Сучасний стан наукових досліджень та технологій в промисловості. 2021. № 1 (15) *ISSN 2522-9818 (print)* *ISSN 2524-2296 (online)*

УДК 519.237 DOI: https://doi.org/10.30837/ITSSI.2021.15.141

Л. Г. Раскін, О. В. Сіра, Ю. Л. Парфенюк

УПРАВЛІННЯ ПРОПУСКНИМИ ЗДАТНОСТЯМИ ПРОМІЖНИХ ПУНКТІВ У РОЗГАЛУЖЕНІЙ ТРАНСПОРТНІЙ МЕРЕЖІ

Предмет. Розглянуто важливий для практики окремий випадок транспортної задачі з проміжними пунктами, коли пропускні здатності цих пунктів не задані. **Ціль.** Сформульована задача відшукання невідомого розподілення пропускних здатностей проміжних пунктів, котре мінімізує сумарні транспортні витрати. **Задачі.** Постановка задачі управління пропускними здатностями проміжних пунктів у триаксіальній транспортній задачі. Розроблений метод має високу швидкодію за рахунок використання структурної декомпозиції задачі. Метод має невисоку обчислювальну складність, що є вагомою перевагою для практичного застосування. **Метод.** Запропоновано два методи розв'язання задачі. Перший реалізує ітераційну процедуру поліпшення початкового плану для двоїстої моделі початкової задачі. Обчислювальна схема на кожній ітерації є двокроковою. На першому кроці ітерації вирішується координуюча задача, вирішення якої задає черговий набір значень пропускних спроможностей проміжних пунктів. На другому кроці цей набір використовується для вирішення початкової транспортної задачі. Отримане в результаті рішення перевіряється на оптимальність. Якщо воно не оптимальне, то виконується перехід до чергової ітерації. Для реалізації запропонованої обчислювальної схеми використаний метод оптимізації нульового порядку Нелдера-Міда. **Результати.** Доведено можливість конструктивного використання цього методу з огляду на велику кількість обмежень транспортного типу. З метою спрощення технології вирішення транспортних задач на кожній ітерації алгоритму введені їх двоїсті моделі. У зв'язку з тим, що обчислювальна складність запропонованого методу швидко зростає зі збільшенням числа проміжних пунктів, запропонований простий наближений альтернативний метод розв'язання задачі. Висновки. Запропонований метод вирішує завдання розрахунку пропускної здатності проміжних пунктів в системі "виробництво – доставка – споживання".

Ключові слова: транспортна задача з проміжними пунктами; пропускні спроможності пунктів не задані; методи вирішення.

Вступ

Задача управління поставками в розгалужених транспортних мережах є однією з найбільш наукоємних в комплексі проблем логістики - загальної теорії керування потоками. Методи вирішення завдань управління рухом товарів формулюються в термінах теорії лінійного програмування.

При цьому, в залежності від особливостей системи "виробництво - доставка - споживання" вирішуються різноманітні завдання з планування і організації перевезень. Формулювання і рішення цих задач враховують продуктивність і розміщення пунктів виробництва, техніко-економічні можливості різних видів транспорту, розміщення і обсяги потреб продукту в пунктах споживання, вартості перевезень і т.д. Математична модель канонічної транспортної задачі має ряд специфічних особливостей в порівнянні із загальним завданням лінійного програмування. По-перше, транспортна задача є двухіндексної, тому шукане рішення завдання - не вектор, а матриця. По-друге, в системі обмежень задачі кожна змінна зустрічається рівно два рази, а самі обмеження накладаються на суми змінних в рядках і стовбцях матриці змінних. Для вирішення транспортних завдань використовується метод потенціалів - це спеціальна модифікація симплекс-методу, розробленого для загальної задачі лінійного програмування. Метод потенціалів, алгоритм і обчислювальна процедура його реалізації складніше симплекс-методу внаслідок двухіндексності транспортної задачі.

Канонічна модель, що задає метод вирішення транспортних завдань широко використовується в практиці організації та управління перевезеннями. Разом з тим, якщо в реальній задачі транспортуються товари широкої номенклатури, призначені для задоволення потреб сотень споживачів, то канонічна модель транспортної задачі ускладнюється. При доставці багатономенклатурної продукції з'являється необхідність в проведенні додаткових операцій: контейнеризація, пакетування, підгрупу партій вантажів, сортування і т.д. У зв'язку з цим на маршрутах прямування вантажів доцільно створювати проміжні пункти - великі розподільні складські бази. Реалізація цієї ідеї призводить до трехіндексності моделі транспортної задачі.

Ускладнення моделі призводить до істотного ускладнення алгоритму та обчислювальної схеми виконання завдання. Радикальне спрощення трехіндексної моделі досягається, якщо фіксувати пропускні спроможності проміжних пунктів. При цьому, як буде показано далі, рішення вихідної трехіндексної завдання зводиться до послідовного розв'язання пари двухіндексних задач. Принциповий недолік цього підходу – відсутність обґрунтування вибору значень пропускних здатностей проміжних пунктів. Зрозуміло, що невдалий вибір цих значень може призвести до не прогнозовано великих втрат. Ця обставина робить актуальною проблему розробки точного і прийнятного за складністю методу вирішення трехіндексних завдань при знятих обмеження на пропускні спроможності пунктів, що і визначає мету дослідження. Для досягнення сформульованої мети необхідно вирішити такі завдання:

- розробити метод відшукання набору значень пропускних спроможностей проміжних пунктів, що забезпечує мінімальні сумарні витрати на транспортування;

ISSN 2522-9818 (print)
ISSN 2524-2296 (online) Innovative technologies and scientific solutions for industries. 2021. No. 1 (15)

- розробити просту (в порівнянні з методом потенціалів) обчислювальну процедуру, що реалізує запропонований метод

Постановка задачі

Математична модель канонічної транспортної задачі має вигляд [1-6]

$$L(X)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\to\min, \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{m}x_{ij}=a_i,\ \ i=1,2,...,m, \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_{ij}=b_j,\ \ j=1,2,...,n, \quad (3)$$

$$x_{ij}\ge 0,\ \ i=1,2,...,m,\ \ j=1,2,...,n \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^{n}a_i=\sum_{i=1}^{n}b_j, \quad (5)$$

де, i – номер постачальника; j – номер споживача; a_i - обсяг виготовленого продукту i-м виробником, $i=1,2,...,m$; b_j – обсяг попиту на продукт j-м споживачем, $j=1,2,...,n$; c_{ij} – вартість перевезення одиниці продукту от i-го постачальника до j-го споживача; x_{ij} – запланований обсяг транспортування від i-го постачальника до j-го споживача.

Співвідношення (2), (3) забезпечують задоволення вимог до плану перевезення, а формула (1) задає критерій оптимальності задачі - сумарна вартість перевезення.

Для вирішення отриманої двухіндексної транспортної задачі застосовується метод потенціалів, який є спеціальною модифікацією симплекс-методу, розробленого для вирішення загальної задачі лінійного програмування [7].

Якщо кількість споживачів велика (в рази перевищує кількість постачальників), то ефективна можливість знизити транспортні витрати і час на доставку товару приводить нас до ідеї створення додаткових (проміжних) пунктів. Математична модель задачі у такому випадку ускладнюється - вона стає трехіндексної.

Постановка цього завдання має наступний вигляд [8-10]. Маємо m пунктів поставки товару і заданий набір $(a_1,a_2,...,a_m)$, визначає розподіл товару по постачальниках; є n пунктів споживання цього товару і заданий набір $(b_1,b_2,...,b_n)$, задає їх потреби; є ℓ пунктів, які використовуються як проміжні центри (склади) і заданий набір $(d_1,d_2,...,d_e)$, який обмежує їх пропускні спроможності. Крім того, задана матриця вартостей $C=(c_{ijk})$, де, c_{ijk} – вартість перевезення одиниці товару від i-го постачальника до j-го споживача через k-й проміжний пункт.

Далі вводитися матриця $X=(x_{ijk})$, де, x_{ijk} – кількість вантажу, призначене для перевезення товару від i-го постачальника до j-го споживача через k-й проміжний пункт.

Завдання полягає в відшуканні матриці $X=(x_{ijk})$, що мінімізує сумарну вартість перевезень

$$L(X)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{\ell}c_{ijk}x_{ijk} \quad (6)$$

що задовольнятиме системі обмежень

$$\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{n}x_{ijk}=a_i\ ,\ \ i=1,2,...,m, \quad (7)$$

$$\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{i=1}^{m}x_{ijk}=b_j\ ,\ j=1,2,...,n. \quad (8)$$

$$x_{ijk}\ge 0,\ i=1,2,...,m,\ j=1,2,...,n,\ k=1,2,...,\ell. \quad (9)$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_{ijk}\le d_k,\ \ k=1,2,...,\ell. \quad (10)$$

При цьому звичайна двухіндексна транспортна задача перетворюється до трехіндексної [11]. Відповідно до поставленої мети потрібно розробити метод розв'язання задачі (6) – (9), більш ефективний, ніж метод потенціалів.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Методам вирішення й можливості реального використання класичних транспортних задач присвячена велика кількість робіт, наприклад [1-5]. Вперше коректна математична модель для транспортної задачі лінійного програмування була запропонована в [6]. Далі ця модель багаторазово обговорювалася в канонічній двухіндексної постановці. Мабуть, перша згадка про можливість узагальнення класичної задачі на випадок великої кількості індексів зроблено в [7]. Метод рішення трехіндексної задачі запропоновано в [8], а обґрунтований в [9]. Надалі трехіндексна задача з обмеженнями у вигляді подвійних сум розглядається в роботах [10-14].

При цьому детально аналізується метод потенціалів і формується ідея спрощення задачі з проміжними пунктами при фіксації їх пропускних спроможностей. В [15] запропоновано рекурентна процедура побудови початкового плану в трехіндексній задачі. На жаль, ця процедура занадто трудомістка, так як перевірка конструктивності плану вимагає великої кількості обчислень. Слід зазначити, що у всіх відомих роботах передбачається, що для вирішення багатоіндексних завдань буде використаний метод потенціалів. У зв'язку з цим формулюються рекомендації щодо обмеження

ISSN 2522-9818 (print)
Сучасний стан наукових досліджень та технологій в промисловості. 2021. № 1 (15) ISSN 2524-2296 (online)

розмірності задачі ($N=mne$, m – число постачальників, n – число споживачів, e – число проміжних пунктів). Таким чином, короткий аналіз відомих робіт виявляє пробіл, пов'язаний з відсутністю практично реалізованих, простих методів вирішення багатоіндексних транспортних завдань (зокрема задач з проміжними пунктами, пропускні спроможності яких не задані), мотивуючий продовження досліджень.

Матеріали та методи

Якщо у вихідній задачі обмеження (10) формулюються як рівності і виконуються умови балансу:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{k=1}^{\ell} d_k , \tag{11}$$

то трехіндексна задача (6) – (10) розпадається на дві незалежні двухіндексні задачі [11–13].

Задача А. Знайти набір $X_1 = (x_{ik})$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $k = 1, 2, \ldots, \ell$, мінімізуючий

$$L_A(X_1) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{\ell} c_{ik} x_{ik} \tag{12}$$

та задовольняючий обмеженням

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ik} = d_k , \quad k = 1, 2, \ldots, \ell , \tag{13}$$

$$\sum_{k=1}^{l} x_{ik} = a_i , \quad i = 1, 2, \ldots, m , \tag{14}$$

$$x_{ik} \ge 0 , \quad i = 1, 2, \ldots, m , \quad k = 1, 2, \ldots, \ell . \tag{15}$$

Задача Б. Знайти набір $X_2 = (x_{kj})$, $k = 1, 2, \ldots, \ell$, $j = 1, 2, \ldots, n$, мінімізуючий

$$L_Б(X_2) = \sum_{k=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{n} x_{kj} \tag{16}$$

та задовольняючий обмеженням

$$\sum_{j=1}^{n} x_{kj} = d_k , \quad k = 1, 2, \ldots, \ell , \tag{17}$$

$$\sum_{k=1}^{e} x_{kj} = b_j , \quad j = 1, 2, \ldots, n , \tag{18}$$

$$x_{kj} \ge 0 , \quad k = 1, 2, \ldots, \ell , \quad j = 1, 2, \ldots, n \tag{19}$$

Обидва сформульовані завдання вирішуються методом потенціалів. Як уже було відзначено вище, основний недолік цього підходу полягає в використанні обмежень (10). Необхідність їх задоволення істотно знижують потенціал ефективності системи транспортувань від постачальників до споживачів. Більш природною є інша постановка задачі, в якій значення пропускних спроможностей d_k , $k = 1, 2, \ldots, \ell$, проміжних пунктів не фіксуються, але умова балансу (11) виконується. Для вирішення завдання в цій постановці використовуємо декомпозиційний підхід.

Введемо набір $Y = \{y_k\}$, $k = 1, 2, \ldots, \ell$, невідомих значень пропускних спроможностей проміжних пунктів. Ці значення повинні бути невід'ємні, та в сукупності, задовольняти умові балансу

$$\sum_{k=1}^{\ell} y_k = \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = S . \tag{20}$$

При тому задачі (12) – (15) та (16-19) будуть мати наступний вигляд:

Задача А1. Знайти набір $X_1 = (x_{ik})$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $k = 1, 2, \ldots, l$. мінімізуючий (12) та задовольняючий обмеженням (14) – (15), а також обмеженням

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ik} = y_k , \quad k = 1, 2, \ldots, \ell . \tag{21}$$

Задача Б1. Знайти набір $X_2 = (x_{kj})$, $k = 1, 2, \ldots, \ell,$ $j = 1, 2, \ldots, n,$ мінімізуючий (16) та задовольняючий обмеженням (18) – (19), а також обмеженням

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ik} = y_k , \quad k = 1, 2, \ldots, \ell. \tag{22}$$

Зрозуміло, що будь-якому допустимому набору Y відповідає своє рішення $X_1(Y)$ задачі A_1 та своє рішення $X_2(Y)$ задачі $Б_1$. Природно сформулювати завдання відшукання набору Y та залежних від Y наборів $X_1(Y)$, $X_2(Y)$, мінімізуючих

$$\begin{aligned} & L\left(X_1(Y), X_2(Y)\right) = \\ & = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{\ell} c_{ik} x_{ik}(Y) + \sum_{k=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{n} c_{kj} x_{kj}(Y) \end{aligned} \tag{23}$$

та задовольняючий обмеженням (14) – (15), (18) – (19), (21) – (22).

Розглянемо можливі підходи до вирішення поставленого завдання. Залежність змінних (x_{ik}) та (x_{kj}) від вектора Y призводить до того, що отримана задача вже не являє собою стандартну задачу лінійного програмування. Однак, вона з використанням ідеї декомпозиції може бути зведена до вирішення послідовності звичайних завдань лінійного програмування наступним чином. Пропонований метод вирішення має наступну структуру: зовнішня задача і сукупність внутрішніх завдань. У зовнішній задачі формується набір векторів $Y_s = \left(y_k^{(s)}\right)$, $s = 1, 2, \ldots, \ell + 1$, кожен з яких задає своє

ISSN 2522-9818 (print)
ISSN 2524-2296 (online) Innovative technologies and scientific solutions for industries. 2021. No. 1 (15)

розподілення пропускних здатностей проміжних пунктів і задовольняє умовам балансу (20). Далі для кожного з цих векторів вирішується відповідна внутрішня задача, що складається з транспортних задач А1 та Б1. Результати рішення цих задач визначають сумарну вартість (23) транспортування продукту від виробників до споживачів через проміжні пункти. Сукупність отриманих при цьому значень сумарної вартості для різних векторів Y_s, $s = 1, 2, ..., \ell + 1$, використовується для коригування (поліпшення) набору Y_s. Така схема може бути реалізована будь-яким методом нульового порядку (Боксу-Улсона, Хука-Дживса, Розенброка, Нелдера-Міда). Найбільш ефективним з них вважається метод Нелдера-Міда.

Опишемо коротко особливості організації обчислювальної процедури методу Нелдера-Міда стосовно аналізованої завданню. Координати $Y_1, Y_2, ..., Y_{p+1}$ точок початкового симплекса задамо матрицею D, $\dim D = \ell \times (\ell + 1)$.

$$D = \begin{pmatrix} \frac{s}{p} & \frac{s}{l} + a & \frac{s}{l} - \frac{a}{l-1} & \dots & \frac{s}{l} - \frac{a}{l-1} \\ \frac{s}{p} & \frac{s}{l} - \frac{a}{l-1} & \frac{s}{l} + a & \dots & \frac{s}{l} - \frac{a}{l-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{s}{p} & \frac{s}{l} - \frac{a}{l-1} & \frac{s}{l} - \frac{a}{l-1} & \dots & \frac{s}{l} + a \end{pmatrix}, \quad \frac{a}{l-1} < \frac{s}{l}.$$

Стовпці цієї матриці задають варіанти розподілу пропускної здатності проміжних пунктів. Кожне з цих розподілів відповідає умові балансу (20). Для кожного варіанту Y_s розподілу вирішуються транспортні задачі А та Б, обчислюються відповідні витрати і їх сума L_s. Значення L_s – критерій якості варіанту, що використовується для ранжирування сумарних витрат в порядку зростання L_s. Далі, відповідно до методу, "найгірша" точка Y_{l+1} відображається щодо центра ваги С – фігури, що виходить після видалення з симплекса "гіршої" точки, по формулі $U = C + \alpha(C - Y_{l+1})$, $\alpha \le 1$. Отримана точка U піддається аналізу. При цьому, якщо $L(u) < L(Y_1)$, то виконується операція розтягнення, для чого розраховується нова точка $V = C + \gamma(C - Y_{l+1})$, $\gamma = 1.5$, яка замінює "гіршу" точку. Якщо ж $L(Y_1) \le L(u) \le L(Y_l)$, то замість "гіршої" використовується точка U. Якщо $L(Y_l) < L(u) \le L(Y_l)$, то виконується операція стиску, для чого розраховується точка $W = C + \beta(C - Y_{l+1})$, $\beta = 0.5$, замінює "гіршу". Нарешті, якщо $L(u) > L(Y_l)$, то реалізується операція редукції симплекса. При цьому всі точки симплекса "підтягуються" до кращої точки L_1. При цьому нові координати точок визначаються за формулою

$$y_k^{/} = \frac{1}{2}(Y_1 + Y_k), \quad k = 2, 3, ..., l + 1.$$

Покажемо тепер, що, незалежно від способу розрахунку, нові точки будуть коректними, тобто відповідний розподіл пропускної здатності проміжних пунктів буде задовольняти умовам балансу (20). Похідної точки початкового симплекса, що задаються матрицею D, цій умові очевидно задовольняють (сума елементів для будь-якого стовпця матриці дорівнює S). Через ці $(l+1)$ точок в l – координатному просторі проведемо гіперплощину, описану співвідношенням

$$a_1 y_{1j} + a_{12} y_{2j} + ... + a_l y_{lj} = s, \quad j = 1, 2, ..., l + 1.$$

Потрібно довести, що одержувані в результаті реалізації методу нові точки належать цій гіперплощині. Проведемо необхідні викладки для випадку, коли виконана операція віддзеркалення.

При цьому

$$C = \frac{1}{l}\sum_{j=1}^{l} Y_j = \frac{1}{l}\begin{pmatrix} y_{11} + y_{12} + ... + y_{1l} \\ y_{21} + y_{22} + ... + y_{2l} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ y_{e1} + y_{e2} + ... + y_{ll} \end{pmatrix},$$

$$U = C + \alpha(C - Y_{l+1}) = \frac{1}{l}\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{l} y_{1j} \\ \dots \\ \sum_{j=1}^{l} y_{lj} \end{pmatrix} + \alpha\left[\frac{1}{l}\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{l} y_{1j} \\ \dots \\ \sum_{j=1}^{l} y_{lj} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_{1,l+1} \\ \dots \\ y_{l,l+1} \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \frac{1}{l}\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{l} y_{1j} \\ \dots \\ \sum_{j=1}^{l} y_{lj} \end{pmatrix} + \frac{\alpha}{l}\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{l} y_{1j} - l y_{1,l+1} \\ \dots \\ \sum_{j=1}^{l} y_{lj} - l y_{l,l+1} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{l}\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{l} y_{1l} + \alpha \sum_{j=1}^{l} y_{1l} - \alpha l y_{1,l+1} \\ \dots \\ \sum_{j=1}^{l} y_{lj} + \alpha \sum_{j=1}^{l} y_{lj} - \alpha l y_{l,l+1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{l}\sum_{j=1}^{l}\left[(1+\alpha) y_{1,j} - \alpha y_{1,l+1}\right] \\ \dots \\ \frac{1}{l}\sum_{j=1}^{l}\left[(1+\alpha) y_{l,j} - \alpha y_{l,l+1}\right] \end{pmatrix}.$$

Оцінка вектору U представляє координати нової точки, отриманої в результаті операції віддзеркалення. Підставимо їх до рівняння гіперплощини. При цьому

ISSN 2522-9818 (print)
Сучасний стан наукових досліджень та технологій в промисловості. 2021. № 1 (15) ISSN 2524-2296 (online)

$$a_1\left[\frac{1}{l}\sum_{j=1}^{l}(1+\alpha)y_{1j}-\alpha y_{1,l+1}\right]+$$
$$+a_2\left[\frac{1}{l}\sum_{j=1}^{l}(1+\alpha)y_{2j}-\alpha y_{2,l+1}\right]+\ldots$$
$$\ldots+a_l\left[\frac{1}{l}\sum_{j=1}^{l}(1+\alpha)y_{lj}-\alpha y_{l,l+1}\right]=$$
$$=\frac{1+\alpha}{l}\left[\sum_{j=1}^{e}a_1y_{1j}+\sum_{j=1}^{l}a_2y_{2j}+\ldots+\sum_{j=1}^{l}a_ly_{lj}\right]-$$
$$-\alpha\left[a_1y_{1,l+1}+a_2y_{2,l+1}+\ldots+a_ly_{l,l+1}\right]=$$
$$\frac{1+\alpha}{l}\sum_{j=1}^{l}\left(a_1y_{1j}+a_2y_{2j}+\ldots+a_ly_{lj}\right)-$$
$$-\alpha\left(a_1y_{1,l+1}+a_2y_{2,l+1}+\ldots+a_ly_{l,l+1}\right)=$$
$$=(1+\alpha)S-\alpha S=S,$$

що і потрібно було довести. Запропонована декомпозиція структури вихідної трьох індексної задачі (6) – (10) істотно спрощує її шляхом зведення до вирішення більш простих двухіндексних задач.

Однак, принципова особливість реальних транспортних задач (велика кількість обмежень) визначає доцільність застосування для вирішення кожної з внутрішніх задач підхід, заснований на теорії подвійності [7]. Задачі, двоякі по відношенню до завдань А і Б мають вигляд.

Задача А1. Знайти набори $\{u_i\}$, $i=1,2,\ldots,m$, $\{v_k\}$, $k=1,2,\ldots,\ell$ максимізуючі набори

$$L(u,v)=\sum_{i=1}^{m}a_iu_i+\sum_{k=1}^{\ell}d_kv_k \qquad (24)$$

та що задовольняють обмеженням

$$u_i+v_k\le c_{ik},\ i=1,2,\ldots,m,\ k=1,2,\ldots,\ell. \qquad (25)$$

Задача Б1. Знайти набори $\{v_k\}$, $k=1,2,\ldots,\ell$, $\{w_j\}$, $j=1,2,\ldots,n$, максимізуючі

$$L_Б(v,w)=\sum_{k=1}^{\ell}d_kv_k+\sum_{j=1}^{n}b_jw_j \qquad (26)$$

та що задовольняють обмеженням

$$v_k+w_j\le c_{kj},\quad k=1,2,\ldots,p,\quad j=1,2,\ldots,n \qquad (27)$$

Отримані задачі простіші вихідних прямих задач з наступних причин [14–16]. По-перше, ці задачі, на відміну від прямих двухіндексних задач, є одноіндексними. По-друге, структура обмежень двоїстих задач простіша ніж структура прямих, так як кожне обмеження містить всього дві змінні. І, нарешті, найважливіше спрощення полягає в тому, що для вирішення отриманих двоїстих задач може бути використаний звичайний симплекс – метод, а не специфічний метод потенціалів.

Нарешті, додаткове зниження загальної тривалості виконання задачі може бути отримано наступним чином. Задачі $\bar{А}$ и $\bar{Б}$, які вирішуються на кожній ітерації, є незалежними. Однак, рішення задачі $\bar{А}$ може бути використано для швидкого отримання початкового плану задачі $\bar{Б}$.

Дійсно, нехай для конкретного вектора $У_3$ вирішена задача (20) – (25) та отримані набори $\left\{u_i^{(s)}\right\}$ та $\left\{v_k^{(s)}\right\}$. Підставляючи набір $\left\{v_k^{(s)}\right\}$ у (23) отримаємо нерівність

$$w_j\le c_{kj}-v_k^{(s)},\ k=1,2,\ldots,l+1,\ j=1,2,\ldots,n. \qquad (28)$$

Тепер для відшукання $\{w_j\}$ отримуємо найпростішу задачу лінійного програмування: знайти $\{w_j\}$, максимізуючу $\sum_{j=1}^{n}b_jw_j$ та що задовольняє (28). Ця задача вирішується з урахуванням (28) послідовним розрахунком w_j у порядку зменшення значень b_j. Отримане при цьому рішення $\left\{v_k^{(s)}\right\}$, $\{w_j\}$ перевіряється на оптимальність і, якщо це необхідно, поліпшується.

Описані вище прийоми успішно вирішують задачі, розмірність яких не є гранично високою $\left(mn\ell\le10^4\right)$. У більш складних задачах може бути використаний ще один метод, для реалізації якого необхідно вирішити наступну попередню задачу. Нехай в системі "поставщики – проміжні пункти – споживачі" задані матриця $C_1=\left(C_{ik}\right)$, $i=1,2,\ldots,m,\ k=1,2,\ldots,l.$, $i=1,2,\ldots,l$ і $C_2=\left(C_{kj}\right)$, $k=1,2,\ldots,l$ $j=1,2,\ldots,n$. Тепер для кожної пари (i,j) простим перебором відшукується проміжний пункт k_{ij}, через який забезпечується мінімальна за вартістю доставка одиниці продукту з i у j. При цьому використовується співвідношення

$$C_{ik_{ij}j}=C_{ik_{ij}}+C_{k_{ij}j}=$$
$$=\min_k\left\{C_{i1}+C_{1j},\ C_{i2}+C_{2j},\ldots,C_{ik}+C_{kj},\ldots,C_{il}+C_{lj}\right\}= \qquad (29)$$
$$=\hat{C}_{ij},\ i=1,2,\ldots,m,\ j=1,2,\ldots,n.$$

Отримана в результаті матриця $\hat{C}=\left(\hat{C}_{ij}\right)$ разом с наборами $\{a_i\}$, $\{b_j\}$ формує звичайну двухіндексну транспортну задачу. Вирішення цього завдання визначає обсяг перевезення для кожної пари "постачальник – споживач" із зазначенням відповідного проміжного пункту, які в сукупності задають шуканий план транспортувань. Нехай $X^{(0)}=\left(X_{ij}^{(0)}\right)$ – отриманий оптимальний план. Оскільки у відповідності (29) для кожної пари (i,j)

ISSN 2522-9818 (print)
ISSN 2524-2296 (online) Innovative technologies and scientific solutions for industries. 2021. No. 1 (15)

визначений найкращий проміжний пункт k_{ij}, то можна записати $X_{ij}^{(0)} = x_{ik_{ij}j}$, $i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2, ..., n$. Тоді необхідна пропускна здатність для кожного проміжного пункту може бути визначена за формулою

$$d_k = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ikj}, \ k = 1, 2, ..., l. \quad (30)$$

Таким чином, якщо для кожної пари "постачальник - споживач" визначено мінімальний за вартістю маршрут, то задача відшукання раціонального розподілу пропускної здатності проміжних пунктів зводиться до однократного вирішення звичайної двохіндексної транспортної задачі із подальшим використанням співвідношення (30).

Розглянемо, нарешті, ще одну проблему, яка реально виникає при вирішенні задачі транспортування коли попит споживачів – випадковий.

Оцінки необхідної пропускної спроможності проміжних пунктів у цьому випадку можна отримати наступним чином. Для фіксованого набору (a_i) та для сукупності різних випадкових наборів (b_j) при виконанні умови балансу вирішуються двохіндексні транспортні задачі. За результатами вирішення цих задач з використанням (30) визначається сукупність відповідних випадкових значень d_k, $k = 1, 2, ..., l$. Далі з використанням стандартної статистичної обробки цих значень для кожного проміжного пункту оцінюються m та σ^2 (математичне очікування і дисперсія необхідної пропускної спроможності). В умовах малої вибірки будемо вважати, що невідома щільність розподілу випадкових значень d_k, $k = 1, 2, ..., l$, є нормальною. Тоді для кожного проміжного пункту може бути розраховане деяке порогове значення необхідної пропускної спроможності, ймовірність перевищення якого не перевищує заданого (досить малого) значення.

Результати

1. Основний результат роботи – новий ефективний метод розрахунку раціонального розподілу пропускних спроможностей проміжних пунктів у тріаксіальній транспортній задачі.

Метод заснований на використанні структурної декомпозиції задачі. При цьому рішення вихідної трьохіндексної задачі зведене до послідовного розв'язування набору двухіндексних задач. Оцінимо виграш у обчислювальній складності, отриманий при реалізації цієї ідеї. В [15] отримано співвідношення для оцінки обчислювальної складності задач лінійного програмування. При цьому якщо у задачі мається S змінних та T обмежень, то обчислювальна складність F задачі оцінюється співвідношенням $F_0 = O(S^4T + S^3T^2 + S^2T^3)$. Нехай у вихідній трьохіндексній задачі є m постачальників, n споживачів та ℓ проміжних центрів. Тоді $S=mne$, а $T=m+n+e-2$. При цьому обчислювальна складність такого завдання визначається співвідношенням

$$F_0 = O[(mn\ell)^4(m+n+\ell) + (mn\ell)^3(m+n+\ell)^2 + (mn\ell)^2(m+n+\ell)^3]. \quad (31)$$

При реструктуризації рішення цієї задачі зведено до вирішення р двухіндексних задач, в яких $S=m\ell$, $T=m+\ell$, та р двухіндексних задач, в яких $S=n\ell$ и $T=n+\ell$. Обчислювальна складність цих завдань оцінюється співвідношеннями

$$F_1 = O[(m\ell)^4(m+\ell) + (m\ell)^3(m+\ell)^2 + (m\ell)^2(m+\ell)^3]. \quad (32)$$

$$F_2 = O[(n\ell)^4(n+\ell) + (n\ell)^3(n+\ell)^2 + (n\ell)^2(n+\ell)^3]. \quad (33)$$

Виграш, що отримується при реструктуризації, дорівнює $\eta = \dfrac{F_0}{\ell[F_1 + F_2]}$.

2. Запропоновано наближений метод розв'язання задачі для випадку, коли розмірність задачі виявляється гранично високою.

Обговорення

Важлива перевага запропонованого методу – висока швидкодія. Висока ефективність методу – результат комбінації двох підходів: структуризації і застосування теорії подвійності. Ідейна інтерпретація процедури структуризації така: вихідна складна трьохіндексна оптимізаційна задача замінюється набором набагато більш простих двохіндексних задач. Цей же ефект досягається і при заміні прямих транспортних задач їх подвійними аналогами: двохіндексна задача перетвориться на одноіндексну. Запропонований метод успішно вирішує задачу раціонального розподілу сумарної обмеженої пропускної здатності проміжних пунктів, мінімізуючи сумарну вартість перевезень. Природне обмеження на область застосування методу пов'язано з використанням допущення, що вихідні параметри здачі (вартості транспортування вантажів) – відомі детерміновані константи. У реальності ці параметри задані або неточно [16-17], або нечітко [18-20]. Виникаючі задачі не можуть бути вирішені традиційними оптимізаційними методами. Можливі підходи до їх вирішення запропоновані в [21-23].

Висновки

1. Вперше отримано метод розрахунку пропускної здатності проміжних пунктів у розгалуженій транспортній мережі, що відрізняється тим, що вихідна складна багатоіндексна задача зведена до набору більш простих задач меншою індексних.

2. Удосконалено обчислювальну процедуру вирішення вихідної задачі, що відрізняється

ISSN 2522-9818 (print)
Сучасний стан наукових досліджень та технологій в промисловості. 2021. № 1 (15) *ISSN 2524-2296 (online)*

комплексним використанням двох підходів спрощення (реструктуризація та застосування теорії подвійності), що дозволило істотно підвищити ефективність вирішення вихідної задачі.

Список літератури

1. Бирман И. Я. Транспортная задача линейного программирования. М. : Изд. эк. лит., 1962. 262 с.
2. Серая О. В. Многомерные модели логистики в условиях неопределенности. Х. : ФОП Стеценко, 2010. 512 с.
3. Нестеров Б. П. Транспортная задача линейного программирования. М. : МПС, 1962. 189 с.
4. Раскин Л. Г. Анализ сложных систем и элементы теории управления. М. : Сов. радио, 1976. 344 с.
5. Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г. Задачи линейного программирования транспортного типа. М.: Сов. радио, 1969. 382 с.
6. Dantzig G. B. Linear Programming and Extensions. New Jersey: Princeton University Press, 1948. 634 p.
7. Motzkin T. S. The multi-index transportation problem. *Bulletin of the American Mathematical Society*. 1952. Vol. 58. No. 4. P. 32.
8. Halley K. B. The solid transportation problem. *Operations Research*. 1962. Vol. 10. № 4. P. 62–71.
9. Corban A. On a three-dimensional transportation problem. *Revue Roumaine De Mathematiques Pures et Appliquees*. 1965. Vol. 11. No. 1. P. 91–98.
10. Corban A. Transportation problem with intermediate centres. *Revue Roumaine De Mathematiques Pures et Appliquees*. 1971. Vol. 16. No. 9. P. 34–43.
11. Corban A. On a three-dimensional transportation problem with interchangeable centres. *Revue Roumaine De Mathematiques Pures et Appliquees*. 1965. Vol. 11. No. 4. P. 65.
12. Mihu C. Programe tridimensionale. Bucur: Ed. Tehn. 1970. 168 p.
13. Анисимова Н. П., Ванина Е. А. Линейное программирование. СПб. : НИЧ ВШЭ, 2012. 700 с.
14. Лунгу К. А. Линейное программирование. М. : ФИЗМАТГИЗ, 2005. 128 с.
15. Березнев В. А. О полиномиальной сложности симплекс-метода. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2004. Том 44. №7. С. 1244–1260.
16. Pawlak Z. Rough Sets: Theoretical Aspects of Reasoning about Data. Pawlak. Dordrecht : Kluwer Academic Publisher, 1991. 284 p.
17. Slowinski R., Vanderpooten, D. A generalized definition of rough approximations based on similarity. *IEEE Transactions on Knowledge and data Engineering*. 2000. Vol. 12. No. 2. P. 331–336.
18. Zadeh L. A. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. *Fuzzy Sets and Systems*. 978. Vol. 1. No. 1. P. 3–28.
19. Кофман, А. Введение в теорию нечетких множеств: пер. с франц. М. : Радио и связь, 1982. 486 с.
20. Раскин Л. Г., Серая О. В. Нечеткая математика. Х. : Парус, 2008. 352 с.
21. Raskin L., Sira O. Method of solving fuzzy problems of mathematical programming. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2016. Vol. 5. Issue 4. P. 23–28. DOI: https://doi.org/10.15587/1729-4061.2016.81292
22. Sira O. V., Al-Shqeerat K. H. A New Approach for Resolving Equations with Fuzzy Parameters. *European Journal of Scientific Research*. 2009. Vol. 38. Issue 4. P. 619–625.
23. Raskin L., Sira O. Fuzzy models of rough mathematics. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2016. Vol. 6. Issue 4. P. 53–60. DOI: https://doi.org/10.15587/1729-4061.2016.86739

References

1. Birman, I. Ya. (1962), *Transport linear programming problem*, Eksmo, Moscow, 262 p.
2. Sira, O. V. (2010), *Multidimensional Logistics Models Under Uncertainty*, FOP Stetsenko, Kharkiv, 512 p.
3. Nesterov, B. P. (1962), *Transport linear programming problem*, MPS, Moscow, 189 p.
4. Raskin, L.G. (1976), *Analysis of complex systems and elements of control theory*, Sovetskoe radio, Moscow, 344 p.
5. Yudin, D. B., Holstein, Ye. G. (1969), *Transport-type linear programming problems*, Sovetskoe radio, Moscow, 382 p.
6. Dantzig, G. B. (1948), *Linear Programming and Extensions*, Princeton University Press, New Jersey, 634 p.
7. Motzkin, T. S. (1952), "The multi-index transportation problem", *Bulletin of the American Mathematical Society*, Vol. 58, No. 4, P. 32.
8. Halley, K. B (1962), "The solid transportation problem", *Operations Research*, Vol. 10, No. 4, P. 62–71.
9. Corban, A. (1965), "On a three-dimensional transportation problem", *Revue Roumaine De Mathematiques Pures et Appliquees*, Vol. 11, No. 1, P. 91–98.
10. Corban, A. (1971), "Transportation problem with intermediate centres", *Revue Roumaine De Mathematiques Pures et Appliquees*, Vol. 16, No. 9, P. 34–43.
11. Corban, A. (1965), "On a three-dimensional transportation problem with interchangeable centres", *Revue Roumaine De Mathematiques Pures et Appliquees*, Vol. 11, No. 4, P. 65.
12. Mihu, C. (1970), *Programe tridimensionale*, Ed. Tehn., Bucur, 168 p.
13. Anisimova, N. P., Vanina, E. A., (2012), *Linear programming*, Nich Vshe, St. Petersburg, 700 p.
14. Lungu, K. (2005), *Linear programming*, FIZMATGIZ, Moscow, 128 p.
15. Bereznev, V. A. (2004), "On the polynomial complexity of the simplex method", *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*, Vol. 44, No. 7. P.1244–1260.
16. Pawlak, Z. (1991), *Rough Sets: Theoretical Aspects of Reasoning about Data*, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, 284 p.
17. Slowinski, R., Vanderpooten, D. (2000), "Generalized definition of rough approximations based on similarity", *IEEE Transactions on Knowledge and data Engineering*, Vol. 12, No. 2, P. 331–336.
18. Zadeh, L. A. (1978), "Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility", *Sets and Systems*, Vol. 1, No. 1, P. 3–28.
19. Kofman, A. (1982), *Introduction to fuzzy set theory*, Sovetskoe radio, Moscow, 486 p.
20. Raskin, L. G., Sira, O. V. (2008), *Fuzzy mathematics*, Parus, Kharkiv, 352 p.
21. Raskin, L., Sira, O. (2016), "Method of solving fuzzy problems of mathematical programming", *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, Vol. 5, Issue 4, P. 23–28. DOI: https://doi.org/10.15587/1729-4061.2016.81292
22. Sira, O. V., Al-Shqeerat, K. H. (2009), "A New Approach for Resolving Equations with Fuzzy Parameters", *European Journal of Scientific Research*, Vol. 38, Issue 4, P. 619–625.
23. Raskin, L., Sira, O. (2016), "Fuzzy models of rough mathematics", *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, Vol. 6, Issue 4, P. 53–60. DOI: https://doi.org/10.15587/1729-4061.2016.86739

Надійшла (Received) 20.02.2021

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Раскін Лев Григорович – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет "Харківський політехнічний інститут", професор кафедри розподілених інформаційних систем і хмарних технологій, Харків, Україна; email: topology@ukr.net; ORCID: http://orcid.org/0000–0002–9015–4016.

ISSN 2522-9818 (print)
ISSN 2524-2296 (online) Innovative technologies and scientific solutions for industries. 2021. No. 1 (15)

Раскин Лев Григорьевич – доктор технических наук, профессор, Национальный технический университет "Харьковский политехнический институт", профессор кафедры распределенных информационных систем и облачных технологий, Харьков, Украина.

Raskin Lev – Doctor of Sciences (Engineering), Professor, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Professor of the Department of Distributed Information Systems and Cloud Technologies, Kharkiv, Ukraine.

Сіра Оксана Володимирівна – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет "Харківський політехнічний інститут", професор кафедри розподілених інформаційних систем і хмарних технологій, Харків, Україна; email: topology@ukr.net; ORCID: http://orcid.org/0000–0002–4869–2371.

Серая Оксана Владимировна – доктор технических наук, профессор, Национальный технический университет "Харьковский политехнический институт", профессор кафедры распределенных информационных систем и облачных технологий, Харьков, Украина.

Sira Oksana – Doctor of Sciences (Engineering), Professor, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Professor of the Department of Distributed Information Systems and Cloud Technologies, Kharkiv, Ukraine.

Парфенюк Юрій Леонідович – Національний технічний університет "Харківський політехнічний інститут", аспірант кафедри розподілених інформаційних систем і хмарних технологій, Харків, Україна; email: parfuriy.l@gmail.com; ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5357-1868.

Парфенюк Юрий Леонидович – Национальный технический университет "Харьковский политехнический институт", аспирант кафедры распределенных информационных систем и облачных технологий, Харьков, Украина.

Parfeniuk Yurii – National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Postgraduate Student of the Department of Distributed Information Systems and Cloud Technologies, Kharkiv, Ukraine.

УПРАВЛЕНИЕ ПРОПУСКНЫМИ СПОСОБНОСТЯМИ ПРОМЕЖУТОЧНЫХ ПУНКТОВ В РАЗВЕТВЛЕННОЙ ТРАНСПОРТНОЙ СЕТИ

Предмет. Рассмотрен важный для практики частный случай транспортной задачи с промежуточными пунктами, когда пропускные способности этих пунктов не заданы. **Цель.** Отыскание неизвестного распределения пропускных способностей промежуточных пунктов, которое минимизирует суммарные транспортные расходы. **Задачи.** Постановка задачи управления пропскными способнастями промежуточных пунктов в триаксиальной транспортной задаче. Разработанный метод обладает высоким быстродействием за счет использования структурной декомпозиции задачи. Метод имеет невысокую вычислительную сложность, что является весомым преимуществом для практического применения. **Метод.** Предложено два метода решения задачи. Первый реализует итерационную процедуру улучшения начального плана для двойственной модели исходной задачи. Вычислительная схема на каждой итерации является двухшаговой. На первом шаге итерации решается координирующая задача, решение которой задает очередной набор значений пропускных способностей промежуточных пунктов. На втором шаге этот набор используется для решения исходной транспортной задачи. Получаемое в результате решение проверяется на оптимальность. Если оно не оптимально, то выполняется переход к очередной итерации. Для реализации предложенной вычислительной схемы использован метод оптимизации нулевого порядка Нелдера-Мида. **Результаты.** Доказана возможность конструктивного использования этого метода с учетом большого числа ограничений транспортного типа. С целью упрощения технологии решения транспортных задач на каждой итерации алгоритма введены двойственные их модели. В связи с тем, что вычислительная сложность предлагаемого метода быстро растет с увеличением числа промежуточных пунктов, предложен простой альтернативный приближенный метод решения задачи. Выводы. Предложенный метод решает задачу расчета пропускной способности промежуточных пунктов в системе "производство - доставка - потребление".

Ключевые слова: транспортная задача с промежуточными пунктами; пропускные способности пунктов не заданы; методы решения.

MANAGING THE CAPACITY OF INTERMEDIATE POINTS IN AN EXTENSIVE TRANSPORT NETWORK

Relevance. A special case of a transport problem with intermediate points, when the throughput capacity of these points is not specified, is considered, which is important for practice. **Purpose.** The problem of finding an unknown distribution of the throughput capacity in intermediate points, which minimizes the total transport costs, is formulated. **Method.** Two methods for solving the problem are proposed. The first one implements an iterative procedure for improving the initial plan for dual model of original problem. The computational scheme at each iteration is a two-step one. At the first step of iteration, a coordinating problem is solved, the solution of which sets the next set of values for throughput of intermediate points. In the second step, this set is used to solve the original transport problem. The resulting solution is tested for optimality. If it is not optimal, then transition to the next iteration is performed. To implement proposed computational scheme, the Nelder-Mead zero-order optimization method was used. **Tasks.** Statement of problem for controlling the throughput capacities of intermediate points in triaxial transport problem. The developed method has high performance due to the use of the structural decomposition of problem. The method has low computational complexity, which is a significant advantage for practical application. **Results.** The constructive possibility use of this method has been proved, taking into account a large number of transport-type restrictions. In order to simplify the technology for solving transport problems at each iteration of the algorithm, their dual models are introduced. Due to the fact that computational complexity of proposed method grows rapidly with an increase in the number of intermediate points, a simple alternative approximate method for solving the problem is proposed. Conclusions. The proposed method solves problem of calculating the throughput of intermediate points in "production - delivery - consumption" system.

Keywords: transport problem with intermediate points, throughput points are not specified, methods of solution.

Бібліографічні описи / Bibliographic descriptions

Раскін Л. Г., Сіра О. В., Парфенюк Ю. Л. Управління пропускними здатностями проміжних пунктів у розгалуженій транспортній мережі. *Сучасний стан наукових досліджень та технологій в промисловості*. 2021. № 1 (15). С. 141–148. DOI: https://doi.org/10.30837/ITSSI.2021.15.141

Raskin, L., Sira, O., Parfeniuk, Yu. (2021), "Managing the capacity of intermediate points in an extensive transport network", *Innovative Technologies and Scientific Solutions for Industries*, No. 1 (15), P. 141–148. DOI: https://doi.org/10.30837/ITSSI.2021.15.141