КВАНТОВО-ПОЛЕВЫЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ РАЗВИТОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

М. Гнатич,* М. Стеглик*, М. Юрчишин*

Институт экспериментальной физики САН, Кошице, Словакия

Сильно хаотические токи широко распространены в природе. Несмотря на это их динамика и топология мало изучены. Одним из перспективных и эффективных методов их теоретического исследования являются методы квантовой теории поля. В настоящей работе суммируются основные достижения полученные в этом направлении изучения сложной мультифрактальной сущности развитой турбулентности

1. Масштабная инвариантность

Одна из основных проблем современной теории развитой турбулентности – проверка наличия известного скейлинга Колмогорова [I], и возможных поправок к нему в рамках микроскопической модели – остается до настоящего времени не решенной. Исходным пунктом микроскопической модели развитой турбулентности является статистическое описание, основанное на стохастическом уравнении Навье-Стокса [2, 3, 4]. В данном уравнении, которое управляет динамикой пульсаций поля скорости вокруг ее среднего значения, неконтролируемые эффекты вызванные сложными граничными условиями моделируются действием внешней случайной силы. Эта сила имеет гауссовское распределение с нулевым средним значением и заданным парным коррелятором шума, имитирующим возникновение турбулентных неустойчивостей, которые нелинейным механизмом, описываемым уравнением Навье-Стокса, переносятся в область масштабов с характерной диссипационной длиной Колмогорова. В этой области доминирует механизм диссипации энергии в тепло. По традиции допускается зависимость данного коррелятора от некоторого свободного параметра (назовем его e) [5, 6, 7]. Его физическое значение равно двум. Такая свобода допускает осуществление некоторых математических операций для малых значений e, а полученные зависимости от данного параметра аналитически продолжить в область больших e [8]. В эксперименте измеряют разные статистические корреляции пульсаций скорости, например, одновременные структурные функции n-го порядка [3]

$$S_n(r) \equiv \left\langle [\mathrm{v}_r(\vec{\mathrm{x}}) - \mathrm{v}_r(\vec{\mathrm{x}}')]^n \right\rangle, \quad r \equiv |\vec{\mathrm{x}} - \vec{\mathrm{x}}'|, \quad (1)$$

где $\mathrm{v}_r(x) \equiv \mathrm{v}_r(t, \vec{\mathrm{x}})$ — проекция поля скорости на вектор $(\vec{\mathrm{x}} - \vec{\mathrm{x}}')$, а $\langle ... \rangle$ обозначают усреднение по статистическому ансамблю. Вдали от диссипационной области $(r >> l)$ из простых размерных соображений структурные функции (1) можно записать в следующем виде [3, 9]

$$S_n(r) = (\bar{\varepsilon} r)^{n/3} f_n(r/L), \quad (2)$$

где величина $\bar{\varepsilon}$ – средняя диссипация кинетической энергии в единицу времени на единицу массы, а f_n обозначает произвольные (скейлинговые) функции безразмерной переменной r/L. Параметр L – корреляционная длина – по порядку величины близка внешним размерам системы (напр. диаметру обтекаемого цилиндра), и является характерным масштабом для энергосодержащей области (область источника турбулентных неустойчивостей $r \sim L$). В рамках феноменологической теории Колмогорова-Обухова [3] высказывается предположение о несингулярном асимптотическом поведении функций (2): $f_n \xrightarrow[r/L\to 0]{} C_n$ в инерционном интервале $l << r << L$, где C_n некоторые константы. Для функции S_2 это предположение находится в хорошем согласии с экспериментально наблюдаемой зависимостью $\sim r^{2/3}$, а C_2 (с точностью до численного коэффициента) равна экспериментально измеряемой константе Колмогорова [3,4]. Однако для структурных функций более высоких степеней ($n \geq 4$) в инерционном интервале наблюдаются отклонения от колмогоровского скейлинга с простым индексом $n/3$ [10]. Существуют разные полуфеноменологические модели, в рамках которых предпринимаются попытки объяснить эти отклонения на основе предположения о нетривиальной топологии турбулентности – или ее мультифрактальной сущности [9]. Однако до настоящего времени не существует теоретического объяснения данного явления, исходящего из первых принципов, т.е. уравнения Навье-Стокса. В рамках квантово-полевого подхода, основанного на уравнении Навье-Стокса, с помощью ренор-мализационной группы (РГ) (см. литературу в монографиях [11, 12]) в инерционном и энергосодержащем интервале были найдены структурные функции в виде

$$S_n(r) = (\bar{\varepsilon} r)^{\text{Ä}_n} f_n(r/L),\ \text{Ä}_n = n(2e/3 - 1), \quad (3)$$

где для произвольной функции f_n мы оставили такое же обозначение как в (2). Для физического значения $e = 2$ получаем структурные функции в виде (2).

Основное уравнение РГ не фиксирует конкретный вид скейлинговой функции f_n, а его нахождение остается основной нерешенной проблемой теории развитой турбулентности. Сингулярное (аномальное) поведение функций f_n физически означает, что даже в инерционном интервале вдали от источника турбулентности ($r << L$) влияние размеров системы существенное и в корреляционных функциях поля скорости невозможно осуществить формальный предел $L \to \infty$. Для примера, приведем функции

$$f_n(r/L) \cong const(r/L)^{q_n} \quad (4)$$

с отрицательными (аномальными) индексами q_n, которые в общем случае нелинейно зависят от n.

В квантовой теории поля можно вид скейлинговой функции находить пертурбативно в виде асимтотического ряда по малому e. Но даже в этом случае в области $r/L << 1$ отдельные члены такого ряда становятся сингулярными из за наличия больших логарифмов $ln(r/L)$ и возникает проблема их суммирования. Аналогично теории критических явлений [13], зависимость скейлинговых функций от аргумента r/L в области $r/L << 1$ можно изучать в рамках известного операторного разложения (OPE - operator product expansion) (см. [12, 14]). Согласно OPE, скейлинговые функции типа (2) в области $r/L << 1$ можно записать в виде

$$f(r/L) = \sum_F C_F (/\,Lr)^{\text{Ä}_F},\ r/L \to 0, \quad (5)$$

где C_F – коэффициенты регулярно зависящие от L, суммирование производится по некоторому семейству составных операторов F, а Ä_F обозначает их критические индексы. Эти индексы вычисляют с помощью сложной РГ техники специально приспособленной для корреляционных функций содержащих составные операторы [11, 15, 16].

Примером простейшего, но нетривиального составного оператора в теории фазовых переходов, является квадрат флюктуации параметра порядка в одной и той же пространственно-временной точке. В турбулентности – это разные степени поля скорости или его градиентов. Например, уже упоминавшаяся диссипация энергии ε представляет собой составной оператор $\sim (\nabla \vec{v}(\vec{x}, t))^2$.

В теории критических явлений критические индексы Ä_F всех составных операторов (СО) F неотрицательные поэтому основной вклад в (5) вносит простейший оператор $F = 1$ с $\text{Ä}_F = 0$, и, таким образом, в пределе $L^{-1} \to 0$ функция $f(r/L)$ конечна [13]. Сингулярное поведение скейлинговых функций (1) при $L^{-1} \to 0$ в турбулентности может быть вызвано присутствием "опасных" СО с отрицательными критическими индексами [8, 12, 14]. Поэтому для нахождения явного вида этих функций необходимо сконструировать все все опасные СО входящие в (5) и вычислить их критические индексы. Оказывается, что в теории развитой турбулентности таких СО бесконечное количество и возникает нетривиальная проблема суммирования бесконечного ряда (5). Для решения данной проблемы необходимо существенно усовершенствовать известные теоретические методы.

Существующие трудности толкают теоретиков к поиску более простых математических моделей, которые, с одной стороны, отражали бы основные проблемы реальной турбулентности (присутствие СО с отрицательными индексами), а с другой, были бы решаемыми. К таким упрощенным моделям принадлежит известная модель Крейчнана с помощью диффузионного уравнения описывающая распространение скалярной примеси в заданном случайном гауссовском поле скорости [17]. Оказывается, что структурные функции скалярного поля θ примеси ведут себя сингулярно при $r/L \ll 1$, аналогично (4), причем соответствующие аномальные индексы можно вычислять пертурбативно в виде ряда по малому параметру.

2. Аномальный скейлинг в модели Крейчнана

В модели Крейчнана скалярное поле $\theta(x) \equiv \theta(t,\vec{x})$ удовлетворяет стохастическому уравнению диффузии

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \nu_0 \Delta\theta - \vec{v}\cdot\nabla\theta + f\,, \tag{6}$$

где ν_0 – коэффициент молекулярной диффузии, $\vec{v}(x)$ – поперечное поле скорости (несжимаемость жидкости), а $f \equiv f(x)$ обозначает гауссовский шум с заданным парным коррелятором [18]. Случайное поле скорости $\vec{v}(x)$ является также гауссовским с нулевым средним значением и парной корреляционной функцией вида

$$\langle v_i(x) v_j(x')\rangle = D_0 \frac{\delta(t-t')}{(2\pi)^d} \int d\vec{k}\cdot e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{x}')} \times P_{ij}(\vec{k})(k^2 + L^{-2})^{-d/2-e/2}\,, \tag{7}$$

где L – корреляционная длина, D_0 – амплитуда, d – размерность пространства, e – свободный параметр,

$$P_{ij} \equiv (1 + \alpha_1 \vec{n}\cdot\vec{k}/k^2)P_{ij} + \alpha_2 n_s n_l P_{is} P_{jl}\,,$$

($P_{ij} = \delta_{ij} - k_i k_j/k^2$, $k \equiv |\vec{k}|$) обозначает поперечный проектор с учетом возможной анизотропии с выделенным направлением $\vec{n}$.

Обычно рассматривают изотропную модель с нулевыми параметрами анизотропии α_1, α_2. В таком упрощенном варианте в работе [18] методом РГ и ОРЕ структурные функции скалярного поля θ были найдены в виде

$$S_{2n} \equiv \langle[\theta(\vec{x}) - \theta(\vec{x}')]^{2n}\rangle \propto D_0^{-n} r^{n(2-e)} (r/L)^{\Delta_n}\,, \tag{8}$$

с определенными отрицательными аномальными индексами Δ_n. В [18] были эти индексы вычислены с точностью до второго порядка по e для произвольного d. В линейном приближении по e они равны:

$$\Delta_n = -\frac{2n(n-1)e}{d+2}\,. \tag{9}$$

Подчеркнем, что в данном случае даже для малых значений e индексы отрицательны. Для структурной функции S_2 $\Delta_2 = 0$ является точным результатом.

Реальные системы в общем случае анизотропны, поэтому представляет интерес обобщить изотропную модель и для этого случая. Такое обобщение может иметь нетривиальные последствия. Например, в [19] было показано, что сильная анизотропия с достаточно большими значениями α_1, а α_2 может полностью подавить колмогоровский скейлинг. В рассматриваемом случае анизотропные поправки могли бы в принципе поменять знак аномальных индексов. Задача расчета аномальных индексов технически сложная, поскольку необходимо диагонализовать матрицу $n \times n$ аномальных индексов операторов, влияющих на поведение структурных функций (10) посредством OPE.

Дальше сосредоточим свое внимание на структурной функции S_2, которую в инерционном интервале $r/L \ll 1$ мы нашли в виде

$$S_2(r) \propto D_0^{-1} r^{(2-e)} [1 + (r/L)^{\ddot{A}_2}], \quad (10)$$

с аномальным индексом в линейном приближении по e зависящим от параметров анизотропии α_1, α_2:

$$\begin{aligned}\ddot{A}_2 = e\big[&2 - \big(d(d+2)(d-2)F(1/2,1,d/2,z) + (d+2)(2-2\alpha_1+(\alpha_1+\alpha_2)d)F(1,3/2,d/2+1,z)\\ &+ 3(2(\alpha_1-\alpha_2 d)-d)\,F(1,5/2,d/2+2,z/d_1) + 15d(\alpha_2-\alpha_1)\,F(1,7/2,d/2+1,z)/(d+4)\big)\big]\end{aligned}, \quad (11)$$

где
$d_1 = (d-1)[(d-1)(d+2) + (d+1)\alpha_1 + \alpha_2]$,
$z = (1-d)[(d^2-2)\alpha_2 - 2\alpha_1]/d_1$, а F обозначает гипергеометрическую функцию. На рисунках 1 и 2 представлені зависимости аномального индекса $\ddot{A}_2$ от α_1, α_2 для двух- и трехмерного пространства. Нетрудно убедиться, что для всех физических значений α ($\alpha_1 \geq -1$, $\alpha_2 \geq 0$, $2\alpha_1 \leq (d^2 - 2\alpha_2)$) аномальный индекс положительный.

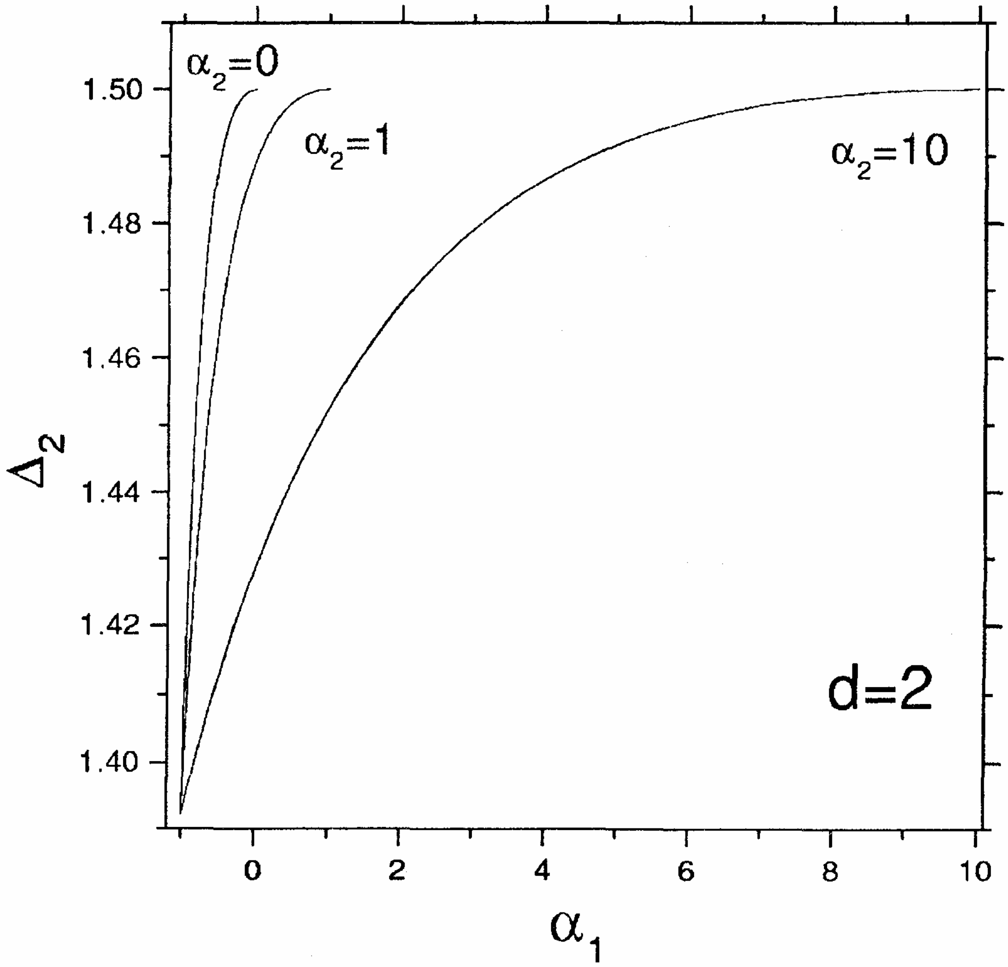

Рисунок 1.. Зависимость критического индекса $\ddot{A}_2$ от параметров анизотропии двухмерном пространстве.

3. Заключение

Техника ренормализационной группы является мощным инструментом для нахождения скейлинговых законов в теории развитой турбулентности. На примере простой модели Крейчнана, описывающей распространение скалярной пассивной примеси в заданной турбулентной среде, было показано, что с помощью РГ техники можно вычислять не только колмогоровские критические индексы для структурных функций флюктуирующих полей но также находить аномальные (отрицательные) поправки к этим индексам. Поскольку появление этих аномалий обычно интерпретируют как проявление мультифрактальной топологии турбулентности [9] то оказывается, что применение квантово-полевой ренормализационной группы, помогает объяснить и это интересное физическое явление. В рамках модели Крейчнана для простейшей (парной) структурной функции было показано, что анизотропия, хоторая всегда присутствует в реальных средах, вносит положительную поправку к нулевому критическому индексу S_2. Представляется интересным изучать влияние анизотропии на отрицательные индексы структурных функций более высоких степеней. Не исключено, что вклад анизотропии будет настолько существенным, что поменяет знак аномальных индексов, полученных в изотропной модели.

Настоящая работа была в частности поддержана грантом VEGA 4171.

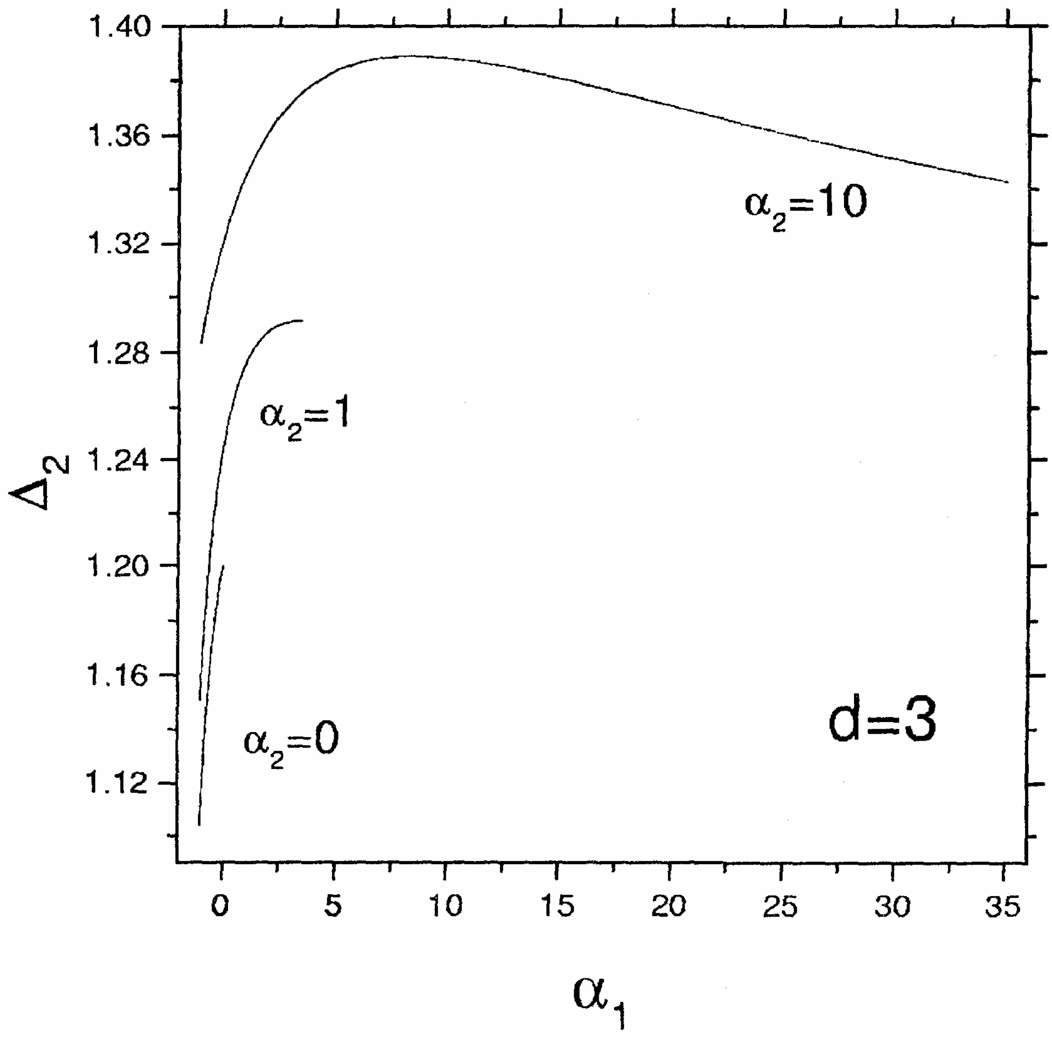

Рисунок 2.. Зависимость критического индекса Ä$_2$ от параметров анизотропии трехмерном пространстве.

1. A. N. Kolmogorov, Dokl. Akad. Nauk SSSR **30,** 301 (1941) [English translation: Proc. R. Soc. bond. A **434,** 9 (1991)].
2. H. W. Wyld, Ann. Phys. **14,** 143 (1961).
3. A. S. Monin and A. M. Yaglom, *Statistical Fluid Mechanics* (MIT Press, Cambridge, Mass., 1975), **2.**
4. S. A. Orszag, *Lectures on the Statistical Theory of Turbulence,* in *Fluid Dynamics (Les Houches Lectures)* edited by R. Balian and J. L. Peube (Gordon and Breach, London, 1973), p.235.
5. D. Forster, D. R. Nelson, and M. J. Stephen, Phys.Rev. A **16,** 732 (1977).
6. C. De Dominicis, and P. C. Martin, Phys.Rev. A **19,** 419 (1979).
7. Л. Ц. Аджемян, А. Н. Васильев, Ю. М. Письмак, ТМФ **57**, 268 (1983).
8. L. Ts. Adzhemyan, N. V. Antonov, and A. N. Vasil'ev, Sov. Phys. JETP **68** (4), 733 (1989).
9. U. Frisch, *Turbulence* (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).
10. R.Benzi et al., Phys.Rev. E **48**, 29 (1993).
11. А. Н. Васильев. *Квантовополевая ренормгруппа в теории критического поведения и стохастической динамике* (Санкт-Петербург, 1998).
12. L. Ts. Adzhemyan, N. V. Antonov, and A. N. Vasil'ev, *The field theoretic renormalization group in fully developed turbulence* (Gordon Breach Science Publishers, London, 1998)
13. J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena* (Clarendon, Oxford, 1989).
14. N. V. Antonov, S. V. Borisenok, and V. I. Girina, Theor. Math. Phys. **106,** 75 (1996).
15. J. Collins, *Renormalization* (Cambridge University Press, 1984).
16. L. Ts. Adzhemyan, A. N. Vasil'ev, and M. Hnatich, Theor. Math. Phys. **74**, 115 (1988).
17. R. H. Kraichnan, Phys. Fluids **11**, 945 (1968).
18. L. Ts. Adzhemyan, N. V. Antonov, A. N. VasUjev, Phys.Rev. E **58**, 1823 (1998).
19. J. Busa, M. Hnatich, D. Horvath, J. Honkonen, Phys.Rev. E **55**, 381 (1997).

QUANTUM-FIELD METHODS IN THEORY OF DEVELOPED TURBULENCE

M. Gnatich*, M. Steglik*, M. Yurchishin*

Institute of Experimental Physics, Slovak Academy of Sciences, Koshitse, Slovakia

Strongly chaotic turbulent flows are very widespread in nature and space. In spite of this fact our knowledges about their dynamics and topology are poor. Quantum-field methods seem to be the perspective and powerfull tool for their research. In this paper we summarize present status in theoretic study of the complex multifractal essence of developed turbulence.