

Ш. Г. Гасанов, д-р техн. наук

Азербайджанский технический университет,
г. Баку, Азербайджан
e-mail: hssh3883@gmail.com

УДК 539.375

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАРОЖДЕНИЯ ТРЕЩИНЫ В КОМПОЗИТЕ ПРИ ИЗГИБЕ

Ключевые слова: связующее, включения, пластина из композитного материала, изгиб, зоны предразрушения, трещинообразование.

Проведено математическое описание модели зарождения трещины в связующем композита при изгибе. Определение неизвестных параметров, характеризующих зародышевую трещину, сводится к решению сингулярного интегрального уравнения. Построена замкнутая система нелинейных алгебраических уравнений, решение которой позволяет прогнозировать трещинообразование в композите при изгибе в зависимости от геометрических и механических характеристик связующего и включений. Сформулирован критерий зарождения трещины в композите при действии изгибающих нагрузок.

Введение

Создание новых материалов, обладающих высокой прочностью, жесткостью и надежностью, открывает большие возможности их широкого применения в различных областях машиностроения и строительства. К ним, в частности, относятся волокнистые композиционные материалы. Решение различных задач техники требует объективной информации о напряженно-деформированном состоянии в элементах конструкций из композиционных материалов. Такую информацию можно получить только при учете основных особенностей этих материалов. На стадии проектирования новых конструкций из композитных материалов необходимо учитывать случаи, когда в материале могут возникать трещины. В связи с этим необходимо проводить предельный анализ, чтобы установить, что предполагаемые исходные повреждения не будут расти до критических размеров и не вызовут разрушения в течение расчетного срока службы.

В настоящее время одно из основных мест в механике композитных материалов занимают проблемы, связанные с особенностями их структуры. Одной же из основных особенностей композитных материалов, которые важно учитывать при исследовании различного рода вопросов механики составных тел, являются повреждения в их структурах. Указанные повреждения могут быть вызваны самим построением композитных материалов, а также могут быть результатом действия различных факторов при технологических процессах. Успешное применение на практике искусственно созданных композитных материалов в значительной мере связано с решением задач определения напряженно-деформированного состояния в них с учетом особенностей их структуры, в частности повреждений в связующем и армирующих элементах. Поэтому исследования напряженно-деформированного состояния в композиционных материалах с повреждением следует признать весьма актуальными. Вопросам напряженно-деформированного состояния и разрушения волокнистого композита посвящено большое число работ [1–22] и другие. Важное значение имеет разработка математической модели, позволяющей прогнозировать напряженно-деформированное состояние композита в стадии предразрушения (образования трещин).

Цель работы состоит в построении расчетной модели для составного тела «связующее-включение», позволяющей рассчитать предельные внешние изгибающие нагрузки, при которых происходит трещинообразование в композите.

Постановка задачи

Пусть неограниченная составная пластина (композит) подвергается изгибу средними моментами (изгиб на бесконечности) $M_x = M_x^\infty$, $M_y = M_y^\infty$, $H_{xy} = 0$. При нагружении композита в материале связующего будет возникать зона предразрушения, ориентированная в направлении максимальных растягивающих напряжений. Зона предразрушения моделируется как область ослабленных межчастичных связей материала. Считается, что при нагружении композита в ней (прослойке перенапряженного материала) образуется зона пластического течения. Исследования [23–25] возникновения областей с нарушенной структурой материала показывают, что в начальной стадии нагружений зоны предразрушения представ-

ляют собой узкий вытянутый слой, а затем с ростом внешней нагрузки внезапно появляется вторичная система зон ослабленных межчастичных связей материала.

Пусть, для определенности, внешняя изгибающая нагрузка изменяется так, что в зоне ослабленных межчастичных связей материала связующего осуществляется пластическое деформирование. Через некоторое число циклов нагружения возможность пластического деформирования в зоне ослабленных межчастичных связей материала исчерпывается, и раскрытие берегов зоны пластического течения резко возрастает. Если раскрытие берегов зоны предразрушения в точке максимальной концентрации достигает предельного значения δ_c для данного материала связующего, то в этой точке зарождается трещина (происходит разрыв межчастичных связей материала).

В процессе нагружения композита изгибающими моментами в материале связующего будет возникать зона предразрушения. Для математического описания взаимодействия берегов зоны предразрушения принято, что в ней между берегами имеются связи, которые сдерживают раскрытие берегов зоны ослабленных межчастичных связей материала. Взаимодействие берегов зоны предразрушения моделируется путем введения между ее берегами линий пластического скольжения (вырожденных полос пластических деформаций). Местоположение и размеры зон пластического течения зависят от вида материала и нагружения. Считается, что в зоне предразрушения имеет место пластическое течение при постоянном напряжении. При этом местоположение и размер зоны предразрушения заранее неизвестны и должны быть определены в процессе решения задачи. Анализ взаимодействия связующего с волокнами проводится на основе модели с одним волокном. Остальные волокна «размазываются», а материал вне

выделенного волокна представляется однородным и изотропным с соответствующими эффективными упругими постоянными (по правилу «смесей»). Взаимодействие других размазанных волокон и зон предразрушения осуществляется через соответствующие эффективные упругие постоянные. При этом нет ограничений на взаиморасположение и относительные размеры волокон и зон предразрушения. Считается, что зоны предразрушения не пересекаются между собой и волокном.

Начало системы координат Oxy , совместим с геометрическим центром волокна (рис. 1) в срединной плоскости составной пластины. Принято, что в круговое отверстие связующего вставлено упругое волокно из другого материала.

Считается, что всюду на границе соединения L ($\tau = R \exp(i\theta)$) имеет место жесткое сцепление различных материалов. В центре прямолинейной зоны предразрушения разместим начало локальной системы координат $O_1x_1y_1$, ось x_1 которой совпадает с линией зоны предразрушения и составляет угол α_1 осью x .

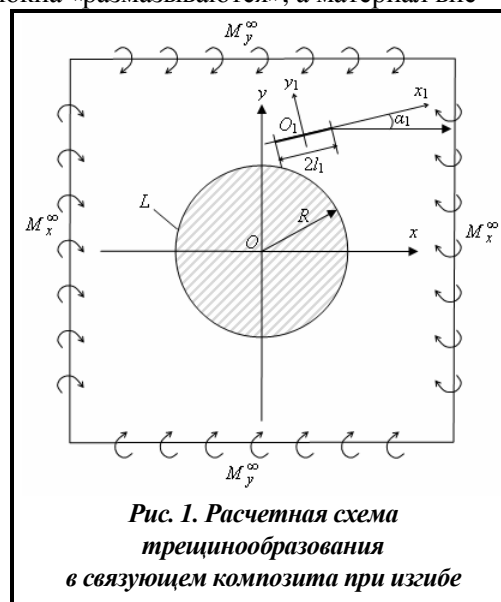


Рис. 1. Расчетная схема трещинообразования в связующем композита при изгибе

На контуре раздела сред должны выполняться условия

$$w = w_0, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\partial w_0}{\partial n}, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w_0}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = \frac{\partial^2 w_0}{\partial n^2}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial n \partial t} = \frac{\partial^2 w_0}{\partial n \partial t}, \quad (1)$$

где w и w_0 – прогибы связующего и волокна соответственно, n и t – натуральные координаты (нормаль и касательная к контуру L).

Эти соотношения (1) являются следствием непрерывности прогибов в композите, углов наклона касательной и величин изгибающих моментов.

При нагружении композита внешними изгибаемыми моментами в связях, соединяющих берега зон предразрушения, будут возникать нормальные $\sigma_{y_1} = \sigma_s$ и касательные напряжения $\tau_{x_1y_1} = \tau_s$. Здесь σ_s – предел текучести материала при растяжении; τ_s – предел текучести материале на сдвиг.

Граничные условия на берегах зоны предразрушения будут иметь следующий вид:

$$M_n = M_s, \quad N_n + \frac{\partial H_{nt}}{\partial t} = H_s,$$

где $M_s = \sigma_s h^2/4$; $H_s = \tau_s h^2/4$; h – толщина составной пластины (композита); M_n , H_n – удельные изгибающий и крутящий моменты; N_n – удельная поперечная сила.

Для определения значений внешней изгибающей нагрузки, при которой происходит трещинообразование в связующем, необходимо постановку задачи дополнить критерием появления трещины (разрыва межчастичных связей материала). В качестве такого условия принимаем критерий предельного раскрытия берегов зоны ослабленных межчастичных связей материала

$$\left| (v_1^+ - v_1^-) - i(u_1^+ - u_1^-) \right| = \delta_c, \quad (2)$$

где δ_c – характеристика сопротивления материала связующего трещинообразованию; $(v_1^+ - v_1^-)$ – нормальная составляющая раскрытия берегов зоны предразрушения; $(u_1^+ - u_1^-)$ – касательная составляющая раскрытия (сдвига) берегов зоны предразрушения.

Это дополнительное условие позволяет установить параметры составной пластины (композита), при которых происходит зарождение трещины в связующем.

Метод решения

Пусть в связующем имеется одна прямолинейная зона ослабленных межчастичных связей в состоянии пластического течения при постоянном напряжении (рис. 1). Моменты M_x , M_y , H_{xy} , поперечные силы N_x , N_y и прогиб w в технической теории изгиба пластин можно представить с помощью комплексных потенциалов Колосова-Мухелишвили [26]. На границе раздела сред

$$\varphi(\tau) + \tau\overline{\Phi(\tau)} + \overline{\Psi(\tau)} = \varphi_0(\tau) + \tau\overline{\Phi_0(\tau)} + \overline{\Psi_0(\tau)}, \quad (3)$$

$$n_*\varphi(\tau) + \tau\overline{\Phi(\tau)} + \overline{\Psi(\tau)} = \frac{D_0(1-\nu_0)}{D(1-\nu)} \left\{ n_0\varphi_0(\tau) + \tau\overline{\Phi_0(\tau)} + \overline{\Psi_0(\tau)} \right\}. \quad (4)$$

Здесь $\varphi(z)$, $\psi(z)$ и $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$ – комплексные потенциалы для связующего и волокна соответственно; τ – переменная точка на границе раздела сред; $\tau = \exp(i\theta)$ $n_* = -(3+\nu)/(1-\nu)$; D и D_0 – цилиндрическая жесткость связующего и волокна соответственно; ν и ν_0 – коэффициенты Пуассона материала связующего и волокна; $n_0 = -(3+\nu_0)/(1-\nu_0)$.

На берегах прямолинейной зоны предразрушения имеем условие

$$n_*\Phi(x_1) + \overline{\Phi(x_1)} + x_1\overline{\Phi'(x_1)} + \overline{\Psi(x_1)} = f_1^0 + iC_1, \quad (5)$$

где $f_1^0 = M_s - iH_s$; x_1 – аффикс точек зоны предразрушения; C_1 – действительная постоянная, определяемая в ходе решения задачи из условия равенства нулю скачка прогиба в вершине зоны предразрушения.

В принятых предположениях теории Кирхгофа рассматриваемая задача определения напряженно-деформированного состояния композитной пластины сводится к отысканию двух пар функций $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ и $\Phi_0(z)$, $\Psi_0(z)$ комплексной переменной $z=x+iy$, аналитических в соответствующих областях и удовлетворяющих краевым условиям (3)–(5).

Комплексные потенциалы $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$, описывающие напряженно-деформированное состояние волокна, ищем в виде

$$\varphi_0(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k, \quad \psi_0(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k. \quad (6)$$

Обозначим левую часть краевого условия (3) как f_1+if_2 и примем, что на контуре L эта комплексная функция разлагается в ряд Фурье

$$f_1 + if_2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{ik\theta}. \quad (7)$$

На основании краевого условия (3) и соотношений (6), (7), используя метод степенных рядов [26], находим коэффициенты a_n , b_n функций $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$

$$a_n = \frac{A_n}{R^n} \quad (n > 1), \quad \operatorname{Re} a_1 = \frac{A_1}{2R}, \quad b_n = \frac{\overline{A_{-n}}}{R^n} - (n+2) \frac{A_{n+2}}{R^n} \quad (n \geq 0).$$

Величины коэффициентов A_n ищем в ходе решения задачи для связующего. С помощью комплексных потенциалов $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$ после некоторых элементарных преобразований граничные условия на контуре $\tau = \exp(i\theta)$ раздела сред запишем следующим образом:

$$\varphi(\tau) + \tau \overline{\Phi(\tau)} + \overline{\Psi(\tau)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{ik\theta}, \quad (8)$$

$$n_* \varphi(\tau) + \tau \overline{\Phi(\tau)} + \overline{\Psi(\tau)} = \frac{D_0(1-\nu_0)}{D(1-\nu)} \left\{ n_0 \sum_{k=1}^{\infty} a_k R^k e^{ik\theta} + \bar{a}_1 \operatorname{Re} e^{i\theta} + \sum_{k=0}^{\infty} (k+2) \bar{a}_{k+2} R^{2k+2} e^{-ik\theta} + \sum_{k=0}^{\infty} \bar{b}_k R^k e^{-ik\theta} \right\} \quad (9)$$

Решение граничной задачи (5), (8), (9) ищем в виде

$$\Phi(z) = \varphi'_1(z) + \Phi_2(z), \quad \Psi(z) = \psi'_1(z) + \Psi_2(z), \quad (10)$$

$$\varphi_1(z) = -\frac{M_x^\infty + M_y^\infty}{4(1+\nu)D} z + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{-k}, \quad \psi_1(z) = \frac{M_y^\infty - M_x^\infty}{2(1+\nu)D} z + \sum_{k=1}^{\infty} d_k z^{-k}, \quad (11)$$

$$\Phi_2(z) = \frac{1}{\pi i(1+\kappa)} \int_{-l_1}^{l_1} \frac{g_1(t) dt}{t-z_1}, \quad \Psi_2(z) = \frac{1}{\pi i(1+\kappa)} e^{-2i\alpha_1} \int_{-l_1}^{l_1} \left[\frac{\overline{\kappa g_1(t)}}{t-z_1} - \frac{\bar{T}_1 e^{i\alpha_1}}{(t-z_1)^2} g_1(t) \right] dt, \quad (12)$$

где $T_1 = te^{i\alpha_1} + z_1^0$; $z_1 = e^{-i\alpha_1}(z - z_1^0)$; $\kappa = (3-\nu)/(1+\nu)$; $g_1(x_1)$ – искомая функция, характеризующая разрыв углов поворота при переходе через линию зоны предразрушения

$$\pm g_1(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial w^\pm}{\partial x} + i \frac{\partial w^\pm}{\partial y} \right).$$

Удовлетворяя функциями (10)–(12) граничным условиям (9), (10) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $\exp(i\theta)$, получим систему алгебраических уравнений для определения коэффициентов c_k , d_k , и A_k . Эти уравнения таковы, что позволяют в явном виде найти формулы для a_k , b_k , c_k , d_k , и A_k через функцию $g_1(x_1)$.

Удовлетворяя комплексными потенциалами (10)–(12) краевым условиям (5) на берегах прямолинейной зоны предразрушения, получим комплексное сингулярное интегральное уравнение относительно неизвестной функции $g_1(x_1)$

$$\int_{-l_1}^{l_1} \left[R_{11}(t, x_1) g_n^*(t, x_1) + S_{11}(t, x_1) \overline{g_n^*(t, x_1)} \right] dt = \pi F_1(x) \quad |x| \leq l_1, \quad (13)$$

где $g_n^*(t) = \frac{g_1(t)}{i(1+\kappa)}$, $F_1(x) = -\left[n_* \Phi_1(x) + \overline{\Phi_1(x)} + x \overline{\Phi_1'(x)} + \overline{\Psi_1(x)} \right] + f_1^0 + iC_1$; x, t, z_1^0 и l_1 – безразмерные, отнесенные к R ; R_{11}, S_{11} определяются по известным соотношениям ([27], формулы (VI. 62) при $n=k=1$).

К сингулярному интегральному уравнению (13) необходимо добавить равенство

$$\int_{-l_1}^{l_1} g_1(t) dt = 0, \quad (14)$$

обеспечивающее однозначность углов поворота срединной плоскости пластины при обходе контура зоны предразрушения.

Для определения постоянной C_1 (в общем случае кусочно-постоянной функции) имеем соотношение [28]

$$\operatorname{Re} \left[\int_{-l_1}^{l_1} t g_1(t) dt \right] = 0,$$

обеспечивающее равенство нулю скачка прогиба в вершинах зоны предразрушения.

Комплексное сингулярное интегральное уравнение (13) при дополнительном условии (14) сводится [23, 27] к системе M алгебраических уравнений относительно приближенных значений искомой функции $g_1(x_1)$ в узловых точках

$$\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M l_1 \left[g_1^*(t_m) R_{11}(l_1 t_m, l_1 x_r) + \overline{g_1^*(t_m)} S_{11}(l_1 t_m, l_1 x_r) \right] = F_1(x_r), \quad \sum_{m=1}^M g_1^*(t_m) = 0, \quad (15)$$

где $r=1, 2, \dots, M-1$, $t_m = \cos \frac{2m-1}{2M} \pi$, $x_r = \cos \frac{\pi r}{M}$.

Если в системе (15) перейти к комплексно сопряженным величинам, то получим еще одну систему M алгебраических уравнений.

Для замкнутости полученных алгебраических уравнений не хватает двух комплексных уравнений, определяющих местоположения зоны предразрушения (координаты вершин зоны предразрушения).

Так как решение сингулярного интегрального уравнения (13) должно искажаться в классе всюду ограниченных функций (напряжений), то к системе (15) необходимо добавить условия ограниченности напряжений на концах зоны предразрушения $x_1 = \pm l_1$. Эти условия являются условиями разрешимости сингулярного интегрального уравнения в классе всюду ограниченных функций. Упомянутые дополнительные условия имеют вид

$$\sum_{m=1}^M (-1)^{M+m} g_1^*(t_m) \operatorname{tg} \frac{2m-1}{4M} \pi = 0, \quad \sum_{m=1}^M (-1)^m g_1^*(t_m) \operatorname{ctg} \frac{2m-1}{4M} \pi = 0, \quad (16)$$

Добавляя эти два комплексных уравнения (16) к полученным ранее уравнениям, получаем замкнутую объединенную алгебраическую систему. Из-за неизвестной длины зоны предразрушения объединенная система алгебраических уравнений нелинейна. Численное решение объединенной системы позволяет найти координаты вершин (местоположение) и размер зоны предразрушения, значения $g_1^*(t_m)$ ($m=1, 2, \dots, M$). Очевидно, что, определив координаты вершин зоны предразрушения, по известным формулам аналитической геометрии можно найти ее размер, координаты z_1^0 центра и угол α_1 с осью x (рис. 1).

Полученные системы уравнений относительно $g_1(t_m)$ ($m=1, 2, \dots, M$) позволяют при заданной внешней изгибающей нагрузке определить напряженно-деформированное состояние композита при наличии зоны ослабленных межчастичных связей материала в связующем. Численный расчет был выполнен для волокна $\nu=0,30$; $\mu_0=4,5 \cdot 10^5$ МПа и связующего $\nu=0,32$; $\mu_0=2,6 \cdot 10^5$ МПа.

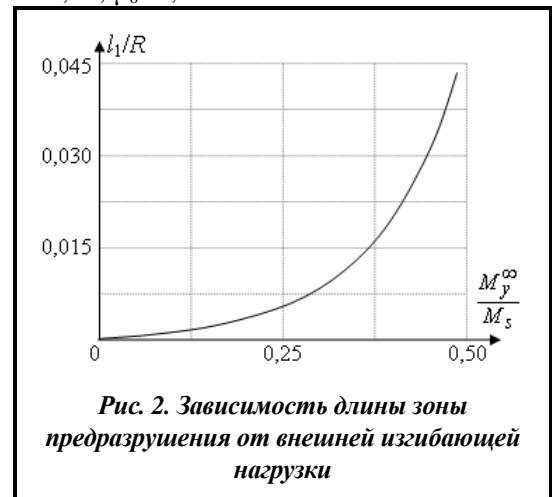
На рис. 2 представлен график зависимости длины зоны предразрушения l_1/R от внешней изгибающей нагрузки M_y^∞/M_s . Для этого случая найдено $\alpha_1=42^\circ$, $z_1^0 = 1,17R e^{i\pi/8}$.

С помощью полученного решения вычислим перемещения на берегах зоны предразрушения и, используя критерий (2) трещинообразования, находим

$$\left| - \int_{-l_1}^{x_1^0} g_1^*(x_1) dx_1 \right| = \delta_c, \quad (17)$$

где x_1^0 – координата точки зоны предразрушения, в которой происходит разрыв межчастичных связей материала.

Значение внешней изгибающей нагрузки, вызывающей появление трещины, определяется из соотношения (17). Объединенная разрешающая система уравнений из-за неизвестной величины l_1 оказалась нелинейной. Для ее решения используется метод последовательных приближений. Решается объединенная система уравнений при некотором определенном значении l_1^* относительно неизвестных c_k , d_k , A_k и $g_1^*(t_m)$. Значение l_1^* и найденные величины c_k , d_k , A_k и $g_1^*(t_m)$ подставляются в (16), т.е. в неиспользованные уравнения объединенной системы. Взятые значения параметра l_1^* и соответствующие им значения c_k , d_k , A_k и $g_1^*(t_m)$ не будут, вообще говоря, удовлетворять уравнениям (16). Подбирая значения параметра



l_1^* , будем многократно повторять вычисления до тех пор, пока уравнения (16) объединенной системы не будут удовлетворяться с заданной точностью. Объединенная система уравнений в каждом приближении решалась методом Гаусса с выбором главного элемента для различных значений M .

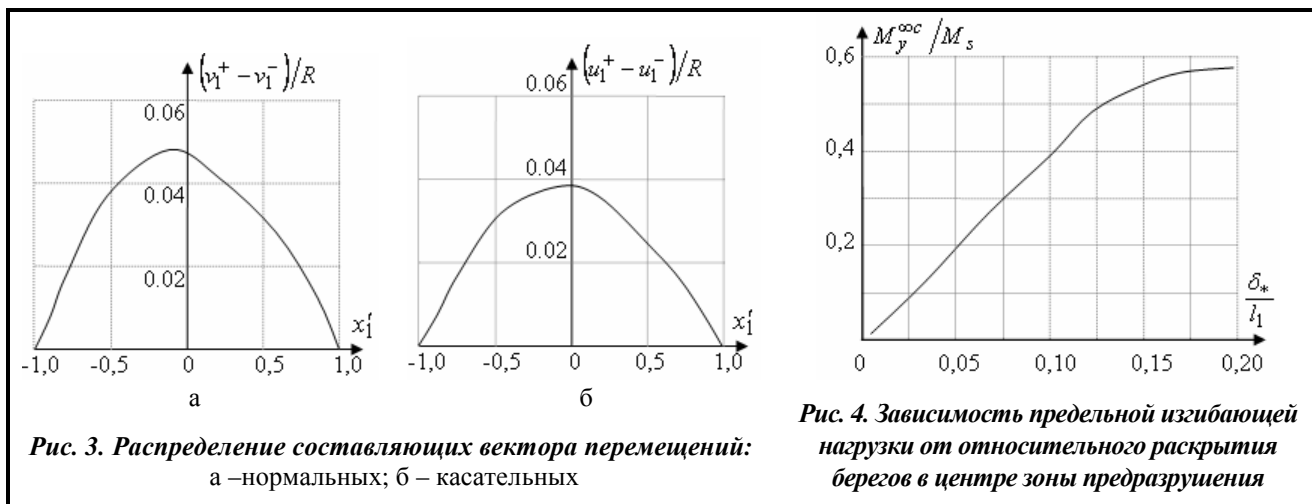
Таким образом, совместное решение объединенной алгебраической системы и условия (17) позволяет (при заданных характеристиках трещиностойкости связующего) определить предельную величину внешней изгибающей нагрузки, местоположение и размер зоны предразрушения для состояния предельного равновесия, при котором происходит трещинообразование.

На рис. 3 представлены графики распределения нормальных $(v_1^+ - v_1^-)/R$ и касательных $(u_1^+ - u_1^-)/R$ составляющих вектора перемещений. При расчете были использованы безразмерные координаты $x_1' = x_1/l_1$.

На рис. 4 представлена зависимость предельной изгибающей нагрузки $M_y^{\infty c}/M_s$ от относительного раскрытия берегов δ_*/l_1 в центре зоны предразрушения. Здесь $\alpha_1=42^\circ$, $\delta_* = \frac{\pi \delta_c \mu}{(1 + \kappa) M_s}$.

Полученная объединенная алгебраическая система уравнений задачи позволяет получить решение с любой наперед заданной точностью.

Анализ модели трещинообразования в связующем композита в процессе нагружения изгибающей нагрузкой сводится к параметрическому совместному исследованию объединенной разрешающей алгебраической системы задачи и критерия появления трещины (17) при различных значениях свободных параметров пластины из композитного материала. Это различные геометрические и механические характеристики материалов связующего и волокна.



Выводы

Практика использования волокнистых композитов показывает, что на стадии проектирования необходимо учитывать случаи, когда в связующем могут возникать трещины. Существующие методы прочностного расчета волокнистого композита, как правило, игнорируют это обстоятельство. Такое положение делает невозможным проектирование композита минимальной материалоемкости при гарантированной надежности и долговечности. В связи с этим необходимо проводить предельный анализ композита, чтобы установить предельные изгибающие нагрузки, при которых происходит трещинообразование в связующем. Размер предельной минимальной зоны ослабленных межчастичных связей материала, при которой происходит зарождение трещины, рекомендуется рассматривать как проектную характеристику материала связующего. На основе предложенной расчетной модели, учитывающей в композите наличие повреждений (зон ослабленных межчастичных связей материала) разработан метод расчета параметров композита, при которых происходит трещинообразование. Зная основные значения предельных параметров формирования трещин и влияние на них свойств материалов, можно обоснованно управлять явлением трещинообразования путем конструкторско-технологических решений на стадии проектирования.

Литература

1. Greco F., Leonetti L., Lonetti P. A two-scale failure analysis of composite materials in presence of fiber/matrix crack initiation and propagation. *Composite Structures*. 2013. Vol. 95. P. 582–597.
2. Brighenti R., Carpinteri A., Spagnoli A., Scorza D. Continuous and lattice models to describe crack paths in brittle–matrix composites with random and unidirectional fibres. *Eng. Fracture Mech.* 2013. Vol. 108. P. 170–182.
3. Mirsalimov V. M., Hasanov F. F. Interaction between periodic system of rigid inclusions and rectilinear cohesive cracks in an isotropic medium under transverse shear. *Acta Polytechnica Hungarica*. 2014. Vol. 11. Issue 5. P. 161–176.
4. Гасанов Ф. Ф. Разрушение композита, армированного однонаправленными волокнами. *Механика композит. материалов*. 2014. Т. 50. № 5. С. 829–842.
5. Мирсалимов В. М., Гасанов Ф. Ф. Взаимодействие периодической системы инородных упругих включений, поверхность которых равномерно покрыта однородной цилиндрической пленкой, и двух систем прямолинейных трещин с концевыми зонами. *Проблемы машиностроения и надежности машин*. 2014. Т. 43. № 5. С. 70–78.
6. Hao W., Yao X., Ma Y., Yuan Y. Experimental study on interaction between matrix crack and fiber bundles using optical caustic method. *Eng. Fracture Mech.* 2015. 134. P. 354–367.
7. Гасанов Ф. Ф. Моделирование зарождения трещины сдвига в волокне композита, армированного однонаправленными волокнами. *Проблемы. машиностроения*. 2014. Т. 17. № 2. С. 17–25.
8. Гасанов Ф. Ф. Зарождение трещины в композите, армированном однонаправленными ортотропными волокнами при продольном сдвиге. *Механика машин, механизмов и материалов*. 2014. № 2. С. 45–50.
9. Каюмов Р. А., Луканкин С. А., Паймушин В. Н., Холмогоров С. А. Идентификация механических характеристик армированных волокнами композитов. *Уч. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*. 2015. Т. 157. Кн. 4. С. 112–132.
10. Мирсалимов В. М., Гасанов Ф. Ф. Взаимодействие периодической системы инородных включений и когезионных трещин при продольном сдвиге. *Строит. механика инж. конструкций и сооружений*. 2015. № 2. С. 18–28.
11. Полилов А. Н. Механизмы уменьшения концентрации напряжений в волокнистых композитах. *Прикл. механика и техн. физика*. 2014. Т. 55. № 1. С. 187–197.
12. Мирсалимов В. М., Аскараров В. А. Минимизация параметров разрушения в композите при изгибе. *Механика композит. материалов*. 2015. Т. 51. № 6. С. 1049–1060.
13. Mokhtari A., Ouali M. O., Tala-Ighil N. Damage modelling in thermoplastic composites reinforced with natural fibres under compressive loading. *Int. J. Damage Mech.* 2015. Vol. 24. P. 1239–1260.
14. Мирсалимов В. М., Аскараров В. А. Минимизация коэффициентов интенсивности напряжений для композита, армированного однонаправленными волокнами при изгибе. *Вестн. Чуваш. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*. 2016. № 3(29). С. 105–116.
15. Mirsalimov V. M. Hasanov F. F. Nucleation of cracks in an isotropic medium with periodic system of rigid inclusions under transverse shear. *Acta Mechanica*. 2015. Vol. 226. P. 385–395.
16. Круминьш Я., Зесерс А. Экспериментальное исследование разрушения бетона, армированного гибридными волокнами. *Механика композит. материалов*. 2015. Т. 51. № 1. С. 37–46.
17. Tang C. A study of crack-fiber interaction in fiber-reinforced composites using optical caustic method. *Polymer Eng. and Sci.* 2015. Vol. 55. С. 852–857.
18. Takeda T., Narita F. Fracture behavior and crack sensing capability of bonded carbon fiber composite joints with carbon nanotube-based polymer adhesive layer under Mode I loading. *Composites Sci. and Technology*. 2017. Vol. 146. P. 26–33.
19. Ju J. W., Wu Y. Stochastic micromechanical damage modeling of progressive fiber breakage for longitudinal fiber-reinforced composites. *Int. J. Damage Mech.* 2016. Vol. 25. 203–227.
20. Babaei R. A, Farrokhabadi A. Computational continuum damage mechanics model for predicting transverse cracking and splitting evolution in open hole cross-ply composite laminates *Fatigue & Fracture Eng. Materials & Structures*. 2017. Vol. 40. Issue 3. P. 375–390.
21. Bakhshan H., Afrouzian A., Ahmadi H., Taghavimehr M. Progressive failure analysis of fiber-reinforced laminated composites containing a hole. *Int. J. Damage Mech.* 2017. <https://doi.org/10.1177/1056789517715088>.
22. Cameselle-Molares A., Sarfaraz R., Shahverdi M., Keller T., Vassilopoulos A. P. Fracture mechanics-based progressive damage modelling of adhesively bonded fibre-reinforced polymer joints. *Fatigue & Fracture Eng. Materials & Structures*. 2017. Vol 40. Issue 12. P. 2183–2193.
23. Мирсалимов В. М. Неоднородные упругопластические задачи. М.: Наука, 1987. 256 с.
24. Панасюк В. В. Механика квазихрупкого разрушения материалов. Киев: Наук. думка, 1991. 416 с.
25. Rusinko A., Rusinko K. Plasticity and Creep of Metals. Berlin: Springer, 2011. 434 p.
26. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
27. Панасюк В. В. Саврук, М. П., Дацьшин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наук. думка, 1976. 443 с.
28. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1981. 324 с.

Поступила в редакцию 11.03.2018