УДК 539.12.01
PACS 11.10.-z
DOI 10.24144/2415-8038.2019.45.92-103

В. М. Симулик[1], Т. М. Заяць[2]

[1]Інститут електронної фізики НАН України, 88017, Ужгород, вул. Університетська, 21, Україна,
e-mail: vsimulik@gmail.com
[2]Ужгородський національний університет, Інженерно-технічний факультет, кафедра електронних систем, 88000, Ужгород, вул. Капітульна, 13, Україна,
e-mail: taras.zajac@uzhnu.edu.ua

РІЗНОМАНІТТЯ ПІДХОДІВ ДО ПИТАННЯ ПРО ВИВЕДЕННЯ РІВНЯННЯ ДІРАКА

Представлено 26 варіантів виводу рівняння Дірака, які базуються на різних фізичних принципах і математичних формалізмах. Наведено три оригінальні підходи авторів до вирішення цієї задачі: узагальнення виводу Г. Саллгофера, отримання безмасового рівняння Дірака з рівнянь Максвелла у максимально симетричній формі, вивід рівняння Дірака з ненульовою масою з релятивістської квантової механіки дублета ферміон-антиферміон спінів $s = 1/2$. Започатковано демонстрацію ролі рівняння Дірака у сучасній теоретичній фізиці.

Ключові слова: рівняння Дірака, спінорне поле, квантова механіка, теорія поля.

Вступ

Рівняння Дірака понад 90 років (1928–2018) є одним з основних рівнянь теоретичної фізики. Його застосування вже давно вийшло далеко за межі квантової механіки, квантової теорії поля, атомної та ядерної фізики і фізики твердого тіла.

Влучний вивід того чи іншого рівняння математичної фізики є першим кроком до його успішного застосування, адже кожен такий вивід базується на фундаментальних математичних принципах і фізичних основах відповідної моделі фізичної реальності.

Вступ до розгляду рівняння Дірака станом на сьогодні налічує біля 30 різноманітних підходів лише до задачі виводу цього рівняння. Нижче ми представляємо основні положення 26 з них, у тому числі і три наші власні оригінальні виводи.

Мінімум необхідних позначень

Система одиниць $\hbar = c = 1$. Метрика $g = (g^{\mu\nu}) = (+ - - -)$, $a^{\mu} = g^{\mu\nu}a_{\nu}$, по індексу, що повторюється двічі, – сумування.

Рівняння Дірака для вільного поля:

$$(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\,\psi(x) = 0, \tag{1}$$

де $x \in \mathrm{M}(1,3)$, $\partial_{\mu} \equiv \partial/\partial x^{\mu}$, $\mu = \overline{0,3}$, $j = 1,2,3$; $\mathrm{M}(1,3) = \{x \equiv (x^{\mu}) = (x^0 = t,\ \overrightarrow{x} \equiv (x^j))\}$ – простір-час Мінковського, а 4-компонентна функція $\psi(x)$, взагалі кажучи, належить оснащеному простору Гільберта $\mathrm{S}^{3,4} \subset \mathrm{H}^{3,4} \subset \mathrm{S}^{3,4*}$. Тут $\mathrm{S}^{3,4}$ – простір основних функцій Шварца, а $\mathrm{S}^{3,4*}$ – простір узагальнених функцій Шварца. Зауважимо, що у квантово-механічних теоріях, де часова змінна відіграє роль параметра, слід використовувати саме простір $\mathrm{S}^{3,4} \subset \mathrm{H}^{3,4} \subset \mathrm{S}^{3,4*}$, однак у формалізмі явно коваріантної теорії поля оснащений простір Гільберта вибираємо у вигляді $\mathrm{S}^{4,4} \subset \mathrm{H}^{4,4} \subset \mathrm{S}^{4,4*}$. Матриці Дірака, які задовольняють антикомутаційним співвідношенням алгебри Кліффорда, вибираємо у представленні Дірака-Паулі

$$\gamma^0 = \begin{vmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ 0 & -\mathrm{I} \end{vmatrix}, \quad \gamma^{\ell} = \begin{vmatrix} 0 & \sigma^{\ell} \\ -\sigma^{\ell} & 0 \end{vmatrix}, \tag{2}$$

$$\ell = 1,2,3, \quad \gamma^{\mu}\gamma^{\nu} + \gamma^{\nu}\gamma^{\mu} = 2g^{\mu\nu},$$

де σ^{ℓ} – стандартні матриці Паулі.

Відомі і маловідомі підходи

Очевидно, що *перший вивід* належить самому *Полю Діраку*. Викладки легко знайти у статті Дірака 1928 р. і його монографії [1].

Ван дер Варден та Сакураї, див., наприклад, [2], доповнили формалізм виводу Дірака використанням додаткового співвідношення $(\overrightarrow{\sigma}\cdot\overrightarrow{p})(\overrightarrow{\sigma}\cdot\overrightarrow{p})=\overrightarrow{p}^2$ і, кінцево, факторизацією у вигляді $(p^0+\overrightarrow{\sigma}\cdot\overrightarrow{p})(p^0-\overrightarrow{\sigma}\cdot\overrightarrow{p})=m^2$.

Сучасного вигляду *факторизація оператора Клейна-Гордона* набуває у *Н.Н. Боголюбова та Д.В. Ширкова* [3]

$$\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m\right)\left(i\gamma^{\nu}\partial_{\nu}+m\right)=-\partial^{\alpha}\partial_{\alpha}+m^2, \tag{3}$$

де використано також антикомутаційні співвідношення алгебри Кліффорда (2).

Вивід рівняння Дірака з *варіаційного принципу* найменшої дії Ейлера-Лагранжа також легко знайти у [3].

У монографії Л. Райдера [4] (друге видання) дане рівняння отримано з *явно коваріантних трансформаційних властивостей 4-компонентного спінора*. Автори [5] стверджують, що зуміли суттєво покращити вивід Л. Райдера.

Вивід рівняння Дірака з *первісних геометричних властивостей простору часу і електрона* разом з широким обговоренням геометричних принципів побудови теорії електрона є основним змістом монографії Х. Келлера [6]. Використано ідеї висловлені ще у 1929 р. В.О. Фоком і Д.Д. Іваненко про геометричний сенс γ-матриць Дірака.

У рамках теоретико-групового підходу до фізики елементарних частинок рівняння Дірака слідує з *класифікації Баргмана-Вігнера елементарних частинок* довільної маси і спіна на основі незвідних представлень групи Пуанкаре, див., наприклад, [7]. Гамільтоніан Дірака відповідає незвідному представленню цієї групи, яке характеризується власними значеннями $m>0$ і $s=1/2$ відповідних операторів Казіміра.

Рівняння Дірака (1) є *частинним випадком рівняння Баргмана-Вігнера* [8] для полів довільного спіна. Нескладне виписування частинного випадку цього рівняння для спіна s=1/2 приводить $2s\cdot4$-компонентне рівняння Баргмана-Вігнера до 4-компонентного рівняння Дірака. Однак такий вивід рівняння Дірака є дещо умовним, адже рівняння Баргмана-Вігнера було введено в розгляд як $2s\cdot4$-компонентне узагальнення рівняння Дірака.

У відомій роботі Л. Фолді і С. Воутхайсена [9] легко побачити обернену до відомого одноіменного перетворення задачу – *вивід рівняння Дірака з канонічного рівняння Фолді-Воутхайсена*.

Інтригуючий вивід був запропонований *Річардом Фейнманом* (для випадку SO(1,1) алгебри з одним просторовим і одним часовим вимірами) і був сформульований як задача у його книзі з А. Гіббсом [10]. Цей підхід станом на сьогодні кількома авторами продовжено до загального випадку, коли інтеграл по траєкторії містить узагальнення обрізаної моделі Фейнмана на 3+1 просторово-часові виміри.

Несподівані нетрадиційні виведення

Мабуть першим тут слід згадати австрійського вченого Ганса Саллгофера (одного з учнів Ервіна Шредінгера), який довів твердження [11], що *матричне множення рівнянь електродинаміки Максвела у середовищі* (без струмів і зарядів) на вектор Паулі $\vec{\sigma}=(\sigma^1,\sigma^2,\sigma^3)$ *дає безмасове стаціонарне рівняння Дірака*. Не зупиняючись на цьому, а взявши свій результат за основу, він ввів у розгляд представлення (тут $\hbar\neq c\neq 1$)

$$\begin{aligned}\varepsilon\left(\overrightarrow{x}\right)&=1-\left(\Phi\left(\overrightarrow{x}\right)-mc^2\right)/\hbar\omega,\\ \mu\left(\overrightarrow{x}\right)&=1-\left(\Phi\left(\overrightarrow{x}\right)+mc^2\right)/\hbar\omega,\end{aligned} \tag{4}$$

для електричної і магнітної проникливостей середовища, $\Phi\left(\overrightarrow{x}\right)=-Ze^2/\left|\overrightarrow{x}\right|$ – зовнішнє кулонівське поле. У якості кінцевого результату в [12] формулу Зоммерфельда-Дірака для тонкої структури спектра водню було виведено з рівнянь Максвела у середовищі (4) (вперше після Дірака з принципово іншого рівняння і навіть без апелювання до квантово-механічних принципів). Таким чином, роботи [11,12] містять значно більше інформації, ніж просто вивід рівняння Дірака з рівнянь Максвела.

У роботі [13] показано, що релятивістське рівняння для частинок зі спіном 1/2 може бути отримано розширенням теорії стохастичних процесів на один крок за межі теорії комплексних мір. Введено в розгляд процеси на основі кватерніоних мір, а *рівняння Дірака виведено з рівняння Ланжевена для двозначних процесів*. Таким чином, запропоновано прямий вивід рівняння Дірака через кватерніонні міри.

Автор [14] виводить рівняння Дірака із *закону збереження струму спіна* 1/2. Вимога, що такий струм спіна 1/2 зберігається, приводить до однозначної фіксації Лоренц-інваріантного рівняння для релятивістського поля спіна 1/2. Якщо так, то чим виділений закон збереження спінового струму у порівнянні з іншими величинами, що зберігаються? Логічно очікувати успішних виводів рівняння Дірака і з інших законів збереження для спінорного поля. Нагадаємо, їх існує 10 лише внаслідок Пуанкаре-інваріантності рівняння Дірака, також відомо багато прихованих симетрій [15] цього рівняння, і додаткових, прихованих законів збереження [16], у тому числі і бозонних величин [17], що зберігаються. Зміст наших коментарів дещо применшує значення викладеного у [14] підходу.

У [18] представлено вивід рівняння Дірака з *основного рівняння процесу Пуассона* на основі аналітичного продовження. Виконано узагальнення на випадок руху частинки у зовнішньому полі. Показано, що таким чином узагальнене основне рівняння процесу Пуассона тісно зв’язане з трьохвимірним рівнянням Дірака у зовнішньому полі.

Суть методу, представленого у [19], полягає у виводі рівняння Дірака з *так званого релятивістського другого закону Ньютона*. Однак, для цього автор пропонує цілу низку своїх власних означень, понять і, навіть, спеціальних моделей. Побудовано формалізм, що зв’язує таку спеціальну форму релятивістської механіки з квантовою механікою. Вивід рівняння Дірака здійснено саме у рамках такого специфічного формалізму. Автор вводить у розгляд концепцію поля швидкостей, а рівняння Дірака виводить із відповідного польового рівняння. Очевидно, що якесь важливе досягнення тут складно очікувати. Таке враження, що автор [19] шукає узгодження свого підходу з добре апробованою моделлю Дірака.

Ще один *геометричний вивід рівняння Дірака* знаходимо у [20]. Автори розглядають частинку зі спіном 1/2, що рухається зі швидкістю світла у кубічній просторово-часовій гратці. Маса частинки спричинює перевертання багатокомпонентної хвильової функції на ділянках решітки. Починаючи з диференціального рівняння для випадку одного просторового і одного часового вимірів, автори узагальнюють підхід до вищих вимірів. Розглянуто також взаємодії з зовнішніми електромагнітним і гравітаційним полями. Відмічено, що ідея такого виведення ґрунтується на спостереженні Дірака, що оператори миттєвої швидкості ферміона зі спіном 1/2 мають власні значення $\pm c$. Зауважимо, що сьогодні цей факт розглядається як недолік квантово-механічної інтерпретації рівняння Дірака, який продемонстровано, пояснено і вперше подолано у [9]. На геометричний підхід Фока, Іваненко, Келлера [6] автори не посилаються, очевидно, що це різні підходи. Недоліком підходу [20] є апелювання до таких речей як швидкість $\pm c$ масивного ферміона.

Автори [21] пропонують *виводити рівняння Дірака з геодезичного рівняння*. Для цього використовується математичний інструмент бікватерніонів Гамільтона. Такий вивід є частиною розроблюваного авторами власного підходу, що базується на застосуванні теорії масштабної інваріантності, переформулюванні квантової механіки та специфічних уявлень про простір-час.

М. Еванс [22] запропонував власне загально коваріантне *польове рівняння для опису гравітації та електромагнетизму*, представив його у термінах спінора і отримав рівняння Дірака після переходу до плоского простору Евкліда.

Автор [23] спочатку визначає кожну власну функцію зв’язаної частки як специфічну суперпозицію плоских хвильових станів, що задовольняє усередненому енергетичному співвідношенню. Після цього рівняння Шредінгера і Дірака (у зовнішньому полі електромагнітного потенціалу) отримано як *однозначні умови, які хвильова функція повинна задовольняти в кожній точці*, щоб виконувалось відповідне рівняння для енергії.

Вивід рівняння Дірака представлений у [24] *фактично базується на факторизації оператора Клейна-Гордона* (3). По суті добавлено лише зовнішнє гравітаційне поле.

У роботі [25] рівняння Дірака виведено *на основі конформної диференціальної геометрії*. Встановлено, що рівняння Гамільтона-Якобі для частки може бути лінеаризовано, точно і в замкнутій формі, за допомогою анзацного розв'язку, який можна безпосередньо інтерпретувати як квантову хвильову функцію (4-спінор) рішення рівняння Дірака. Всі квантові ознаки виникають в результаті тонкої взаємодії між конформною кривизною, що діє на частинку як потенціал, і руху частинки, що впливає на таку геометричну потенціальність, пов'язану з конформною кривизною. В результаті рівняння Дірака виведено у вигляді: $D_+D_-\psi = D_-D_+\psi = 0, D_\pm \equiv \gamma^\mu(i\partial_\mu - eA_\mu) \pm m$.

Нещодавно в [26] було представлено виведення рівняння Дірака *з принципів обробки інформації*. Без застосування принципу відносності показано, як рівняння Дірака в трьох просторових вимірах слідує з широкомасштабної динаміки мінімального нетривіального квантового коміркового автомата, що задовольняє вимогам унітарності, локальності, однорідності і дискретної ізотропії. Рівняння Дірака має місце для малих хвильових векторів і інерційних мас, тоді як Лоренц-коваріантність зникає в ультрарелятивістській межі. Таким чином, автомат можна розглядати як модель, що уніфікує масштаби від Планка до Фермі.

Наш внесок

Коротко розглянемо три оригінальні виводи рівняння Дірака, які були запропоновані ужгородськими вченими.

I. Узагальнення виводу Г. Саллгофера

У роботі [27] ідея Г. Саллгофера [11] узагальнена на випадок нестаціонарного рівняння Дірака і представлена у рамках цілком іншого формалізму. Основне твердження полягає у наступному.

Рівняння Максвелла у термінах напруженостей $\overrightarrow{E}, \overrightarrow{H}$ електричного та магнітного полів (тут швидкість світла c, ε, μ – електрична і магнітна проникливості середовища) у вигляді

$$\begin{aligned} &\frac{\varepsilon}{c}\partial_0\overrightarrow{E} - \mathrm{curl}\overrightarrow{H} = 0, \quad \mathrm{div}\overrightarrow{E} = 0, \\ &\frac{\mu}{c}\partial_0\overrightarrow{H} + \mathrm{curl}\overrightarrow{E} = 0, \quad \mathrm{div}\overrightarrow{H} = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

слідують з рівняння Дірака $(m = 0)$, записаного наступним чином

$$\left[\overrightarrow{\alpha}\cdot\nabla - \begin{pmatrix} \varepsilon \mathrm{I}_2 & 0 \\ 0 & \mu \mathrm{I}_2 \end{pmatrix} \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right]\psi^{\mathrm{el}} = 0,$$

$$\overrightarrow{\alpha} = \gamma^0\overrightarrow{\gamma}, \tag{6}$$

$$\psi^{\mathrm{el}} = \mathrm{col}(iE^3, i(E^1 + iE^2), H^3, H^1 + iH^2).$$

З (5), (6) очевидно, що множина розв'язків рівнянь Максвелла (5) є підмножиною розв'язків рівняння Дірака (1) з $m = 0$. Тому обернене твердження про те, що рівняння Дірака (1) з $m = 0$ слідує з рівнянь Максвелла (5) не є настільки безпосереднім. Окрім того, що слід покласти $\varepsilon = \mu = 1$, необхідно також доповнити 4-компонентний вектор-стовпець ψ^{el} із (6), який містить 6 дійсних компонент, до стандартного 4-компонентного спінора Дірака, який містить 8 дійсних компонент. У [27] наведено також повний набір перетворень типу стовпця ψ^{el} із (6), число таких перетворень – вісім.

Робота [28] присвячена зв'язку вільних рівнянь Максвелла (5), коли $\varepsilon = \mu = 1$, з безмасовим рівнянням Дірака. У [28] досліджено співвідношення між такими характеристиками вільних рівнянь Максвелла та Дірака з $m = 0$, як лагранжеві підходи, закони збереження, симетрії та розв'язки. Г. Саллгофер [11] назвав свій результат як МДІ – Максвелл-Дірак ізоморфізм. Навіть з короткого розгляду вище, очевидно, що математичний ізоморфізм тут не має місце. Ми використовували такі терміни як зв'язки між рівняннями Максвелла та Дірака, взаємозв'язки, співвідношення між цими рівняннями. У огляді Х. Келлера [29] результати, представлені у [11, 27, 28], названо *відображенням формалізму Максвелла на формалізм Дірака*.

II. Вивід з рівнянь Максвелла у максимально симетричній формі

Нагадаємо, що Дж. К. Максвелл вивів систему рівнянь для опису електромагнітних явищ на основі узагальненого запису всіх відомих законів електродинаміки Фарадея, Ампера, Вебера і т.д., а також з принципу симетрії. По аналогії з ідеями Максвелла у [30] використовується можливо найбільш симетрична форма рівнянь Максвелла, що має 256 вимірну алгебру інваріантності [31]. Саме така система рівнянь Максвелла виявляється безпосередньо пов'язаною з безмасовим рівнянням Дірака [32].

Суть нашого твердження наступна.

Рівняння Максвелла з густинами струмів і зарядів градієнтного типу ($E^0,\ H^0$ – скалярні поля розмірності напруженостей)

$$\begin{aligned} &\partial_0\overrightarrow{E} = \mathrm{curl}\overrightarrow{H} - \mathrm{grad}E^0,\\ &\partial_0\overrightarrow{H} = -\mathrm{curl}\overrightarrow{E} - \mathrm{grad}H^0,\\ &\mathrm{div}\overrightarrow{E} = -\partial_0 E^0, \quad \mathrm{div}\overrightarrow{H} = -\partial_0 H^0, \end{aligned} \qquad (7)$$

безпосередньо слідують з рівняння Дірака (1) (при $m = 0$) внаслідок підстановки в $i\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x) = 0$ вектора-стовпця

$$\psi = \begin{vmatrix} E^3 + iH^0 \\ E^1 + iE^2 \\ iH^3 + E^0 \\ -H^2 + iH^1 \end{vmatrix}, \qquad (8)$$

а рівняння Дірака (1) (з $m = 0$) безпосередньо слідує з рівнянь Максвелла (7) внаслідок оберненого перетворення і заміни у (8) вісімки фіксованих електромагнітних функцій $(\overrightarrow{E},\ \overrightarrow{H},\ E^0,\ H^0)$ на вісім довільних дійсних компонент 4-спінора Дірака ($m = 0$).

На відміну від формалізму з пункту I цього розділу, тут маємо взаємнооднозначну відповідність між розв'язками рівнянь Максвелла (7) і рівняння Дірака (1) (з $m = 0$), що суттєво спрощує вивід останнього. Про Бозе-симетрії безмасового рівняння Дірака та Фермі-симетрії рівнянь Максвелла (7), а також про інші споріднені результати, див. [30–32].

III. Вивід рівняння Дірака для спінорного поля з релятивістської квантової механіки дублета ферміон-антиферміон спінів $s = 1/2$.

Релятивістське квантово-механічне рівняння руху дублета ферміон-антиферміон спінів s=1/2 має вигляд:

$$i\partial_t f(x) = \sqrt{m^2 - \Delta}f(x), \quad f = \begin{vmatrix} f^1 \\ f^2 \\ f^3 \\ f^4 \end{vmatrix}, \qquad (9)$$

Модель фізичної реальності, яка базується на цьому рівнянні, розглядуваному у оснащеному просторі Гільберта $\mathrm{S}^{3,4} \subset \mathrm{H}^{3,4} \subset \mathrm{S}^{3,4*}$, ми називаємо релятивістською канонічною квантовою механікою розглядуваного дублета, оскільки воно безпосередньо пов'язане із релятивістським співвідношенням між енергією, імпульсом та масою частинки. Саме рівняння (9) та його узагальнення на спіновий дублет частинка-античастинка довільної розмірності ми запропонували називати [33] рівнянням Шредінгера-Фолді. Однокомпонентне рівняння (9), див., наприкдад, [34], називають також безспіновим рівнянням Салпітера або рівнянням процесу Леві [35]. Детальніше про рівняння (9) та про релятивістську канонічну квантову механіку див. у [36].

Наше твердження наступне.

Рівняння Дірака з відмінною від нуля масою записане у формі Гамільтона

$$i\partial_0\psi(x) = (\gamma^0\overrightarrow{\gamma}\cdot\overrightarrow{p} + \gamma^0 m)\psi(x)$$

слідує з рівняння (9) у результаті операторного перетворення, яке задається продовженим оператором Фолді-Воутхайсена V для операторів у антиермітовій формі

$$\begin{aligned} V(\partial_0 + i\omega)V^{-1} = \partial_0 + i(\gamma^0\overrightarrow{\gamma}\cdot\overrightarrow{p} + \gamma^0 m),\\ \psi^{\mathrm{Dirac}}(x) = Vf^{\mathrm{Sr-Foldy}}(x), \end{aligned} \qquad (10)$$

де $\omega = \sqrt{-\Delta + m^2} = \sqrt{\overrightarrow{p}^2 + m^2}$. Оператор V має вигляд:

$$V = \frac{i\gamma^\ell\partial_\ell+\omega+m}{\sqrt{2\omega(\omega+m)}}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C \end{vmatrix}, \quad V^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C \end{vmatrix}\frac{-i\gamma^\ell\partial_\ell+\omega+m}{\sqrt{2\omega(\omega+m)}},$$

і задовольняє умовам $VV^{-1} = V^{-1}V =$ I. Тут оператор комплексного спряження $C\psi^1 = \psi^{1*}$, (оператор інволюції у просторі Гільберта H^{3,1}). Обернене до (10) перетворення також справедливе і переводить рівняння Дірака для вільного спінорного поля у рівняння (9) релятивістської канонічної квантової механіки для дублету ферміон-антиферміон спінів $s = 1/2$.

Висновки

Представлено оригінальні дослідження такої важливої задачі сучасної теоретичної фізики як вивід рівняння Дірака. Продемонстровано найрізноманітніші підходи і апелювання до незалежних математичних формалізмів, зокрема, виведення рівняння Дірака з принципів обробки інформації, або отримання цього рівняння на основі конформної диференціальної геометрії (всього 26 різних методів).

Відмічено суттєвий внесок у дану проблематику вчених з Ужгорода, а саме: узагальнення виводу Г. Саллгофера, або відображення формалізму Максвелла на формалізм Дірака; отримання безмасового рівняння Дірака з рівнянь Максвелла у максимально симетричній формі; вивід рівняння Дірака з ненульовою масою з релятивістської квантової механіки дублета ферміон-антиферміон спінів s=1/2. Наявність великої кількості різних методів виводу рівняння Дірака свідчить про важливу роль цього рівняння у фізиці сьогодення.

Виконаний аналіз дає можливість порівняти різні методи виведення рівняння Дірака. Можливо найпростішим є представлений у [3] підхід на основі старту з рівняння Клейна-Гордона. Але такий вивід перестає бути простим, якщо для початку обосновувати саме рівняння Клейна-Гордона. Цікавіше порівнювати фундаментальність різних виводів, їх фізичне та філософське значення. Тоді слід згадати [33], де рівняння Дірака виведено з релятивістської канонічної механіки дублета ферміон-антиферміон, яка є більш фундаментальною моделлю фізичної реальності ніж модель Дірака спінорного поля на класичному рівні. Однак найфундаментальнішим, бесперечно, є вивід рівняння Дірака з принципу найменшої дії Ейлера-Лагранжа у застосуванні до класичного поля спінорів.

Автори сподіваються, що стаття викличе інтерес не лише науковців, але й викладачів вузів, які готують лекції з квантової механіки та квантової теорії поля, знадобиться аспірантам та студентам-старшокурсникам для поглибленого вивчення методів сучасної теоретичної фізики.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

[1] Dirac P.A.M. The principles of quantum mechanics / P.A.M. Dirac. – Oxford: Clarendon Press, 1958. – 314 p.

[2] Sakurai J. Advanced quantum mechanics / J. Sakurai. – New York: Addison-Wesley Pub. Co, 1967. – 335 p.

[3] Bogoliubov N.N. Introduction to the theory of quantized fields / N.N. Bogoliubov N.N., D.V. Shirkov. – New York: John Wiley and Sons Inc., 1980. – 620 p.

[4] Ryder L. Quantum field theory / L. Ryder Cambridge: Cambridge University Press, 1996. – 487 p.

[5] Gaioli F. Some remarks about intrinsic parity in Ryder's derivation of the Dirac equation / F. Gaioli, E. Alvarez // American Journal of Physics. – 1995. – V. 63, № 2. – P. 177–178.

[6] Keller J. Theory of the electron. A theory of matter from Start / J. Keller. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2001. – 257 p.

[7] Wightman A. Analytic functions of several complex variables // Dispersion relations and elementary particles, eds. C. DeWitt, R. Omnes / A. Wightman. – New York: John Wiley and Sons Inc., 1960. – P. 159–221.

[8] Bargman V. Group theoretical discussion of relativistic wave equations / V. Bargman, E.P. Wigner // Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA. – 1948. – V. 34, № 5. – P. 211–223.

[9] Foldy L.L. On the Dirac theory of spin 1/2 particles and its non-relativistic limit. / L.L. Foldy, S.A. Wouthuysen // Physical Review. – 1950. – V. 78, № 1. – P. 29–43.

[10] Feynman R.P. Quantum Mechanics and Path Integrals / R.P. Feynman, A.R. Hibbs. – New York: McGraw-Hill, 1965. – 365 p.

[11] Sallhofer H. Elementary derivation of the Dirac equation X / H. Sallhofer // Zeitschrift für Naturforschung. – 1986. – V. A41, № 3. – P. 468–470.

[12] Sallhofer H. Hydrogen in electrodynamics VI, The general solution / H. Sallhofer H // Zeitschrift für Naturforschung. – 1990. – V. A45, № 11–12. – P. 1361–1366.

[13] Strinivasan S. Direct derivation of the Dirac equation via quaternion measures / S. Strinivasan, E.A. Sudarshan // Journal of Physics. – 1996. – V. A29, № 16. – P. 5181–5186.

[14] Lerner L. Derivation of the Dirac equation from a relativistic representation of spin / L. Lerner // European Journal of Physics. – 1996. – V. 17, № 4. – P. 172–175.

[15] Krivsky I.Yu. Fermi-Bose duality of the Dirac equation and extended real Clifford-Dirac algebra / I.Yu. Krivsky, V.M.Simulik // Condenced Matter Physics. – 2010. – V. 13, № 4. – P. 43101(1–15).

[16] Simulik V.M. Lagrangian for the spinor field in the Foldy-Wouthuysen representation / V.M. Simulik, I.Yu. Krivsky, I.L. Lamer // International Journal of Theoretical and Mathematical Physics. – 2013. – V. 3, № 4. – P. 109–116.

[17] Simulik V.M. Bosonic symmetries, solutions and conservation laws for the Dirac equation with nonzero mass / V.M. Simulik, I.Yu. Krivsky, I.L. Lamer // Ukrainian Journal of Physics. – 2013. – V. 58, № 6. – P. 523–533.

[18] Kubo T. A derivation of the Dirac equation in an external field based on the Poisson process / T. Kubo, I. Ohba, H. Nitta // Physics Lettets. – 2001. – V. A286, № 4. – P. 227–230.

[19] Cui H. A method deriving the Dirac equation from the relativistic Newton's second law [Електронний ресурс] / H. Cui. // arXiv:quant-ph/0102114. – 2001. – 4 p. – Режим доступу: https://arxiv.org/abs/quant-ph/0102114.

[20] Ng Y.J. A geometrical derivation of the Dirac equation / Y.J. Ng, H. van Dam // Physics Letters. – 2003. – V. 309, № 5–6. – P. 335–339.

[21] Calerier M. A scale relativistic derivation of the Dirac equation /M. Calerier, L. Nottale // Electromagnetic Phenomena. – 2003. – V. 3, № 1(9). – P. 70–80.

[22] Evans M. Derivation of Dirac's equation from the Evans wave equation / M. Evans // Foundation of Physics Letters. – 2004. – V. 17, № 2. – P. 149–166.

[23] Efthimiades S. Physical meaning and derivation of Schrodinger and Dirac equations [Електронний ресурс] / S. Efthimiades // arXiv:quant-ph/0607001. – 2006. – 8 p. – Режим доступу: https://arxiv.org/abs/quant-ph/0607001.

[24] Arminjon M. Dirac equation from the Hamiltonian and the case with a gravitational field / M. Arminjon // Foundation of Physics Letters. – 2006. – V. 19, № 3. – P. 225–247.

[25] Santamato E. Derivation of the Dirac equation by conformal differential geometry / E. Santamato, F. de Martini // Foundation of Physics. – 2013. – V. 43, № 5. – P. 631–641.

[26] D'Ariano G.M. Derivation of the Dirac equation from principles of information processing / G.M. D'Ariano, P. Perinotti // Physical Review. – 2014. – V. A90, № 6. – P. 062106(1–18).

[27] Simulik V.M. Some algebraic properties of Maxwell-Dirac isomorphism / V.M. Simulik // Zeitschrift für Naturforschung. – 1994. – V. A49, № 11. – P. 1074–1076.

[28] Simulik V.M. Connection between the symmetry properties of the Dirac and Maxwell equations. Conservation laws / V.M. Simulik V.M. // Theoretical and Mathematical Physics. – 1991. – V. 87, № 1. – P. 386–393.

[29] Keller J. On the electron theory / J. Keller // Advances in Applied Clifford Algebras. – 1997. – V. 7, № Special. – P. 3–26.

[30] Simulik V.M. Slightly generalized Maxwell classical electrodynamics can be applied to inneratomic phenomena / V.M. Simulik, I.Yu. Krivsky // Annales de la Fondation Louis de Broglie. – 2002. – V. 27, № 2. – P. 303–328.

[31] Simulik V.M. Relationship between the Maxwell and Dirac equations: symmetries, quantization, models of atom / V.M. Simulik, I.Yu. Krivsky // Reports on Mathematical Physics. – 2002. – V. 50, № 3. – P. 315–328.

[32] Simulik V.M. Classical electrodynamical aspect of the Dirac equation / V.M. Simulik, I.Yu. Krivsky // Electromagnetic Phenomena. – 2003. – V. 3, № 1(9). – P. 103–114.

[33] Simulik V.M. Quantum-mechanical description of the fermionic doublet and its link with the Dirac equation / V.M. Simulik, I.Yu. Krivsky // Ukrainian Journal of Physics. – 2013. – V. 58, № 12. – P. 1192–1203.

[34] Simulik V.M. Derivation of the Dirac and Dirac-like equations of arbitrary spin from the corresponding relativistic canonical quantum mechanics / V.M. Simulik // Ukrainian Journal of Physics. – 2015. – V. 60, № 10. – P.985–1006.

[35] Simulik V.M. Link between the relativistic canonical quantum mechanics of arbitrary spin and the corresponding field theory / V.M. Simulik // Journal of Physics: Conference Series. – 2016. – V. 670. – P. 012047(1–14).

[36] Simulik V.M. Relativistic wave equations of arbitrary spin in quantum mechanics and field theory, example spin $s = 2$ / V.M. Simulik // Journal of Physics: Conference Series. – 2017. – V. 804. – P. 012040(1–10).

Стаття надійшла до редакції 09.07.2019

Uzhhorod University Scientific Herald. Series Physics. Issue 45. — 2019

В. М. Симулик[1], Т. М. Заяц[2]

[1]Институт электронной физики НАН Украины, 88017, Ужгород, ул. Университетская, 21, Украина,
e-mail: vsimulik@gmail.com
[2] Ужгородский национальный университет, инженерно-технический факультет, кафедра
электронных систем, 88000, Ужгород, ул. Капитульная, 13, Украина,
e-mail: taras.zajac@uzhnu.edu.ua

РАЗНООБРАЗИЕ ПОДХОДОВ К ВОПРОСУ О ВЫВОДЕ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА

Представлено 26 вариантов вывода уравнения Дирака, которые основываются на разных физических принципах и математических формализмах. Приведено три оригинальные подходы авторов к решению этой задачи: обобщение вывода Г. Саллгофера, получение безмассового уравнения Дирака из уравнений Максвелла в максимально симметричной форме, вывод уравнения Дирака с ненулевой массой из релятивистской квантовой механики дублета фермион-антифермион спинов $s = 1/2$. Положено начало демонстрации роли уравнения Дирака в современной теоретической физике.

Ключевые слова: уравнение Дирака, спинорное поле, квантовая механика, теория поля.

V. M. Simulik[1], T. M. Zajac[2]

[1]Institute of Electron Physics, NAS of Ukraine, 88017, Uzhhorod, 21 Universitetska Str., Ukraine,
e-mail: vsimulik@gmail.com
[2]Uzhhorod National University, Engineering-Technical Faculty, Department of Electronic Systems, 88000,
Uzhhorod, 13 Kapitulna Str., Ukraine,
e-mail: taras.zajac@uzhnu.edu.ua

THE VARIETY OF APPROACHES TO THE PROBLEM OF THE DERIVATION OF DIRAC EQUATION

Purpose. The Dirac equation is one of the fundamental equations of modern theoretical physics. It is in service more than 90 years (1928–2018). The application today is much wider than the areas of quantum mechanics, quantum field theory, atomic and nuclear physics, solid state physics. The successful derivation of some equation of mathematical physics is the first step to successful application. In such process the essence of the corresponding model of nature, the mathematical principles and the physical foundations are visualized. Here we deal with the different approaches to the problem of the Dirac equation derivation.
Methods. The quantum-mechanical, quantum field-theoretical, group-theoretical, algebraic, symmetrical, statistical, stochastical and numerical approaches are used.
Results. The 26 different ways of the Dirac equation derivation are presented. The various physical principles and mathematical formalisms are used. Three original approaches of the authors to the problem are given. They are (i) the generalization of H. Sallhofer derivation, (ii) the obtaining of the massless Dirac equation from the Maxwell equations in maximally symmetrical form, (iii) the derivation of the Dirac equation with nonzero mass from the relativistic quantum mechanics of the fermion-antifermion spin $s = 1/2$ doublet. In some sense the role of the Dirac equation today is demonstrated.
Conclusions. The original investigation of the problem of the Dirac equation derivation is presented. The different approaches, which are based on the various mathematical and physical principles, are considered (26 methods). The

role of the scientists from Uzhhorod is shown. The importance of place of the Dirac equation in modern theoretical physics is discussed.

Keywords: the Dirac equation, spinor field, quantum mechanics, field theory.

REFERENCES

[1] Dirac, P.A.M. (1958), The principles of quantum mechanics. 4-th ed., Clarendon Press, Oxford, 314 p.

[2] Sakurai, J. (1967), Advanced quantum mechanics. Addison-Wesley Publishing Company, New York, 335 p.

[3] Bogoliubov, N.N., Shirkov, D.V. (1980), Introduction to the theory of quantized fields. John Wiley and Sons Inc., New York, 620 p.

[4] Ryder, L. (1996), Quantum field theory. 2-nd ed., University Press, Cambridge, 487 p.

[5] Gaioli, F., Alvarez, E. (1995), «Some remarks about intrinsic parity in Ryder’s derivation of the Dirac equation», American Journal of Physics, V. 63, No. 2, pp. 177–178.

[6] Keller, J. (2001), Theory of the electron. A theory of matter from Start. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 257 p.

[7] Wightman, A. (1960), «Analytic functions of several complex variables», Dispersion relations and elementary particles, John Wiley and Sons Inc., New York, p. 159–221.

[8] Bargman, V., Wigner, E.P. (1948), «Group theoretical discussion of relativistic wave equations», Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA, V. 34, No. 5, pp. 211–223.

[9] Foldy, L.L., Wouthuysen, S.A. (1950), «On the Dirac theory of spin 1/2 particles and its non-relativistic limit», Physical Review, V. 78, No. 1, pp. 29–43.

[10] Feynman, R.P., Hibbs, A.R. (1965), Quantum Mechanics and Path Integrals. McGraw-Hill, New York, 365 p.

[11] Sallhofer, H. (1986), «Elementary derivation of the Dirac equation X», Zeitschrift für Naturforschung, V. A41, No. 3, pp. 468–470.

[12] Sallhofer, H. (1990), «Hydrogen in electrodynamics VI, The general solution», Zeitschrift für Naturforschung, V. A45, No. 11–12, pp. 1361–1366.

[13] Strinivasan, S., Sudarshan, E. (1996), «A direct derivation of the Dirac equation via quaternion measures», Journal of Physics, V. A29, No. 16, pp. 5181–5186.

[14] Lerner, L. (1996), «Derivation of the Dirac equation from a relativistic representation of spin», European Journal of Physics, V. 17, No. 4, pp. 172–175.

[15] Krivsky, I.Yu., Simulik, V.M. (2010), «Fermi-Bose duality of the Dirac equation and extended real Clifford-Dirac algebra», Condenced Matter Physics, V. 13, No. 4, pp. 43101(1–15).

[16] Simulik, V.M., Krivsky, I.Yu., Lamer, I.L. (2013), «Lagrangian for the spinor field in the Foldy-Wouthuysen representation», International Journal of Theoretical and Mathematical Physics, V. 3, No. 4, pp. 109–116.

[17] Simulik, V.M., Krivsky, I.Yu., Lamer, I.L. (2013), «Bosonic symmetries, solutions and conservation laws for the Dirac equation with nonzero mass», Ukrainian Journal of Physics, V. 58, No. 6, pp. 523–533.

[18] Kubo, T., Ohba, I., Nitta, H. (2001), «A derivation of the Dirac equation in an external field based on the Poisson process», Physics Lettets, V. A286, No. 4, pp. 227–230.

[19] Cui, H. (2001), «A method for deriving the Dirac equation from the relativistic Newton's second law», arXiv:quant-ph/0102114, available at: https://arxiv.org/abs/quant-ph/0102114

[20] Ng, Y.J., van Dam, H. (2003), «A geometrical derivation of the Dirac equation», Physics Letters, V. 309, No. 5–6, 335–339.

[21] Calerier, M., Nottale, L. (2003), «A scale relativistic derivation of the Dirac equation», Electromagnetic Phenomena, V. 3, No. 1(9), pp. 70–80.

[22] Evans, M. (2004), «Derivation of Dirac's equation from the Evans wave equation», Foundation of Physics Letters, V. 17, No. 2, pp. 149–166.

[23] Efthimiades, S. (2006), «Physical meaning and derivation of Schrodinger and Dirac equations», arXiv:quant-ph/0607001, available at: https://arxiv.org/abs/quant-ph/0607001

[24] Arminjon, M. (2006), «Dirac equation from the Hamiltonian and the case with a gravitational field», Foundation of Physics Letters, V. 19, No. 3, pp. 225–247.

[25] Santamato, E., de Martini, F. (2013), «Derivation of the Dirac equation by conformal differential geometry», Foundation of Physics, V. 43, No. 5, pp. 631–641.

[26] D'Ariano, G.M., Perinotti, P. (2014), «Derivation of the Dirac equation from principles of information processing», Physical Review, V. A90, No. 6, pp. 062106(1-18).

[27] Simulik, V.M. (1994), «Some algebraic properties of Maxwell-Dirac isomorphism», Zeitschrift für Naturforschung, V. A49, No. 11, pp. 1074–1076.

[28] Simulik, V.M. (1991), «Connection between the symmetry properties of the Dirac and Maxwell equations. Conservation laws», Theoretical and Mathematical Physics, V. 87, No. 1, pp. 386–393.

[29] Keller, J. (1997), «On the electron theory», Advances in Applied Clifford Algebras, V. 7, No. Special, pp. 3–26.

[30] Simulik, V.M., Krivsky, I.Yu. (2002), «Slightly generalized Maxwell classical electrodynamics can be applied to inneratomic phenomena», Annales de la Fondation Louis de Broglie, V. 27, No. 2, pp. 303–328.

[31] Simulik, V.M., Krivsky, I.Yu. (2002), «Relationship between the Maxwell and Dirac equations: symmetries, quantization, models of atom», Reports on Mathematical Physics, V. 50, No. 3, pp. 315–328.

[32] Simulik, V.M., Krivsky, I.Yu. (2003), «Classical electrodynamical aspect of the Dirac equation», Electromagnetic Phenomena, V. 3, No. 1(9), pp. 103–114.

[33] Simulik, V.M., Krivsky, I.Yu. (2013), «Quantum-mechanical description of the fermionic doublet and its link with the Dirac equation», Ukrainian Journal of Physics, V. 58, No. 12, pp. 1192–1203.

[34] Simulik, V.M. (2015) «Derivation of the Dirac and Dirac-like equations of arbitrary spin from the corresponding relativistic canonical quantum mechanics», Ukrainian Journal of Physics, V. 60, No. 10, pp. 985–1006.

[35] Simulik, V.M. (2016), «Link between the relativistic canonical quantum mechanics of arbitrary spin and the corresponding field theory», Journal of Physics: Conference Series, V. 670, pp. 012047(1–14).

[36] Simulik, V.M. (2017), «Relativistic wave equations of arbitrary spin in quantum mechanics and field theory, example spin s=2», Journal of Physics: Conference Series, V. 804, pp. 012040(1–10).