

І. НЕВЛЮДОВ, В. ЄВСЄЄВ, С. МАКСИМОВА, Р. АРТЮХ

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ АДАПТИВНОГО ІЄРАРХІЧНОГО ВИСОКОРІВНЕВОГО КЕРУВАННЯ ТРИЛАНКОВОГО КОЛАБОРАТИВНОГО РОБОТА-МАНІПУЛЯТОРА

У контексті розвитку концепції Індустрія 5.0, яка передбачає тісну взаємодію між людиною та інтелектуальними автоматизованими системами, особливого значення набуває дослідження механізмів гнучкого й безпечного управління колаборативними роботами-маніпуляторами. Дослідження спрямовано на побудову математичної моделі ієрархічного високорівневого керування для триланкового колаборативного робота, що дає змогу адаптувати поведінку маніпулятора до динамічних змін у виробничому середовищі та наявності людини в робочій зоні. **Мета статті** – розроблення математичної моделі, що поєднує класичний підхід моделювання динаміки з **такими методами**: рівняння Ейлера – Лагранжа та сучасні адаптивні алгоритми регулювання, реалізовані за допомогою нечіткої логіки, що дає змогу оптимізувати швидкість і траєкторію руху виконавчих органів в умовах змінного навантаження та часткової невизначеності середовища. Запропонована модель реалізує багаторівневу архітектуру управління, що бере до уваги не лише фізичні параметри маніпулятора, а й когнітивні аспекти взаємодії з оператором та оточенням, шляхом побудови контролера на базі *Fuzzy Rule*. У статті запропоновано формалізацію математичних виразів, описано всі рівні системи керування, їх призначення та взаємозв'язок, а також проведено чисельне моделювання за допомогою *Python* і *PyCharm*. **Результати моделювання** підтвердили ефективність запропонованої системи в умовах присутності людини, забезпечення безпечної відстані, адаптацію до навантаження та відповідність до заданих виробничих параметрів. **Висновки.** Запропонована модель здатна суттєво покращити якість управління маніпулятором в умовах Індустрії 5.0, особливо під час роботи в гібридних середовищах. Модель можна адаптувати до різних типів колаборативних роботів, що відкриває перспективи для її подальшого вдосконалення, зокрема завдяки інтеграції з неймережевими підходами, глибоким навчанням та мультиагентними системами в межах розподіленого інтелектуального виробництва.

Ключові слова: Індустрія 5.0; колаборативний робот; математична модель; ієрархічне управління; нечітка логіка; адаптивне керування; маніпулятор; *PyCharm*; *Python*; *Fuzzy Logic*.

Вступ

Сучасні тенденції розвитку виробничих систем у контексті концепції Індустрія 5.0 спрямовані на досягнення глибокої інтеграції між людиною та машиною, де колаборативні роботи відіграють ключову роль як адаптивні, інтелектуальні та безпечні технічні засоби, здатні взаємодіяти з оператором у спільному середовищі без фізичних бар'єрів [1, 2]. Перехід від автоматизації до гуманізації процесів передбачає не лише технічне вдосконалення апаратної частини, але й необхідність розроблення нових підходів до математичного моделювання та управління поведінкою роботизованих систем в умовах мінливого навколишнього середовища. У контексті цього переходу актуальним постає питання побудови ієрархічних структур управління з можливістю адаптації до зовнішніх впливів, увага до динаміки взаємодії з людиною, непередбачуваних навантажень і варіативності виробничих завдань.

Особливе значення має розроблення математичних моделей, що поєднують як класичні

підходи до опису кінематичних і динамічних властивостей маніпуляторів, так і модулі штучного інтелекту, що дають змогу виконувати високорівневе прийняття рішень на основі сенсорної інформації в реальному часі [3, 4]. Колаборативний маніпулятор із трьома ступенями вільності є типовим прикладом промислового робота нового покоління, здатного до фізичної взаємодії з оператором, а тому його математичне моделювання з огляду на адаптивні властивості є не лише науково актуальним, але й практично значущим для реалізації концепції цифрового двійника, кіберфізичних систем та безпечного виробничого середовища [5, 6].

Зважаючи на зростання вимог до гнучкості, безпеки та інтелектуальності роботизованих систем, розроблення адаптивної ієрархічної моделі управління для колаборативного маніпулятора забезпечить ефективне функціонування таких систем у межах інтегрованих виробничих процесів, властивих Індустрії 5.0, де основною цінністю є не максимізація продуктивності, а гармонійна взаємодія людини й машини.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

У роботі [7] розглянуто сучасні підходи до планування та управління колаборативними роботами, зокрема інтеграцію контролю та планування для забезпечення безпечної взаємодії з людиною в динамічному середовищі. Описаний підхід дає змогу підвищити адаптивність до мінливих умов, однак не пропонує формального механізму ієрархічного управління, особливо щодо розширених структур роботів.

Автори дослідження [8] подали концепцію автоматизованого оновлення параметрів середовища для забезпечення адаптації роботів у реальному часі, що корисно в контексті Індустрії 5.0. Проте запропонована модель орієнтована переважно на мінливі середовища, залишаючи поза увагою багаторівневу структуру управління або формалізацію ієрархічного контролю.

У статті [9] описано метод ковзного управління для точного відслідковування траєкторії, що зменшує похибки моделі. Однак у цьому підході не береться до уваги ієрархічна логіка контролю та обмежена масштабованість до складних сценаріїв. Науковці в роботі [10] досліджують адаптивні стратегії для підвищення стабільності траєкторії, але модель побудована для конкретного типу маніпулятора й не передбачає можливості узагальнення на багатоланкові структури чи застосування в межах ієрархічних систем управління.

У праці [11] учені запропонували підхід багаторівневого навчання для енергоефективного управління, що демонструє потенціал до оптимізації ресурсомістких процесів. Проте практична реалізація таких стратегій потребує значних обчислювальних ресурсів, що ускладнює їх застосування для легких мобільних маніпуляторів. Автори статті [12] розглянули використання курикулум-орієнтованого навчання з ієрархічною структурою, яка сприяє ефективному виконанню складних завдань за умови зменшеного обсягу тренувальних даних. Проте описаний підхід менш ефективний у середовищах з високим рівнем невизначеності, що обмежує його використання в адаптивних сценаріях.

У роботі [13] описано планування багатокрокових маніпуляцій на основі ієрархічної логіки з огляду на множинні цілі. Цей підхід покращує стратегічну оптимізацію, але викликає труднощі для інтеграції

в роботизовані системи із значною кількістю залежностей і варіативністю конфігурацій. У дослідженні [14] проаналізовано розподілений контроль у багатогрупових системах, що забезпечує покращену синхронізацію та узгодженість дій. Водночас високі вимоги до швидкодії обмежують застосування зазначеного підходу в системах з ієрархічною багаторівневою логікою управління.

Проаналізовані публікації підтверджують загальну актуальність питання підвищення ефективності та гнучкості управління в колаборативних роботизованих системах. Однак більшість з них присвячені окремим аспектам, зокрема відслідковуванню траєкторії, реакції на мінливе середовище або покращенню взаємодії з людиною, не охоплюючи повної архітектури адаптивного ієрархічного керування.

Отже, розроблення математичної моделі для триланкового колаборативного робота-маніпулятора з огляду на багаторівневу структуру, вплив динамічних змін та адаптацію до середовища залишається науково обґрунтованим і незавершеним напрямом, що потребує подальшого дослідження в межах концепції Індустрія 5.0.

Мета статті – розроблення математичної моделі, що поєднує класичний підхід моделювання динаміки за допомогою рівнянь Ейлера – Лагранжа та сучасних адаптивних алгоритмів регулювання, реалізованих за допомогою нечіткої логіки, що дає змогу оптимізувати швидкість і траєкторію руху виконавчих органів в умовах змінного навантаження та часткової невизначеності середовища.

Розроблення математичного забезпечення системи керування колаборативного робота-маніпулятора

Високорівнева система керування для триланкового колаборативного робота-маніпулятора, що розробляється, має три рівні управління: кінематичний, динамічний і адаптивний високорівневий модуль на базі *Fuzzy Logic*, який змінює поведінку маніпулятора залежно від навколишніх умов, таких як відстань до людини або навантаження на виконавчий орган [15, 16]. Структура адаптивного ієрархічного високорівневого керування триланкового колаборативного робота-маніпулятора зображена на рис. 1.

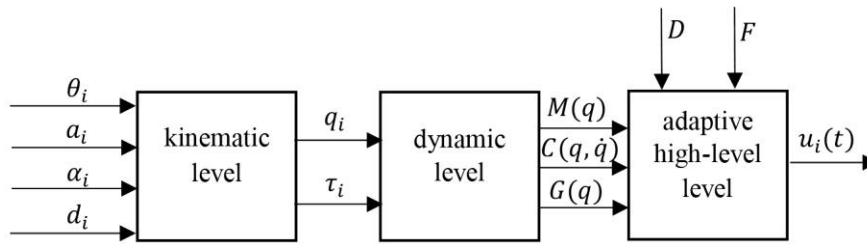


Рис. 1. Структура адаптивного ієрархічного високорівневого керування триланкового колаборативного робота-маніпулятора

Для опису кінематичного рівня триланкового маніпулятора запропоновано використовувати пряму кінематику на основі матриці Денавіта – Хартенберга (DH) [17, 18], що задана такими параметрами: θ_i – змінна обертання (кут суглоба); a_i – довжина ланки; α_i – кут нахилу між ланками; d_i – відстань по осі z (для револьверних суглобів – стала). Тоді положення та орієнтацію виконавчого органа (ефектора) в просторі, можна подати таким виразом:

$$T = T_1 \cdot T_2 \cdot T_3, \quad (1)$$

де T – це глобальна матриця положення та орієнтації кінцевого ефектора, що містить як координати (x, y, z) , так і орієнтацію (кутову позицію) у просторі; T_1 – матриця перетворення від бази до першої ланки (тобто описує положення та орієнтацію 1-ї ланки); T_2 – матриця перетворення від 1-ї до 2-ї ланки; T_3 – матриця перетворення від 2-ї до 3-ї ланки (кінцевого ефектора).

Матриці перетворення T_1, T_2, T_3 мають такий вигляд:

$$T_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i - \sin \theta_i \cos \alpha_i & \sin \theta_i \sin \alpha_i & \alpha_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i - \cos \theta_i \cos \alpha_i & -\cos \theta_i \sin \alpha_i & \alpha_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot d_i. \quad (2)$$

Для опису динамічного рівня запропоновано використовувати модель Ейлера – Лагранжа [19, 20], оскільки вона дає змогу точно описати динаміку руху триланкового колаборативного робота-маніпулятора, беручи до уваги кінетичну та потенційну енергії кожної ланки, а також вплив зовнішніх сил. Вона є основою для побудови адаптивної системи управління, що зважає на зміни навантаження та взаємодію з людиною в умовах невизначеності. Модель Ейлера – Лагранжа для цього дослідження має вигляд

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i, \quad (3)$$

де $L = K - P$ – лагранжіан (різниця кінетичної та потенційної енергії); q_i – кутові положення i -го суглоба; τ_i – момент сили, що прикладається до суглоба.

Кінетичну енергію (K) знаходимо так:

$$K = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q}, \quad (4)$$

де $\dot{q}$ – вектор кутових швидкостей обертання суглобів робота, тобто швидкість зміни положення кожної ланки; $M(q)$ – матриця інерції (масово-інерціальна матриця), що залежить від положення q кожної ланки; вона описує, як маса та інерція розподілені по всій структурі маніпулятора; $\dot{q}^T$ – транспонований вектор швидкостей, що дає змогу обчислити скалярне значення кінетичної енергії в множенні на матрицю інерції та вектор швидкостей.

Потенціальну енергію (P) знаходимо так:

$$P = G(q), \quad (5)$$

де $G(q)$ – вектор гравітаційних сил.

Динамічне рівняння руху необхідне для опису взаємозв'язку між силами, моментами та рухом ланок маніпулятора, що дає змогу точно моделювати його поведінку у відповідь на зовнішні впливи. Воно лежить в основі побудови системи керування, оскільки допомагає формувати відповідні керуючі дії для досягнення бажаних траєкторій з огляду на масово-інерційні властивості та змінну динаміку системи, та має такий вигляд:

$$M(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + G(q) = \tau, \quad (6)$$

де $M(q)$ – матриця інерції; $C(q, \dot{q})$ – матриця коріолісових і відцентрових сил; $G(q)$ – вектор гравітаційних сил; τ – вектор моментів керування.

Високорівневий адаптивний модуль виконує функцію адаптації швидкості руху маніпулятора залежно від таких параметрів: D – відстан до людини (у метрах); F – навантаження на ефектор (у Ньютонах). Використаємо *Fuzzy Logic*, що формує

коефіцієнт масштабування швидкості $\mu \in [0.1, 1.0]$, який потім використовується в команді швидкості:

$$\dot{q}_{desired} = \mu(D, F) \cdot \dot{q}_{ref}, \quad (7)$$

де $\dot{q}_{desired}$ – адаптивно скоригована швидкість, яку має реалізувати робот-маніпулятор; $\mu(D, F)$ – вихід нечіткої логіки, що визначає ступінь модифікації швидкості залежно від поточної відстані до людини D та рівня навантаження F на виконавчий орган; $\dot{q}_{ref}$ – еталонна швидкість, задана на основі запланованої траєкторії, незважаючи на адаптацію.

На базі виразів (1)–(6) модель комбінованого керування з огляду на *Fuzzy Logic* до суглоба матиме такий вигляд:

$$u(t) = M(q)\ddot{q}_d + C(q, \dot{q})\dot{q}_d + G(q), \quad (9)$$

де $M(q)$ – матриця інерції, що описує залежність динаміки системи від конфігурації суглобів робота; $\ddot{q}_d$ – бажане прискорення суглобів, яке визначається планувальником руху, $\ddot{q}_d = \frac{d}{dt}\dot{q}_d$; $C(q, \dot{q})$ – матриця коріолісових і відцентрових сил, що бере до уваги нелінійні динамічні ефекти під час руху; $\dot{q}_d$ – бажана швидкість суглобів, $\dot{q}_d = \mu(D, F) \cdot \dot{q}_{ref}$; $G(q)$ – вектор гравітаційних моментів, який компенсує силу тяжіння для збереження рівноваги маніпулятора.

Контролер для адаптації швидкості на базі *Fuzzy Logic* використовується для гнучкого регулювання швидкості руху маніпулятора залежно від поточної ситуації в робочому середовищі, зокрема відстані до людини та навантаження на виконавчий орган. Такий підхід є важливим у контексті безпечної та ефективної взаємодії людини з колаборативним роботом. Модель дає змогу уникати жорстких порогових рішень, натомість створює плавні адаптивні переходи між режимами руху та має такий вигляд:

$$v^* = Defuzz\left(\bigcup_{i=1}^N \min(\mu_{D_i}(d), \mu_{L_i}(l), \mu_{V_i}(v))\right), \quad (10)$$

де v^* – адаптивна швидкість руху маніпулятора, що розраховується на основі аналізу нечітких правил; це остаточне числове значення, яке буде використано для керування виконавчим органом; *Defuzz* – операція дефазифікації, тобто перетворення результату об'єднання правил у конкретне числове значення; пропонується реалізація методом центру тяжіння; $\mu_{D_i}(d)$ – функція належності до нечіткої

множини відстані (наприклад: близько, середньо, далеко) в i -му правилі; показує, наскільки значення d (відстань до людини) відповідає лінгвістичному опису; $\mu_{L_i}(l)$ – функція належності до нечіткої множини навантаження (наприклад: низьке, середнє, високе) в i -му правилі; визначає ступінь відповідності поточного навантаження на маніпулятор; $\mu_{V_i}(v)$ – функція належності до нечіткої множини швидкості, що описує бажану швидкість (наприклад: повільна, нормальна, швидка) в i -му правилі; d – відстань до людини, що вимірюється в сантиметрах або метрах; що менша відстань, то більша небезпека, яка береться до уваги в логіці; l – рівень навантаження на маніпулятор у %, що може впливати на стабільність або точність рухів; v – поточне значення швидкості в умовних одиницях або у відсотках від максимальної.

Подана модель (10) дає змогу на основі множини нечітких правил динамічно й контекстно регулювати поведінку маніпулятора, забезпечуючи безпечну співпрацю з людиною без втрати продуктивності.

Для опису реалізації моделі високорівневого керування на основі ієрархічної логіки модифікуємо модель (6):

$$\tau = M(q)\ddot{q}_d + C(q, \dot{q})\dot{q}_d + G(q), \quad \dot{q}_d = \mu(d, l) \cdot \dot{q}_{ref}, \quad (11)$$

де $\mu(d, l) \in [0, 1]$ – вихід нечіткого логічного регулятора, що адаптує бажану швидкість до умов середовища.

Модель адаптації керування (12) на основі спостережень потрібна для того, щоб забезпечити гнучке, ситуаційно залежне та обґрунтоване керування колаборативним роботом-маніпулятором у реальних умовах, де доступ до повної інформації про стан системи часто є обмеженим або неточним.

$$\dot{b}(\dot{s}) = \eta \cdot O(o|\dot{s}, a) \sum_{s \in S} T(\dot{s}|s, a) b(s), \quad (12)$$

де $\dot{b}(\dot{s})$ – оновлене вірування (*belief*), оцінка ймовірності того, що система тепер перебуває у стані $\dot{s}$ після виконання дії a , та отримання спостереження o ; $b(s)$ – поточна оцінка ймовірності того, що система перебуває в стані s до виконання дії; $O(o|\dot{s}, a)$ – функція спостереження, тобто ймовірність отримати спостереження o , якщо система фактично перебуває в стані $\dot{s}$ після виконання дії a ; $T(\dot{s}|s, a)$ – функція переходу, тобто ймовірність того, що система перейде зі стану s у новий стан $\dot{s}$ після виконання дії a ; моделює динаміку навколишнього середовища

та реакцію робота; η – нормалізувальний коефіцієнт, який гарантує, що всі ймовірності в новому $\text{belief } \hat{b}(\dot{s})$ сумуються до 1; використовується для збереження коректної ймовірнісної інтерпретації.

Модель (12) дає змогу роботу, який не має повного доступу до фактичного стану системи, адаптувати керування на основі обмежених спостережень. Так він формує нову стратегію дій, що відповідає поточній ситуації в робочому середовищі.

Запропонована ієрархічна модель має певні переваги: використовує кінематику для обчислення положення в просторі; за допомогою динаміки формує точні моменти управління; інтегрує адаптивний модуль на основі *Fuzzy Logic*, який бере до уваги відстань до людини та рівень навантаження для адаптивного регулювання швидкості руху; підвищує безпеку й гнучкість колаборативного маніпулятора в умовах мінливого довкілля.

Розроблення програми для моделювання адаптивного ієрархічного високорівневого керування триланкового колаборативного робота-маніпулятора

Вибір мови програмування *Python* обґрунтований її високим рівнем абстракції, широкою підтримкою наукових та інженерних бібліотек, зокрема *NumPy*, *SciPy*, *Matplotlib* та *scikit-fuzzy*, що дає змогу ефективно реалізовувати математичні моделі, логіку адаптивного керування та візуалізацію результатів моделювання [21, 22]. *Python* має гнучкий синтаксис, який спрощує інтеграцію модулів штучного інтелекту, таких як *Fuzzy Logic*, нейронні мережі або методи

машинного навчання для розширення функціональності систем керування роботизованими комплексами. Середовище розробки *PyCharm* 2022.2.3 обрано завдяки своїй стабільності, підтримці інтеграції з віртуальними середовищами, зручній навігації по коду, підсвітці синтаксису та відлагодженню, а також можливості роботи з проектами, що містять складні структури даних та графічні бібліотеки. Завдяки цим перевагам поєднання *Python* і *PyCharm* створює оптимальне середовище для розроблення програмного забезпечення в галузі інтелектуального керування роботами.

Для перевірки адекватності розроблених математичних моделей і виразів на базі розробленої програми моделювання адаптивного ієрархічного високорівневого керування триланкового колаборативного робота-маніпулятора застосовуватимемо певні показники. Зокрема D – набір значень відстані до людини в сантиметрах, який рівномірно розподілений у межах від 0 до 200 см. Цей параметр моделює безпечну дистанцію між роботом і людиною, яка впливає на адаптацію швидкості та поведінки робота. Менша відстань вказує на потребу зменшення швидкості руху маніпулятора для забезпечення безпеки. Показник F – набір значень навантаження на виконавчий орган робота у відсотках, який рівномірно варіюється від 0% до 100%. Цей параметр впливає на динаміку руху та керування, оскільки збільшення навантаження потребує адаптації крутного моменту, сили та швидкості, щоб уникнути перенавантаження або втрати точності. Отримані результати моделювання за вказаних вище вхідних параметрів зображені на рис. 2.

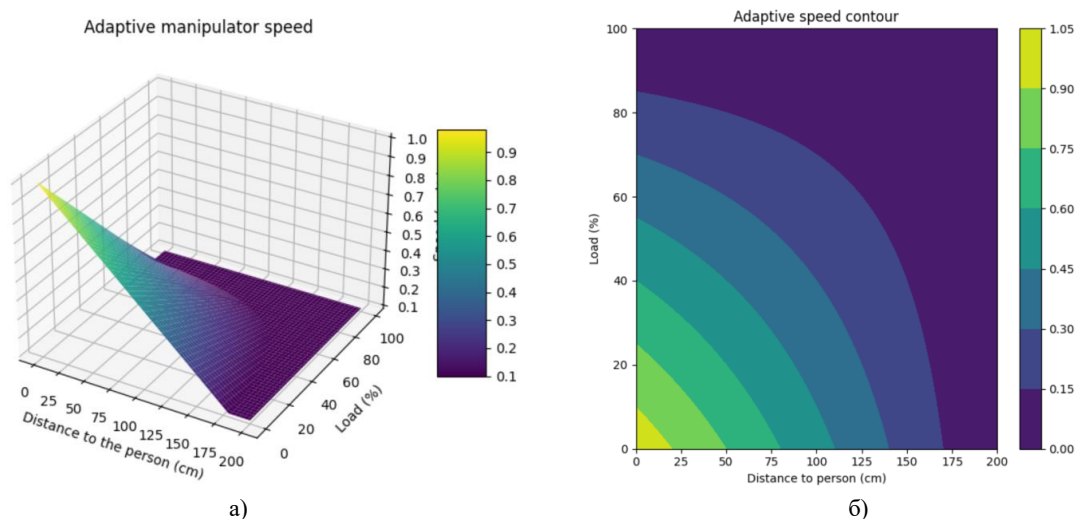


Рис. 2. Отримані результати моделювання: а) 3D-графік адаптивний швидкості маніпулятора;
б) 2D-графік контуру адаптивний швидкості

На 3D-графіку (рис. 2, а) подано залежність адаптивної швидкості маніпулятора від двох ключових параметрів – відстані до людини та навантаження на виконавчий орган. Поверхня, що утворюється в просторі параметрів, демонструє, як система управління знижує швидкість маніпулятора в умовах потенційного ризику для людини або перевантаження конструкції. Якісний аналіз показує, що швидкість руху ефектора є максимальною, коли навантаження є мінімальним, а відстань до людини – максимальною. Це свідчить про те, що робот працює на повну потужність тільки тоді, коли умови є безпечними й не створюють загрози для оточення. Із зменшенням відстані до людини, навіть за невеликого навантаження, швидкість плавно знижується, що відповідає принципам колаборативної безпеки відповідно до концепції Індустрія 5.0. У разі максимального навантаження, навіть за великої відстані, система суттєво знижує швидкість. Це свідчить про те, що взято до уваги механічні обмеження конструкції.

Отже, адаптивна стратегія забезпечує подвійний захист – як від зіткнення з людиною, так і від механічного перенавантаження. Чисельний аналіз показує, що швидкість нормалізується в межах від 0.1 до 1.0, де 1.0 відповідає оптимальному режиму роботи, а значення близькі до 0.1 – захищеним або критичним умовам. Найбільші швидкості спостерігаються в точках, де відстань перевищує 150 см, а навантаження не перевищує 20%. Тоді як за умови відстані меншій ніж 50 см і навантаження понад 80% швидкість суттєво падає. Це узгоджується з логікою нечіткого регулювання, яке гнучко адаптує поведінку робота до зовнішніх умов.

На 2D-графіку контуру адаптивної швидкості маніпулятора (рис. 2, б) візуалізовано зміну швидкості руху виконавчого органа залежно від відстані до людини та навантаження. Кожна лінія контуру відповідає певному рівню швидкості, що дає змогу чітко бачити градієнт змін. Якісний аналіз показує, що максимальна швидкість спостерігається в ділянці, де навантаження є мінімальним, а відстань до людини не значна. Цей результат демонструє, що за відсутності небезпеки зіткнення та механічного перенавантаження система дає змогу маніпулятору працювати на повну швидкість.

Залежно від зростання навантаження або зменшення відстані до людини контури зміщуються до нижчих значень швидкості, що свідчить про

впровадження адаптивної стратегії регулювання. Найбільш насичена зона з мінімальними значеннями швидкості розташована в правому верхньому куті графіка, де поєднуються високе навантаження та незначна відстань – умови, що вимагають максимальної обережності. Чисельно можна оцінити, що швидкість у цій зоні прямує до нуля або приймає мінімальні допустимі значення, що забезпечує безпеку людини та захист механізмів. Візуально видно плавний перехід між різними режимами роботи, що вказує на ефективну роботу нечіткого регулятора, реалізованого на основі моделі високорівневого адаптивного керування. Такий підхід повністю відповідає вимогам стандартів безпеки роботизованих систем у концепції Індустрія 5.0. Система здатна не лише реагувати на зміну умов, а й забезпечувати оптимальний баланс між продуктивністю та безпекою, адаптуючи поведінку маніпулятора в реальному часі.

Heatmap оптимальної дії, зображений на рис. 3, демонструє, як система залежно від відстані між виконавчим елементом робота та людиною обирає безпечну й водночас ефективну дію – зупинку, уповільнення або продовження руху.

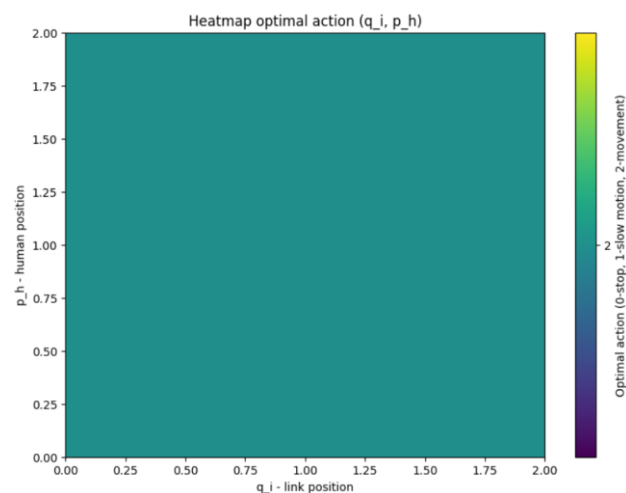


Рис. 3. *Heatmap* оптимальної дії

На графіку *Heatmap* оптимальної дії (рис. 3) видно, що система в усіх точках простору станів обирає одну й ту саму дію, що візуалізовано єдиним кольором по всій площині. Це свідчить про домінування одного рішення – рух (2), що може означати недостатню чутливість моделі до змін позиції маніпулятора та людини. Така ситуація ймовірна, якщо функція винагороди надто сильно стимулює ефективність, ігноруючи безпекові аспекти

або якщо коефіцієнти у функції винагороди некоректно налаштовані. Отриманий результат свідчить про необхідність тоншого балансування вагових коефіцієнтів α та β або модифікації функції переходу чи винагороди для забезпечення адаптивної поведінки, особливо в критичних точках взаємодії з людиною.

3D-графік функції винагороди, зображений на рис. 4, показує, що максимальна винагорода досягається за умови більшої дистанції до людини та дії "рух", але з огляду на вагові коефіцієнти безпеки та ефективності.

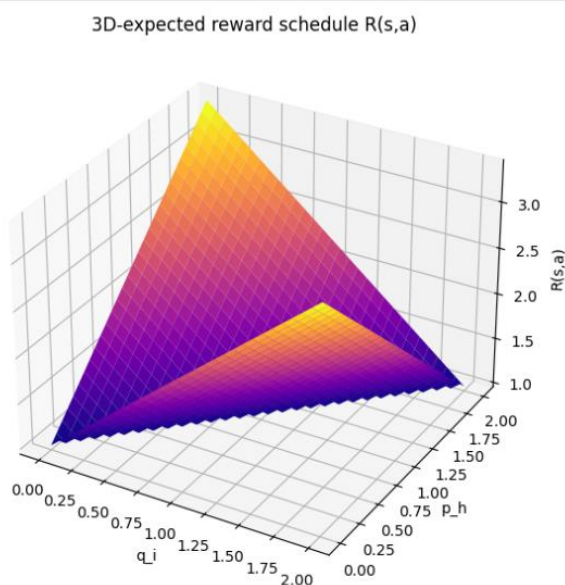
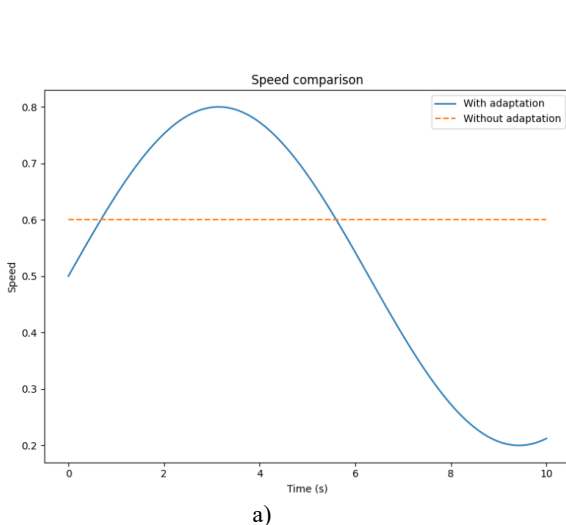
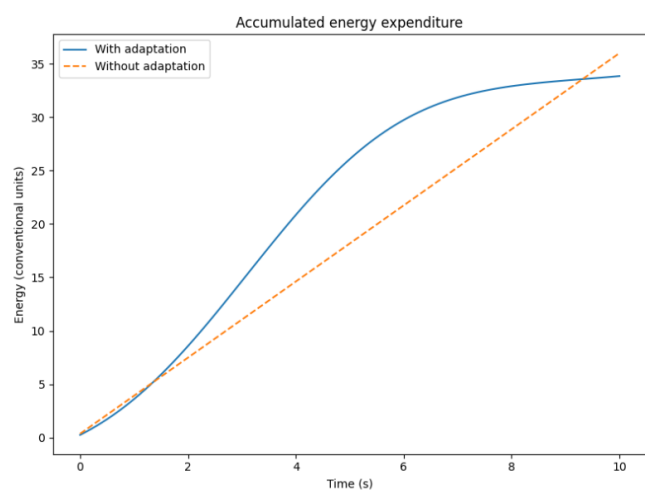


Рис. 4. 3D-графік винагороди



а)



б)

Рис. 5. Графіки порівняльного аналізу швидкостей та енергоспоживання:

а) порівняльна динаміка швидкості та б) накопиченого енергоспоживання

На поданому 3D-графіку очікуваної функції винагороди $R(s,a)$ спостерігається лінійне зростання винагороди зі збільшенням різниці між положенням маніпулятора q_i та положенням людини p_h , що свідчить про прямий вплив безпечної відстані на підвищення загального коефіцієнта винагороди. Максимальні значення $R(s,a)$ досягаються в умовах максимальної віддаленості між виконавчим органом робота та оператором, що відповідає принципу пріоритету безпеки в середовищах співпраці. Мінімальні значення фіксуються в разі збігу $q_i \approx p_i$, де ймовірність ризику є найвищою, тому адаптивна система віддає перевагу консервативній поведінці. Така залежність підтверджує адекватність побудованої функції винагороди до вимог безпечного керування. Результати експерименту також демонструють, що модель чутлива до зміни просторових параметрів, що дає змогу використовувати її в реальних сценаріях із присутністю людини.

Порівняльний аналіз швидкостей (рис. 5, а) демонструє адаптивну поведінку робота: порівняно з фіксованою швидкістю адаптивна дає змогу гнучко реагувати на зміну зовнішніх факторів. Графік накопиченого енергоспоживання (рис. 5, б) чітко ілюструє, що адаптивне керування сприяє заощадженню енергії в довгостроковій перспективі. Це підтверджує доцільність використання розроблених моделей у динамічному середовищі спільної взаємодії людини та робота.

На графіку порівняльної динаміки швидкості (рис. 5, а), чітко видно переваги адаптивного керування над фіксованою стратегією. Крива *With adaptation* демонструє гнучке реагування на зміни умов середовища, забезпечуючи плавне регулювання швидкості в діапазоні приблизно від 0.2 до 0.8 одиниць, що дає змогу підвищити безпеку та ефективність взаємодії з людиною. Тоді як *Without adaptation* є постійним значенням близько 0.6, яке ігнорує зміни зовнішніх факторів, таких як відстань до людини чи навантаження.

Отже, адаптивне керування забезпечує більш збалансований і безпечний режим роботи маніпулятора, що особливо важливо для середовищ співпраці з людиною. Експериментальні результати підтверджують доцільність використання адаптивних моделей у реальних умовах.

На графіку накопиченого енергоспоживання (рис. 5, б) видно, що система з адаптивним керуванням спочатку демонструє більші витрати енергії, проте після 7 с спостерігається уповільнення зростання споживаної енергії. Порівняно з неадаптивним підходом, для якого властиве лінійне й стабільне зростання, адаптивна система поступово оптимізує витрати, реагуючи на зміну умов навколишнього середовища. Це свідчить про те, що, попри вищі енергетичні витрати на початковому етапі, адаптивне керування знижує сумарне навантаження на приводи у фазі стабілізації. Експеримент підтверджує, що адаптивний підхід забезпечує більш раціональне використання енергії в динамічних умовах, що є важливим для тривалої та ефективної роботи колаборативного маніпулятора.

Висновки

Під час дослідження розроблено математичну модель адаптивного ієрархічного високорівневого керування для триланкового колаборативного робота-маніпулятора, що поєднує методи класичної динаміки, нечіткої логіки та принципи безпечної взаємодії людини з роботом. Результати підтверджують ефективність запропонованого підходу в умовах мінливого навантаження на виконавчий орган та варіативної відстані до оператора, що критично важливо в контексті впровадження концепції Індустрія 5.0, де пріоритетом є гнучка взаємодія між людиною та інтелектуальними системами. Комбінована модель керування дала змогу досягти адаптації швидкісного профілю руху в реальному часі, забезпечивши баланс між безпекою, точністю та енергоефективністю. Графічні результати демонструють передбачувану поведінку системи в різних ситуаціях, що підтверджує практичну реалізованість моделі. Реалізація математичного апарату у вигляді програмного модуля мовою *Python* із використанням середовища *PyCharm* забезпечує зручність для подальшої модифікації, інтеграції у віртуальні симулятори або фізичні робототехнічні комплекси. Рекомендовано впроваджувати розроблену модель у системи симуляційного навчання, робототехнічні тренажери та цифрові двійники для колаборативних роботів, а також використовувати її як базу для досліджень у сфері предиктивного та когнітивного керування в індустріальному середовищі.

Список літератури

1. Rijwani T., Kumari S., Srinivas R., Abhishek K., Iyer G., Vara H., Gupta M. Industry 5.0: A review of emerging trends and transformative technologies in the next industrial revolution. *International Journal on Interactive Design and Manufacturing (IJIDeM)*, 19(2), P. 667–679. 2025. DOI: <https://doi.org/10.1007/s12008-024-01943-7>
2. Sun X., Song Y. Unlocking the Synergy: Increasing productivity through Human-AI collaboration in the industry 5.0 Era. *Computers & Industrial Engineering*, 200, 2025. 110657 p. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cie.2024.110657>
3. Gonçalves A., Pereira T., Lopes D., Cunha F., Lopes F., Coutinho F., Ferreira N. M. F. Enhancing Nut-Tightening Processes in the Automotive Industry: Integration of 3D Vision Systems with Collaborative Robots. *Automation*, 6(1), 8. 2025. DOI: <https://doi.org/10.3390/automation6010008>
4. Nevliudov I., Yevsieiev V., Baker J. H., Ahmad M. A., Lyashenko V. Development of a cyber design modeling declarative Language for cyber physical production systems. *Journal of Mathematical and Computational Science*, 11(1), 2020. P. 520–542. DOI: <https://doi.org/10.28919/jmcs/5152>
5. Yuan F., Ren G., Deng Q., Wang X. Steam Generator Maintenance Robot Design and Obstacle Avoidance Path Planning. *Sensors*, 25(2), 2025. 514 p. DOI: <https://doi.org/10.3390/s25020514>
6. Recker T., Raatz A. Design and control of flexible handling systems based on mobile cooperative multi-robot-systems. *CIRP Annals*. 2025. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cirp.2025.04.059>

7. Pan Y. J., Buchanan S., Chen Q., Wan L., Chen N., Forbrigger S., Smith S. Survey on recent advances in planning and control for collaborative robotics. *IEEJ Journal of Industry Applications*, 14(2), 2025. P. 139–151. DOI: <https://doi.org/10.1541/ieejia.24005652>
8. Невлюдов І. ІІІ., Євсєєв В. В., Гурін Д. В. Model development of dynamic representation a model description parameters for the environment of a collaborative robot manipulator within the industry 5.0 framework. *Системи управління, навігації та зв'язку. Збірник наукових праць*, 1(79), 2025. P. 42–48. DOI: <https://doi.org/10.26906/SUNZ.2025.1.42-48>
9. Hu S., Wan Y., Liang X. Adaptive nonsingular fast terminal sliding mode trajectory tracking control for robotic manipulators with model feedforward compensation. *Nonlinear Dynamics*, 2025. P. 1–19. DOI: <https://doi.org/10.3390/electronics11223672>
10. Ben Hazem Z., Guler N., Altaif A. H. A study of advanced mathematical modeling and adaptive control strategies for trajectory tracking in the Mitsubishi RV-2AJ 5-DOF Robotic Arm. *Discover Robotics*, 1(1), 2. 2025. DOI: <https://doi.org/10.1007/s44430-025-00001-5>
11. Zhou H., Lin X. Intelligent redundant manipulation for long-horizon operations with multiple goal-conditioned hierarchical learning. *Advanced Robotics*, 39(6), 2025. P. 291–304. DOI: <https://doi.org/10.1080/01691864.2025.2475295>
12. Sun Z., Pang B., Yuan X., Xu X., Song Y., Song R., Li Y. Hierarchical reinforcement learning with curriculum demonstrations and goal-guided policies for sequential robotic manipulation. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, №153, 2025. 110866 p. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engappai.2025.110866>
13. Wei Z., Luo X., Liu C. Hierarchical Temporal Logic Task and Motion Planning for Multi-Robot Systems. *Accepted by Robotics: Science and Systems*. 2025. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2504.18899>
14. Fan S., Meng M., Fu Y., Deng C. Distributed adaptive tracking control for fuzzy nonlinear MASs under round-robin protocol. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*. 2025. DOI: <https://doi.org/10.1109/TFUZZ.2025.3525989>
15. Liu H., Xu S., Song J., Ma B. Fuzzy control of uncertain dual-arm cooperative robots with quantitative performance and input deadzone. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, № 47(3), 126 p. 2025. DOI: <https://doi.org/10.1007/s40430-024-05377-w>
16. Urrea C. Hybrid Fault-Tolerant Control in Cooperative Robotics: Advances in Resilience and Scalability. In *Actuators*. Vol. 14, No. 4, 177 p. 2025. DOI: <https://doi.org/10.3390/act14040177>
17. Babiyola A. Recurrent Neural Networks for Real-Time Position Estimation of Robotic Arm End-Effector Coordinates. In *2025 International Conference on Artificial Intelligence and Data Engineering (AIDE)*. P. 34–40. 2025. DOI: <https://doi.org/10.1109/AIDE64228.2025.10986815>
18. Alwardat M. Y., Alwan H. Geometric jacobians derivation and kinematic singularity analysis for 6-dof robotic manipulator. *International Journal of Advanced Research in Computer Science*, №16(1). 2025. DOI: <https://doi.org/10.26483/ijarcs.v16i1.7178>
19. Wang Z., Xu L., Zhu X., Quan L., Chen W. H., Xu L., Ding S. Euler-Lagrange-Model-Based Torque Assignment Control for Dual In-Wheel PM Motors With Voltage Vectors Integrated Modulation. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*. 2025. P. 1–14. DOI: <https://doi.org/10.1109/TIE.2025.3555041>
20. Lavaill M., Chen X., Heinrich S., Pivonka P., Leyendecker S. Muscle path predictions using a discrete geodesic Euler-Lagrange model in constrained optimisation: comparison with OpenSim and experimental data. *Multibody System Dynamics*, P. 1–23. 2025. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11044-025-10055-3>
21. Tran H. C., Tran A. D., Le K. H. DetectVul: A statement-level code vulnerability detection for Python. *Future Generation Computer Systems*, № 163, 107504 p. 2025. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.future.2024.107504>
22. Mechri A., Ferrag M. A., Debbah M. Secureqwen: Leveraging llms for vulnerability detection in python codebases. *Computers & Security*, № 148, 104151 p. 2025. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cose.2024.104151>

References

1. Rijwani, T., Kumari, S., Srinivas, R., Abhishek, K., Iyer, G., Vara, H., Gupta, M. (2025), "Industry 5.0: A review of emerging trends and transformative technologies in the next industrial revolution". *International Journal on Interactive Design and Manufacturing (IJIDeM)*, 19(2), P. 667–679. DOI: <https://doi.org/10.1007/s12008-024-01943-7>
2. Sun, X., Song, Y. (2025), "Unlocking the Synergy: Increasing productivity through Human-AI collaboration in the industry 5.0 Era". *Computers & Industrial Engineering*, 200, 110657 p. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cie.2024.110657>
3. Gonçalves, A., Pereira, T., Lopes, D., Cunha, F., Lopes, F., Coutinho, F., Ferreira, N. M. F. (2025), "Enhancing Nut-Tightening Processes in the Automotive Industry: Integration of 3D Vision Systems with Collaborative Robots". *Automation*, 6(1), 8. DOI: <https://doi.org/10.3390/automation6010008>

4. Nevliudov, I., Yevsieiev, V., Baker, J. H., Ahmad, M. A., Lyashenko, V. (2020), "Development of a cyber design modeling declarative Language for cyber physical production systems". *Journal of Mathematical and Computational Science*, 11(1), P. 520–542. DOI: <https://doi.org/10.28919/jmcs/5152>
5. Yuan, F., Ren, G., Deng, Q., Wang, X. (2025), "Steam Generator Maintenance Robot Design and Obstacle Avoidance Path Planning". *Sensors*, 25(2), 514 p. DOI: <https://doi.org/10.3390/s25020514>
6. Recker, T., Raatz, A. (2025), "Design and control of flexible handling systems based on mobile cooperative multi-robot-systems". *CIRP Annals*. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cirp.2025.04.059>
7. Pan, Y. J., Buchanan, S., Chen, Q., Wan, L., Chen, N., Forbrigger, S., Smith, S. (2025), "Survey on recent advances in planning and control for collaborative robotics". *IEEEJ Journal of Industry Applications*, 14(2), P. 139–151. DOI: <https://doi.org/10.1541/ieejia.24005652>
8. Nevlyudov, I., Yevsieiev, V., Gurin, D. (2025), "Model development of dynamic representation a model description parameters for the environment of a collaborative robot manipulator within the industry 5.0 framework". *Control, Navigation and Communication System*. 1(79), P. 42–48. DOI: <https://doi.org/10.26906/SUNZ.2025.1.42-48>
9. Hu, S., Wan, Y., Liang, X. (2025), "Adaptive nonsingular fast terminal sliding mode trajectory tracking control for robotic manipulators with model feedforward compensation". *Nonlinear Dynamics*, P. 1–19. DOI: <https://doi.org/10.3390/electronics11223672>
10. Ben, Hazem Z., Guler, N., Altaif, A. H. (2025), "A study of advanced mathematical modeling and adaptive control strategies for trajectory tracking in the Mitsubishi RV-2AJ 5-DOF Robotic Arm". *Discover Robotics*, 1(1), 2. DOI: <https://doi.org/10.1007/s44430-025-00001-5>
11. Zhou, H., Lin, X. (2025), "Intelligent redundant manipulation for long-horizon operations with multiple goal-conditioned hierarchical learning". *Advanced Robotics*, 39(6), P. 291–304. DOI: <https://doi.org/10.1080/01691864.2025.2475295>
12. Sun, Z., Pang, B., Yuan, X., Xu, X., Song, Y., Song, R., Li, Y. (2025), "Hierarchical reinforcement learning with curriculum demonstrations and goal-guided policies for sequential robotic manipulation". *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, №153, 110866 p. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engappai.2025.110866>
13. Wei, Z., Luo, X., Liu, C. (2025), "Hierarchical Temporal Logic Task and Motion Planning for Multi-Robot Systems". *Accepted by Robotics: Science and Systems*. 2025. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2504.18899>
14. Fan, S., Meng, M., Fu, Y., Deng, C. (2025), "Distributed adaptive tracking control for fuzzy nonlinear MASs under round-robin protocol". *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*. 2025. DOI: <https://doi.org/10.1109/TFUZZ.2025.3525989>
15. Liu, H., Xu, S., Song, J., Ma, B. (2025), "Fuzzy control of uncertain dual-arm cooperative robots with quantitative performance and input deadzone". *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, № 47(3), 126 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/s40430-024-05377-w>
16. Urrea, C. (2025), "Hybrid Fault-Tolerant Control in Cooperative Robotics: Advances in Resilience and Scalability". *In Actuators*. Vol. 14, No. 4, 177 p. DOI: <https://doi.org/10.3390/act14040177>
17. Babiola, A. (2025), "Recurrent Neural Networks for Real-Time Position Estimation of Robotic Arm End-Effector Coordinates". *In 2025 International Conference on Artificial Intelligence and Data Engineering (AIDE)*. P. 34–40. DOI: <https://doi.org/10.1109/AIDE64228.2025.10986815>
18. Alwardat, M. Y., Alwan, H. (2025), "Geometric jacobians derivation and kinematic singularity analysis for 6-dof robotic manipulator". *International Journal of Advanced Research in Computer Science*, №16(1). DOI: <https://doi.org/10.26483/ijarcs.v16i1.7178>
19. Wang, Z., Xu, L., Zhu, X., Quan, L., Chen, W. H., Xu, L., Ding, S. (2025), "Euler-Lagrange-Model-Based Torque Assignment Control for Dual In-Wheel PM Motors With Voltage Vectors Integrated Modulation". *IEEE Transactions on Industrial Electronics*. P. 1–14. DOI: <https://doi.org/10.1109/TIE.2025.3555041>
20. Lavaill, M., Chen, X., Heinrich, S., Pivonka, P., Leyendecker, S. (2025), "Muscle path predictions using a discrete geodesic Euler-Lagrange model in constrained optimisation: comparison with OpenSim and experimental data". *Multibody System Dynamics*, P. 1–23. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11044-025-10055-3>
21. Tran, H. C., Tran, A. D., Le, K. H. (2025), "DetectVul: A statement-level code vulnerability detection for Python". *Future Generation Computer Systems*, № 163, 107504 p. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.future.2024.107504>
22. Mechri, A., Ferrag, M. A., Debbah, M. (2025), "Secureqwen: Leveraging llms for vulnerability detection in python codebases". *Computers & Security*, № 148, 104151 p. 2025. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cose.2024.104151>

Відомості про авторів / About the Authors

Невлюдов Ігор Шакирович – доктор технічних наук, професор, Харківський національний університет радіоелектроніки, завідувач кафедри комп'ютерно-інтегрованих технологій, автоматизації та робототехніки, м. Харків, Україна; e-mail: igor.nevliudov@nure.ua; ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-9837-2309>.

Євсєєв Владислав В'ячеславович – доктор технічних наук, професор, Харківський національний університет радіоелектроніки, професор кафедри комп'ютерно-інтегрованих технологій, автоматизації та робототехніки, м. Харків, Україна; e-mail: vladyslav.yevsieiev@nure.ua; ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-2590-7085>.

Максимова Світлана Святославівна – кандидат технічних наук, доцент, Харківський національний університет радіоелектроніки, доцент кафедри комп'ютерно-інтегрованих технологій, автоматизації та робототехніки, м. Харків, Україна; e-mail: svitlana.milyutina@nure.ua; ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-1375-9337>

Артиух Роман Володимирович – кандидат технічних наук, Державне підприємство "Південний державний проектно-конструкторський і науково-дослідний інститут авіаційної промисловості", директор, Харківський національний університет радіоелектроніки, доцент кафедри комп'ютерно-інтегрованих технологій, автоматизації та робототехніки, м. Харків, Україна; e-mail: roman.artiuh77@gmail.com; ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-5129-2221>

Nevliudov Igor – Dr. Sc. (Engineering), Professor, Kharkiv National University of Radioelectronics, Head the Department of Computer-Integrated Technologies, Automation and Robotics, Kharkiv, Ukraine.

Yevsieiev Vladyslav – Dr. Sc. (Engineering), Professor, Kharkiv National University of Radioelectronics, Professor the Department of Computer-Integrated Technologies, Automation and Robotics, Kharkiv, Ukraine.

Maksymova Svitlana – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Kharkiv National University of Radio Electronics, Associate Professor of the Department of Computer Integrated Technologies, Automation and Robotics, Kharkiv, Ukraine.

Artiukh Roman – Candidate of Technical Sciences, National Design and Research Institute of Aerospace Industries, Kharkiv National University of Radio Electronics, Associate Professor of the Department of Computer Integrated Technologies, Automation and Robotics, Kharkiv, Ukraine.

MATHEMATICAL MODEL OF ADAPTIVE HIERARCHICAL HIGH-LEVEL CONTROL FOR A 3-LINK COLLABORATIVE ROBOT-MANIPULATOR

In the context of the development of the Industry 5.0 concept, which envisages close interaction between humans and intelligent automated systems, research into mechanisms for flexible and safe control of collaborative robot manipulators is becoming particularly important. **The objective of this study is** to construct a mathematical model of hierarchical high-level control for a three-link collaborative robot that allows the manipulator's behavior to be adapted to dynamic changes in the production environment and the presence of humans in the work area. The purpose of this article is to develop a mathematical model that combines the classical approach to modeling dynamics with the following methods: using Euler-Lagrange equations and modern adaptive control algorithms implemented through fuzzy logic, which allows optimizing the speed and trajectory of the executive bodies under variable load and partial uncertainty of the environment. The proposed model implements a multi-level control architecture that takes into account not only the physical parameters of the manipulator, but also the cognitive aspects of interaction with the operator and the environment by constructing a Fuzzy-Rule-based controller. The article presents the formalization of mathematical expressions, describes all levels of the control system, their purpose and interconnection, and performs numerical modeling using Python and PyCharm. **The results** of the modeling confirmed the effectiveness of the proposed system in the presence of humans, ensuring a safe distance, adaptation to the load, and compliance with the specified production parameters. **Conclusions** indicate that the proposed model can significantly improve the quality of manipulator control in Industry 5.0 conditions, especially when working in hybrid environments. The developed model can be adapted to different types of collaborative robots, which opens up prospects for its further improvement, in particular through integration with neural network approaches, deep learning, and multi-agent systems within the framework of distributed intelligent manufacturing.

Keywords: Industry 5.0; collaborative robot; mathematical model; hierarchical control; fuzzy logic; adaptive control; manipulator; PyCharm; Python; Fuzzy Logic.

Бібліографічні описи / Bibliographic descriptions

Невлюдов І. Ш., Євсєєв В. В., Максимова С. С., Артиух Р. В. Математична модель адаптивного ієрархічного високорівневого керування триланкового колаборативного робота-маніпулятора. *Сучасний стан наукових досліджень та технологій в промисловості*. 2025. № 2 (32). С. 58–68. DOI: <https://doi.org/10.30837/2522-9818.2025.2.058>

Nevliudov, I., Yevsieiev, V., Maksymova, S., Artiukh, R. (2025), "Mathematical model of adaptive hierarchical high-level control of a three-link collaborative robot-manipulator", *Innovative Technologies and Scientific Solutions for Industries*, No. 2 (32), P. 58–68. DOI: <https://doi.org/10.30837/2522-9818.2025.2.058>