

## УМОВИ СИНХРОНІЗМУ В ГІБРИДНОМУ УБІТРОНІ

**В.О.Горяшко, Б.П.Єфімов, К.В.Ільєнко**

Інститут радіофізики та електроніки ім. О.Я.Усикова НАН України,  
вул. акад. Проскури, 12, Харків, 61085  
e-mail: vitgor@ire.kharkov.ua

Запропоновано метод розкладу в подвійний асимптотичний ряд для аналітичного розв'язку нелінійних рівнянь руху слабкорелятивістських електронів у статичних магнітних полях гібридного планарного убітрона, а також для знаходження поправок до цих незбурених траєкторій, обумовлених наявністю власних біжучих мод круглого хвилевода. Аналітичний розв'язок дає умови існування траєкторних резонансів у незбуреному рухові, можливість досяжності яких досліджено чисельно. В одночастковому наближенні з аналізу руху електронів у заданому високочастотному полі круглого хвилевода знайдено умови ефективної взаємодії електронного пучка з власними хвилями (умови синхронізму). Ці умови задають мінімальні значення робочих параметрів гібридного убітрона, необхідні для самозбудження системи.

### Вступ

В наш час у провідних світових наукових центрах [1] активно досліджується ондуляторно-гірорезонансна взаємодія – механізм дії убітрона – електронних пучків з електромагнітними хвилями, що може стати основою створення потужних і ефективних генераторів та підсилювачів у міліметровому й субміліметровому діапазонах [2]. Вакуумні генератори та підсилювачі цих діапазонів широко застосовуються в супутникових телекомунікаційних системах, радіомовленні, навігаційних радарних системах, а також у наукових дослідженнях прискорення частинок і розігрівання плазми для керованої термоядерної реакції, де тільки такі пристрої задовольняють висунуті вимоги.

Убітрон (який ще називають лазером на вільних електронах) складається зі слабкорелятивістського електронного пучка, який поширюється у магнітному полі накачки: періодичне магнітне поле ондулятора і поздовжнє магнітне поле. Генерація відбувається внаслідок того, що поля накачки та випромінювання утворюють пондеромоторну хвилю – хвилю биття, яка розповсюджується повільніше

за швидкість світла у вакуумі й може бути у синхронізмі з електронами.

Метою цієї роботи є виявлення умов резонансної (синхронної) взаємодії електронного пучка з власними модами круглого хвилевода. Особливості цього аналізу такі:

1) дається точний аналітичний розв'язок рівнянь руху слабкорелятивістських електронів у полі накачки;

2) знайдено умови траєкторного резонансу в полі накачки;

3) сформульовано умови резонансної взаємодії пучка з власними модами, які забезпечують підсилення або послаблення останніх залежно від фазування;

4) запропонований розклад у подвійний асимптотичний ряд є основою для розв'язання крайової задачі підсилення біжучої хвилі, подібно до того, як це зроблено для гіротрона [3].

У подальшому аналізі будемо виходити з теорії збудження довільної лінії передач непрямої лінійним електронним пучком, розглянутої в [4]; одержані у цій роботі добре відомі формули дозволяють виразити поле, що збуджується у хвилеводі, через змінну (високочастотну) складову радіус-вектора окремого електрона у

тонкому пучку. Таким чином, розв'язок задачі про взаємодію електромагнітних хвиль з тонким пучком зводиться до розв'язання рівнянь руху електрона з урахуванням виразів для амплітуд нормальних хвиль лінії передачі. З математичної точки зору необхідно розв'язати систему однорідних лінійних інтегро-диференціальних рівнянь, яка задає дисперсійну залежність. У лінійній теорії розв'язок цієї системи – за допомогою теореми Флоке – будується навколо резонансних значень сталих розповсюдження нормальних хвиль «незбуреної» лінії передач, які обчислюються з наближення заданого поля. Перейдемо до знаходження цих резонансних сталих розповсюдження.

### Збудження хвилевода непрямолінійним електронним пучком

Тонкий слабкорелятивістський електронний пучок поширюється в ідеально провідному циліндричному хвилеводі вздовж осі симетрії  $z$ . У момент часу вольту  $t_e$  у точці  $(0, y_0, 0)$  пучок має швидкість  $\mathbf{v} = (0, 0, v_{||})$ . Припустимо, що просторовий заряд пучка настільки малий, що створюване ним високочастотне поле не впливає на рух електронів. Тоді траєкторія кожного електрона в пучку збігається з траєкторією одиночної частки маси  $m_e$  та заряду  $e$ , що рухається в електромагнітному полі, яке складається зі статичного поля накачки  $\mathbf{H}_s(\mathbf{r}) = (0, -H_{\perp} \sin(2\pi z/l), -H_{||})$  з періодом  $l$  та високочастотного (ВЧ) поля  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp(i\omega t)$  і  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{r}) \times \exp(i\omega t)$ . Рівняння руху такої частинки має вигляд:

$$m_e \frac{d(\gamma \mathbf{v})}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{v}, \mathbf{H}_s + \mathbf{H}], \quad (1)$$

де  $\gamma$  і  $c$  – відповідно релятивістський фактор та швидкість світла.

Дотримуючись підходу, розвинутого в [3] і [5], будемо розглядати високочастотне поле як мале збурення і представимо траєкторію заряду у вигляді  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_1 + \dots$  ( $|\mathbf{r}_0| \gg |\mathbf{r}_1| \gg \dots$ ), де  $\mathbf{r}_0$  – незбурена траєкторія. Даний розклад виконується за степенями малих параметрів вигляду  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)/H_{\perp}$  і  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)/H_{\perp}$ . Для слабкорелятивістського пучка  $\gamma \mathbf{v} \approx \gamma_0 [\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \gamma_0^2 \mathbf{v}_0 (\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1)/c^2]$ , де  $\gamma_0 = (1 - v_0^2/c^2)^{-1/2}$ .

У нульовому порядку за ВЧ полем рівняння руху мають вигляд:

$$m_e \gamma_0 \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} = \frac{e}{c}[\mathbf{v}_0, \mathbf{H}_s(\mathbf{r}_0)], \quad (2)$$

де враховано розклад  $\gamma$ -фактора. У такому наближенні рівняння (2) описує електрони, що рухаються в статичному магнітному полі, а отже, загальна кінетична енергія збережеться ( $\gamma_0 = \text{const}$ ). Розв'язок системи (2) можна отримати шляхом розкладу в асимптотичний ряд нормованих координат  $(\xi_0, \eta_0, \zeta_0) = \mathbf{r}(t; t_e)/l$  за малим параметром  $\varepsilon = cK/(\gamma_0 v_0)$ , де  $K = |e|H_{\perp}/(2\pi m_e c^2)$  – традиційний ондуляторний параметр, а  $t_e$  – час надходження заряду в систему в точці  $(0, -\varepsilon l/(2\pi\sigma))$  (позначення див. нижче) [6]. З точністю до  $o(\varepsilon^3)$  розв'язок має вигляд

$$\begin{aligned} \xi_0(\tau) &= \frac{\varepsilon}{2\pi\kappa(\mu^2 - 1)} \left[ \frac{\sin(\mu\kappa\tau)}{\mu} - \sin(\kappa\tau) \right], \quad \eta_0(\tau) = \frac{\varepsilon}{2\pi\kappa(\mu^2 - 1)} \left[ \frac{\cos(\mu\kappa\tau)}{\mu} - \mu \cos(\kappa\tau) \right], \\ \zeta_0(\tau) &= \frac{\kappa\tau}{2\pi} + \frac{\varepsilon^2}{4\pi\kappa^2(\mu^2 - 1)} \left[ \frac{\sin(2\kappa\tau)}{4} + \frac{\sin[\kappa(\mu - 1)\tau]}{(\mu - 1)^2} - \frac{\sin[\kappa(\mu + 1)\tau]}{(\mu + 1)^2} \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Тут введено такі позначення:

$$\omega_0 = 2\pi\nu_0/l, \quad \omega_{\perp\parallel} = eH_{\perp\parallel}/(\gamma_0 m_e c), \quad \tau = \omega_0(t-t_e), \quad \sigma_0 = \omega_{\parallel}/\omega_0,$$

$$\mu = \sigma_0\phi/\kappa, \quad \phi = 1 + \frac{\varepsilon^2(\sigma_0^2 + 1)}{4(\sigma_0^2 - 1)^2}, \quad \kappa = 1 - \frac{\varepsilon^2(\sigma_0^2 + 3)}{4(\sigma_0^2 - 1)^2} \quad (4)$$

Цей розв'язок подібний до отриманих раніше (див. [7] і [8]), однак, у деяких моментах істотно відрізняється від них. По-перше, цей розв'язок автоматично задовольняє закон збереження енергії в кожному порядку малості за  $\varepsilon$  (у даному випадку до  $o(\varepsilon^3)$ ), як того вимагає властивість консервативності системи [6]. По-друге, це розв'язок початкової задачі Коші, і його можна узагальнити на випадок довільних початкових значень. З асимптотично точного розв'язку (3) випливає, що рух електронів у гібридному планарному убітроні являє собою тривимірні коливання, які накладаються на поздовжній поступальний рух. Більше того, це рішення виявляє резонансний характер руху, пов'язаний з наявністю знаменників  $(\mu - 1)$  у виразах (3). Умови траєкторного резонансу наведено в термі-

нах середньої поступальної швидкості  $\bar{v}_{\parallel} = \kappa\nu_0$  і «перенормованої» безрозмірної циклотронної частоти  $\sigma_0\phi$ , [9]. Виконання закону збереження енергії досягається завдяки наявності перенормувальних множників  $\phi$  та  $\kappa$ . Як показано в [6], легко одержати розв'язок при великих степенях по  $\varepsilon$ .

Для того, щоб з'ясувати ступінь точності аналітичного результату в області резонансу (див. [10]), наведений аналітичний розв'язок системи (3) порівнювався з її числовим розв'язком методом Рунге-Кутта, відносна похибка якого не перевищує  $10^{-6}$ . Параметром порівняння розв'язків обрано відносну різницю амплітуд поперечного руху заряду, обчислених аналітично і чисельно, тобто

$$\left| \sqrt{\xi_0^2(\tau) + \eta_0^2(\tau)} \Big|_{an} - \left| \sqrt{\xi_0^2(\tau) + \eta_0^2(\tau)} \Big|_{num} \right| / \left| \sqrt{\xi_0^2(\tau) + \eta_0^2(\tau)} \Big|_{num} \quad (5)$$

Саме ця похибка є найбільшою за абсолютною величиною в даній задачі. Встановлено, що при фіксованих  $\nu_0$  і  $H_{\perp}$  похибка збільшується з ростом  $H_{\parallel}$ . На рис. 1 наведено результати порівняння аналітичного і числового розв'язків: криві  $1\% o(\varepsilon^3)$  і  $1\% o(\varepsilon^5)$  визначають максимально можливе значення поздовжнього магнітного поля, за якого похибка (5) не перевищує  $1\%$ , при використанні аналітичного розв'язку з точністю відповідно до  $o(\varepsilon^3)$  і до  $o(\varepsilon^5)$ . Зрозуміло, що врахування доданків більш високих порядків малості по  $\varepsilon$  веде до кращого узгодження аналітичного і числового результатів; так при переході від  $o(\varepsilon^3)$  до  $o(\varepsilon^5)$  точність

підвищується на  $20\div 40\%$ . На малюнку наведено також криві аналітичного і числового резонансу:  $H_{\parallel}^{res}$  і  $H_{\parallel}^{res\ num}$ . Під числовим резонансом розуміється таке  $H_{\parallel}$ , при якому амплітуда поперечного руху при числовому рішенні набуває максимального значення.

### Взаємодія з хвилеводними модами

Аналогічно підходу розвинутому в [3], без втрати спільності будемо шукати рішення рівнянь руху в першому порядку малості за ВЧ полем у вигляді  $\tilde{r}_1(t, t_e) = r_1(t - t_e) \exp(i\omega t_e)$ . Самі ж рівняння мають вигляд:

$$m_e \gamma_0 \frac{d}{dt} \left\{ \mathbf{v}_1 + \gamma_0^2 \mathbf{v}_0 \frac{(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1)}{c^2} \right\} = \left\{ e \mathbf{E}(\mathbf{r}_0) + \frac{e}{c} [\mathbf{v}_0, \mathbf{H}(\mathbf{r}_0)] \right\} \exp[i\omega(t - t_e)] + \frac{e}{c} \left\{ [\mathbf{v}_1, \mathbf{H}(\mathbf{r}_0)] + [\mathbf{v}_0, (\mathbf{r}_1, \nabla) \mathbf{H}_s(\mathbf{r})]_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0} \right\} \quad (6)$$

ВЧ поля  $\mathbf{E}(\mathbf{r}_0)$  і  $\mathbf{H}(\mathbf{r}_0)$  являють собою суперпозицію власних мод хвилевода. Варто зазначити, що в термінах позначень (4) ці рівняння залежать тільки від безрозмірного часу прольоту  $\tau$ . Така ж залежність рівнянь від часу має місце й у випадку руху в нульовому наближенні

за ВЧ полем. Початкові умови для рівнянь (6) в момент часу  $\tau = 0$  однорідні.

Структура  $TE_{nm}$  та  $TM_{nm}$  хвилеводних мод з напрямом руху вздовж додатнього напрямку осі  $z$  у циліндричній системі координат має вигляд:

$$\begin{aligned} h_{nm}^\zeta(\rho, \theta, \zeta) &= -iJ_n(\beta_{nm} \rho/a) e^{-ik_\zeta \zeta} [A_{nm} \cos n\theta + B_{nm} \sin n\theta]; \\ e_{nm}^\zeta(\rho, \theta, \zeta) &= iJ_n(\alpha_{nm} \rho/a) e^{-ik_\zeta \zeta} [\tilde{A}_{nm} \cos n\theta + \tilde{B}_{nm} \sin n\theta] \end{aligned} \quad (7)$$

Компоненти електромагнітного поля, що залишилися, знаходяться з добре відомих співвідношень

$$k_\perp^2 \begin{pmatrix} \mathbf{e}_\perp \\ \mathbf{h}_\perp \end{pmatrix} = \nabla_\perp \frac{\partial}{\partial \zeta} \begin{pmatrix} e_{nm}^\zeta \\ h_{nm}^\zeta \end{pmatrix} \mp 2\pi i \frac{v_0 \omega}{c \omega_0} \left[ \nabla_\perp, \begin{pmatrix} h_{nm}^\zeta \\ e_{nm}^\zeta \end{pmatrix} \zeta \right]. \quad (8)$$

Тут  $\nabla = (\partial/\partial\rho, \rho^{-1}\partial/\partial\theta)$ ,  $\mathbf{e}_\perp = (e_{nm}^\rho, e_{nm}^\theta)$ ,  $\mathbf{h}_\perp = (h_{nm}^\rho, h_{nm}^\theta)$  і  $\zeta$  – одиничний вектор у додатньому напрямку осі  $z$ . Безрозмірні сталі поширення  $k_\zeta$  «холодного» хвилевода знаходяться з виразу

$$[2\pi\omega_0/(c\omega_0)]^2 = k_\perp^2 + k_\zeta^2, \quad (9)$$

де  $k_\perp = \alpha_{nm}/a$  для  $TM_{nm}$  мод та  $k_\perp = \beta_{nm}/a$  для  $TE_{nm}$  мод;  $a = r_w/l$ , де  $r_w$  – радіус хвилевода;  $\alpha_{nm}$  і  $\beta_{nm}$  – відповідно корені рівнянь  $J_n(x) = 0$  і  $J'_n(x) = 0$ . У виразах (7) і (8) введено такі позначення:  $\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ ;  $\theta = \text{arctg}(\eta/\xi)$ ;  $\mathbf{e}_{nm} = \mathbf{E}_{nm}/H_\perp$ ,  $\mathbf{h}_{nm} = \mathbf{H}_{nm}/H_\perp$ ;  $A_{nm}$ ,  $B_{nm}$ ,  $\tilde{A}_{nm}$  і  $\tilde{B}_{nm}$  – амплітуди хвилеводних мод.

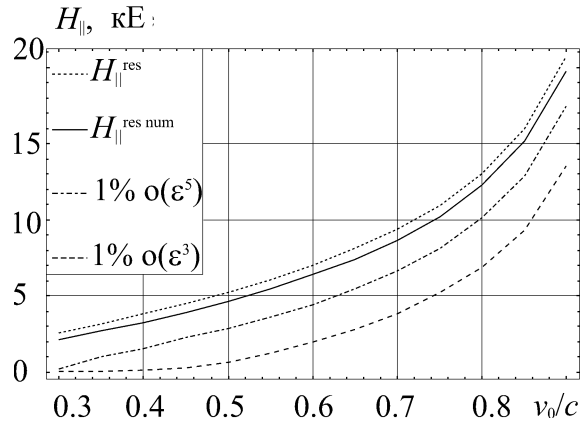


Рис. 1. Области узгодженості між аналітичним і числовим розв'язками рівнянь руху (2).

В силу виконання принципу суперпозиції в лінійній по ВЧ полю теорії будемо розглядати взаємодію електронного пучка з кожною модою окремо. Обмежимося розглядом взаємодії пучка тільки з модами  $TE_{0m}$ ,  $TE_{1m}$  та  $TM_{0m}$ , бо саме ці типи хвиль

будуть найбільш ефективно збуджуватися. Ступінь ефективності збудження хвиль визначається тим, у якому найменшому порядку за  $\varepsilon$  з'являються відмінні від нуля доданки в правих частинах рівнянь (6) залежно від індексів моди. При обчисленні виразів  $E(\mathbf{r}_0)$  і  $H(\mathbf{r}_0)$  на

незбуреній траєкторії заряду  $\mathbf{r}_0$  у рівнянні (6) компоненти  $\mathbf{r}_0$  варто замінити за формулами (3). Виходячи з тієї ж ідеї про розклад в ряд за  $\varepsilon$ , можна одержати аналітичний розв'язок для поправок  $r_1$  до траєкторії. Формальний запис узагальненого розв'язку має такий вигляд:

$$\mathbf{r}_1(t) = \sum_{i=0; j=1; p=0}^{+\infty; j_{\max}, 2} \varepsilon^i \left\{ \mathbf{c}_j^{(i)} \frac{\exp[i(\omega - k_z \bar{v}_{\parallel} + \bar{\omega})t]}{[\omega - k_z \bar{v}_{\parallel} \pm (p-1)\phi\omega_{\parallel} + \bar{\omega}]^p} + \mathbf{d}_j^{(i)} \frac{\exp[\pm i\bar{\omega}t]}{[\omega - k_z \bar{v}_{\parallel} \pm (p-1)\phi\omega_{\parallel} + \bar{\omega}]^p} \right\}, \quad (10)$$

де  $\mathbf{c}_j^{(i)}$  і  $\mathbf{d}_j^{(i)}$  – постійні вектори,  $k_z = k_c/l$ ;  $j_{\max}$  залежить від хвилеводної моди і визначає число доданків у сумі (10) при фіксованому значенні  $i$ . Величини  $\bar{\omega}$  можуть набувати значень 0,  $\phi\omega_{\parallel}$  та  $\kappa\omega_0$  залежно від конкретної моди. Ці аналітичні розв'язки для лінійних поправок до траєкторії пропорційні амплітудам  $A_{nm}$ ,  $B_{nm}$ ,  $\tilde{A}_{nm}$  і  $\tilde{B}_{nm}$  й малі в міру малості величин самих ВЧ полів. Однак ці розв'язки можуть бути не малі, якщо виконуються умови синхронізму. Ці умови визначаються з рівності нулю резонансних знаменників у розв'язках (10). Як показано в [3], рівність нулеві знаменників задає умови ефективної взаємодії між електронним пучком і відповідною хвилеводною модою.

### Умови синхронізму

Введемо такі позначення:  $\Omega_{\parallel} = \phi\omega_{\parallel}\gamma_0$  і  $\Omega_w = \kappa\omega_0$  відповідно для перенормованих циклотронної й ондуляторної частот. Умови синхронізму для мод  $TM_{0m}$  і  $TE_{0m}$ , що задаються описаними раніше знаменниками, збігаються і мають вигляд:

$$\begin{aligned} \omega - k_z \bar{v}_{\parallel} &= 0 && \text{Черенковський} \\ \omega - k_z \bar{v}_{\parallel} &= \pm \Omega_{\parallel} / \gamma_0 && \text{циклотронний} \\ \omega - k_z \bar{v}_{\parallel} &= \pm \Omega_w && \text{ондуляторний} \\ \omega - k_z \bar{v}_{\parallel} &= \pm \Omega_w \pm \Omega_{\parallel} / \gamma_0 && \text{гібридний} \end{aligned} \quad (11)$$

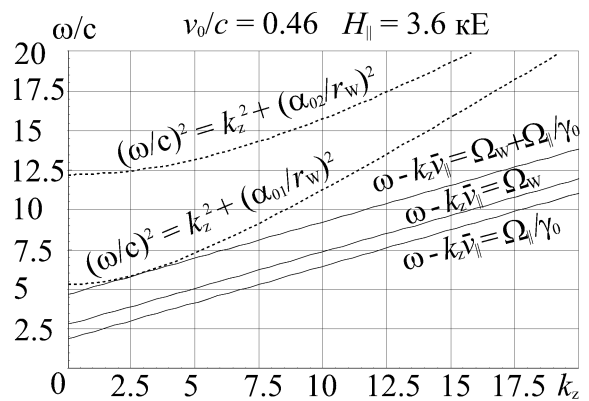


Рис. 2. Дисперсійні криві хвилевода і деякі лінії синхронізмів (11) для нижчих  $TM_{0m}$  мод.

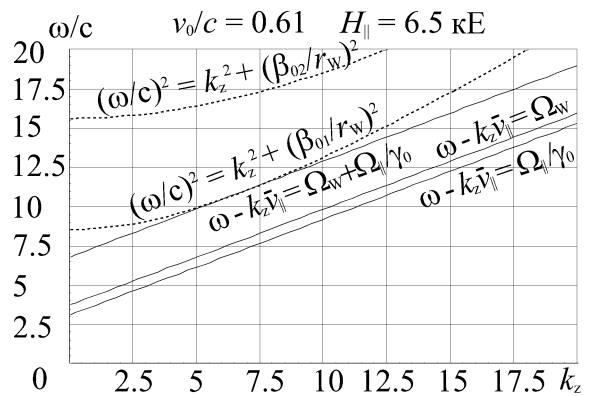


Рис. 3. Дисперсійні криві хвилевода і деякі лінії синхронізмів (11) для нижчих  $TE_{0m}$  мод.

Для  $TE_{1m}$  мод синхронізми такі ж самі, за винятком відсутності найбільш важливого – гібридного. Кожна з наведених умов синхронізму (11) зв'язує дві невідомі величини: частоту  $\omega$  і сталу поширення  $k_z$  власних хвилеводних  $TE$  і

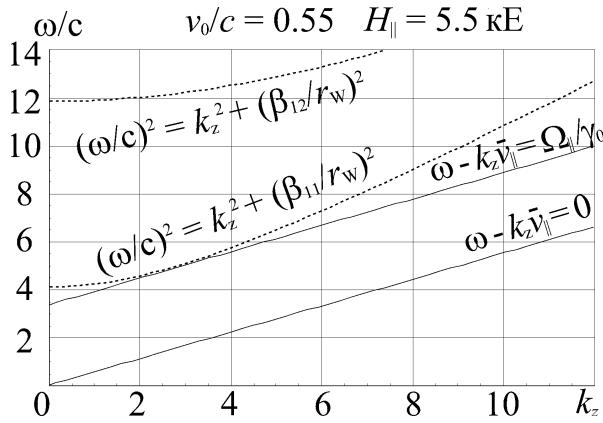


Рис. 4. Дисперсійні криві хвилевода і деякі лінії синхронізмів (11) для нижчих  $TE_{1m}$  мод.

$TM$  мод «холодної» системи. Другим рівнянням для визначення можливих  $\omega$  і  $k_z$  у термінах резонансних  $v_0$  і  $H_{||}$  є дисперсійне співвідношення (9). Результати розв'язання представлено в графічному вигляді на рис. 2, 3 і 4 ( $l=r_w=10$  мм).

## Висновки

У роботі показано, що лінійна за ВЧ полем теорія гібридного убітрона, заснована на асимптотично точному розв'язку нелінійних рівнянь руху електронів у статичних магнітних полях накачки, може бути побудована аналітично. Запропонований підхід введення перенормувальних множників має своїм наслідком виконання закону збереження енергії для кожного заряду за відсутності ВЧ поля. Ці множники дають поправки до середньої поступальної швидкості руху електронів і циклотронної частоти. Також сформульовано умови найбільш ефективної взаємодії електронного потоку з запалювальним ВЧ полем. Підхід, заснований на розкладі в асимптотичні ряди, відкриває можливість побудови аналітичного розв'язку самоузгодженої лінійної теорії гібридного хвилеводного убітрона, подібно до того, як це зроблено для гіротрона (див. [3]).

## Література

1. P.G.O'Shea, H.P.Freund, Science 292, 1853 (2001).
2. A.J.Balkcum, D.V.McDermott, R.M.Philips, N.C.Luhmann, Trans. Plasma Sci. 26, 548, (1998).
3. А.В. Гапонов, Изв. высш. уч. зав. Радиофизика 2, 450, (1959).
4. А.В. Гапонов, Изв. высш. уч. зав. Радиофизика 2, 443, (1959).
5. Л.А.Вайнштейн, В.А.Солнцев, Лекции по сверхвысокочастотной электронике (Советское радио, Москва, 1973).
6. Б.П.Ефимов, К.Ильенко, Т.Ю.Яценко, В.А.Горяшко, Радиофизика и радиоастрономия .8, 190 (2003).
7. W.B.Colson, IEEE Quantum Electron. 17, 1417 (1983).
8. H.P. Freund, P. Sprangle, Phys. Rev. A 24, 1965 (1981).
9. A.Blaquiere, Nonlinear System Analysis (Academic Press, New York, 1966).
10. L.Friedland, Phys. Fluids. 23, 2376 (1980).
11. Ira B. Bernstein, J.L. Hirshfield, Phys. Rev. A 20, 1661 (1979).

## **SYNCHRONISM CONDITIONS FOR A HYBRID UBITRON**

**V.A.Goryashko, B.P.Yefimov, K.V.Ilyenko**

Institute for Radiophysics and Electronics, Ukr. Nat. Acad. Sci.,  
Acad. Proskura St. 12, Kharkiv, 61085  
e-mail: vitgor@ire.kharkov.ua

We propose an analytical technique of two-fold perturbation expansion to solve the nonlinear equations of motion of weakly-relativistic electrons moving in the magnetostatic pump field of a hybrid planar ubitron and apply it for obtaining linear corrections to the electron trajectories caused by interaction with given propagating modes of a circular waveguide. In the nonlinear part of the problem, existing trajectory resonances are studied and their accessibility is numerically investigated. Small signal in the microwave field theory leads us to an analytical derivation of conditions of the most efficient interaction between an electron beam and propagating modes of a circular waveguide (synchronism conditions) in the single-particle approximation. These conditions fix some of the operational parameters of a weakly-relativistic hybrid ubitron.