^{a+1/2,b,c-1/2}_{\rho+1/2,\sigma,\rho+\sigma+1/2}(q)+$$
$$+q^{(b+\rho 1)/4}\left([c+\rho+\sigma][a+b+c+1][b+\sigma]\right)^{1/2} C^{a,b-1/2,c-1/2}_{\rho,\sigma-1/2,\rho+\sigma-1/2}(q)$$

Зробивши спочатку заміни $b \leftrightarrow f$, $c \leftrightarrow e$ у формулі (14), таким же шляхом прийдемо до рівності, подібної попередній:

$$q^{-c/4}[a+b+\rho+\sigma+1]\left(\frac{[a-b+c+1][2c+2]}{[2c+1]}\right)^{1/2} C^{abc}_{\rho\sigma\rho+\sigma}(q)=$$
$$=q^{-(a+\sigma)/4}\left([c+\rho+\sigma+1][a+b+c+2][a+\rho+1]\right)^{1/2} C^{a+1/2,b,c+1/2}_{\rho+1/2,\sigma,\rho+\sigma+1/2}(q)-$$
$$-q^{(b+\rho+1)/4}\left([c-\rho-\sigma+1][a+b-c][b+\sigma]\right)^{1/2} C^{a,b-1/2,c+1/2}_{\rho,\sigma-1/2,\rho+\sigma-1/2}(q).$$

Інші рекурентні співвідношення для q-ККГ можна одержати із приведених вище їх комбінацією, а також застосуванням властивостей симетрії q-ККГ.

1. Голод П.І., Клімик А.У. Математичні основи теорії симетрій. Київ: Наукова думка, 1992.
2. Kirillov A.N., Reshetikhin N.Yu. Representations of the algebra Uq(sl(2)), q-orthogonal polinomials and invariants of links. Preprint LOMI E-9-88, Leningrad, 1988.
3. Kachurik I.I., Klimuk A.U., J. Phys. A., 23, 2717 (1990).
4. Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К. Квантовая теория углового момента. М.: Наука, 1975.
5. Gasper G., Rahman M. Basic hypergeometric series. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
6. Agarwal A.K., Kalnins E.G., Miller W. SIAM J. Math. Anal., 18, 1519 (1987).

THE THREE-TERM RECURRENCE RELATIONS FOR RACAH COEFFICIENTS OF THE QUANTUM ALGEBRA $U_q(su_2)$

I.I. Kachurik

Technological University of Podillia, 280016, Khmelnitsky, Institutskaja str., 11

Different expressions and three-term recurrence relations for Racah coefficients are derived on the basis of the theory basic hypergeometric functions. It is shown that recurrence formulas for q-Racah coefficients give recurrence formulas for Klebsch-Gordan coefficients in asymptotic limit.

Іван Іванович Качурик – доцент Технологічного університету Поділля