10. *Кравчук, А. С.* Постановка задачи о контакте нескольких деформируемых тел как задачи нелинейного программирования / А. С. Кравчук // Прикл. математика и механика. – 1978. –Т. 42, вып. 3. – С. 466–474.
11. *Дюво, Г.* Неравенства в механике и физике / Г. Дюво, Ж. Л. Лионс. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
12. *Колтунов, М. А.* Прикладная механика деформируемого твердого тела / М. А. Колтунов, А. С. Кравчук, В. П. Майборода. – М.: Высш. шк., 1983. – 349 с.

*Поступила в редакцию 22.07.14*

**А. М. Чугай**
канд. техн. наук

Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины, г. Харьков, e-mail: chugay@ipmach.kharkov.ua

**Ключові слова:** *Ф-функція, локальна оптимізація, циліндри, сфероциліндри*

УДК 519.859

# ОДИН ИЗ ПОДХОДОВ К ПОИСКУ ХОРОШИХ ЛОКАЛЬНЫХ МИНИМУМОВ В ЗАДАЧЕ РАЗМЕЩЕНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

*Запропоновано один із підходів, що дозволяє підвищити ефективність пошуку локальних мінімумів в задачах розміщення циліндрів. Запропонований підхід дозволяє вирішити проблему потрапляння в «погані» несуворі локальні мінімуми за рахунок заміни циліндрів на початковому етапі розв'язання задачі сфероциліндрами. Крім того, властивості математичної моделі, що ґрунтуються на вигляді Ф-функцій, дозволили запропонувати спосіб значного скорочення часових і обчислювальних витрат при пошуку локальних мінімумів.*

## Введение

На сегодняшний день стремительно растет интерес к эффективному решению задач размещения трехмерных объектов, что объясняется разнообразием практических приложений и чрезвычайной сложностью математических моделей и методов их решения. Различные вопросы задач размещения трехмерных объектов рассматриваются во многих работах для различных научно-исследовательских и прикладных областей. В частности, задачи, связанные с поиском оптимального размещения цилиндрических объектов, возникают, например, при планировании плотного размещения грузов различного характера на складах и хранилищах, в различных транспортных средствах.

## Анализ литературных данных и постановка проблем

Работы, связанные с поиском оптимального размещения цилиндров, в основном рассматривают различные эвристические подходы [1, 2], в которых трехмерные задачи из-за сложности решения сводятся к двухмерным.

В работе [3] для решения задачи размещения цилиндров вместо эвристических алгоритмов предложен подход, основанный на формулировке задачи в виде задачи нелинейного программирования. Однако авторы все равно сводят задачу к двухмерному случаю и размещают одинаковые круги.

Благодаря использованию аппарата Ф-функций в работе [4] задача упаковки различных цилиндров была сформулирована и решена как задача математического программирования.

Однако вследствие того, что в работе применяется градиентный метод (метод возможных направлений), локальная оптимизация в задаче размещения цилиндров приводит в нестрогие локальные минимумы. Например, на рис. 1 показан нестрогий локальный минимум (в данном примере минимизируется высота области размещения), который может быть улучшен за счет смещения вниз самого верхнего цилиндра.

Получение плохих локальных минимумов в задаче размещения цилиндров связано с тем, что при применении метода возможных направлений в таких точках траектории градиентов ограничений «взаимопогашаются» и не позволяют вычислить вектор «спуска».

*Целью данной* статьи является разработка нового эффективного подхода к поиску локальных минимумов в задаче размещения цилиндров.

**Метод поиска локальных минимумов**

В работе рассматривается задача плотного размещения цилиндров $C_i$, $i \in I$ в прямой призме $P$ с целью минимизации высоты $h$ ее занятой части [4].

С использованием аппарата Ф-функций [5, 6] математическая модель задачи может быть представлена в виде

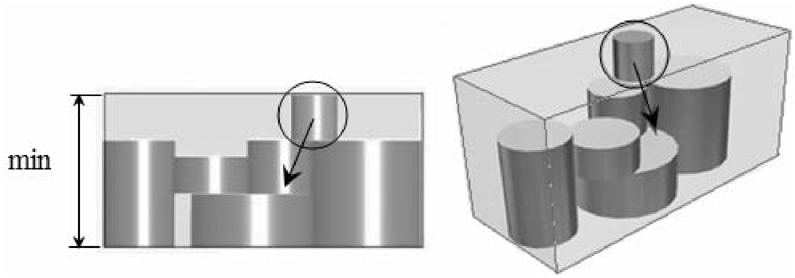


***Рис.1. Нестрогий локальный минимум, полученный с помощью метода возможных направлений***

$$F(h^*) = \min_{X=(u,h)\in W\subset R^{3n+1}} F(h)\,, \tag{1}$$

где

$$W = \{X = (u,h) \in R^{3n+1} : \Phi_{ij}(u_i,u_j) \ge 0,\ i < j \in I, \Phi_i(u_i,h) \ge 0,\ i \in I\}\,, \tag{2}$$

$\Phi_{ij}(u_i, u_j)$ – Ф-функция для пары размещаемых объектов, $\Phi_i(u_i, h)$ – Ф-функция для размещаемого объекта и $\mathrm{cl}(R^3 \backslash P)$.

Для решения проблемы попадания в «плохие» нестрогие локальные минимумы в данной работе предлагается на начальном этапе решения задачи размещения цилиндров заменить их сфероцилиндрами (т. е. цилиндрами, в основании которых сферические сегменты заданной высоты). Такая замена позволит при поиске локальных экстремумов обойти точки, в которых траектории градиентов ограничений будут «взаимопогашаться» (рис. 2).

Геометрическая форма сфероцилиндров позволяет получать хорошие локальные минимумы в задачах их плотного размещения. Получив хорошее размещение сфероцилиндров, можно легко определить соответствующее ему размещение цилиндров, обнулив высоты сферических сегментов (рис. 3).

В работе [5] построена Ф-функция для пары сфероцилиндров и показано, что область допустимых решений описывается очень большим количеством ограничений, а следовательно, при поиске локальных минимумов происходит значительная потеря вычислительного времени.

В связи с этим в работе предлагается подход, позволяющий значительно сократить временные и вычислительные затраты при локальной оптимизации в задаче (1)–(2).

Предлагаемый подход основывается на том, что вид функций $\Phi_{ij}(u_i, u_j)$ [5] позволяет представить область $W$ в виде объединения подобластей, т. е. $W = \bigcup_{q=1}^{Q} W_q$. При этом $W_i$ определяется системой неравенств вида

$$\begin{cases} \Psi_{ij}^t(u_i,u_j) \ge 0,\ 0 < i < j \in I, \\ \quad \Phi_i(u_i,h) \ge 0,\ i \in I, \end{cases}$$

где $\Psi_{ij}^t(u_i,u_j)$ – одна из систем, формирующих функцию $\Phi_{ij}(u_i, u_j)$ [5].

Благодаря этому процесс поиска локального экстремума может быть сведен к решению задач нелинейного программирования на последовательности подобластей $W_i$ (рис. 3).

Рассмотрим процедуру перехода между подобластями в процессе поиска локального минимума.

Первоначально выделяем одну из подобластей $W_q$, $q \in Q$, которая содержит точку $\widetilde{X} = (u^0, h^0) \in W$. Пусть допустимая

***Рис. 2. Решение проблемы попадания в «плохие» нестрогие локальные минимумы***

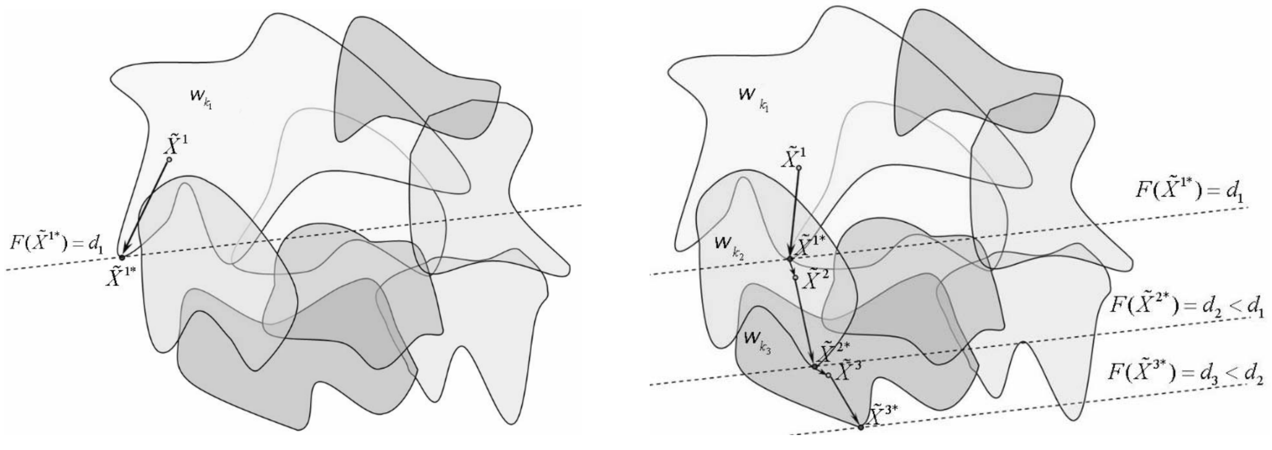


***Рис. 3. Представление области допустимых решений***

подобласть $W_0$ определяется системой неравенств

$$\begin{cases} \phi_{01}(\xi_1) \ge 0 \\ \phi_{02}(\xi_2) \ge 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \phi_{0\mu}(\xi_\mu) \ge 0 \end{cases}, \tag{3}$$

где $\phi_{0k}(\xi_k) \ge 0$ – неравенства, входящие в системы $\Psi_{ij}^t(u_i, u_j) \ge 0$ и $\Phi_i(u_i, h) \ge 0$.

Взяв начальную точку $(u^0, h)$ и решив задачу

$$F(h^{0*}) = \min_{(u,h)\in W_0} F(h), \tag{4}$$

получим точку локального минимума $(u^{0*}, h^{0*})$.

Пусть неравенства $\phi_{0i_{ji}}(\xi_{i_j}) \ge 0$, $j \in \Gamma_0 = \{1, 2, \ldots, \beta_0\} \subset \Gamma = \{1, 2, \ldots, \mu\}$, активны в точке $(u^{0*}, h^{0*})$ и принадлежат системе неравенств $\Psi_{ij}^a(u_i, u_j) \ge 0$, $i \in I_{0\nu} \subset I$. Очевидно, что $\Psi_{ij}^a(u_i^{0*}, u_j^{0*}) = 0$, $i \in I_{0\nu} \subset I, j \in I_{0\eta} \subset I$.

Выделим функции $\Phi_{ij}(u_i, u_j) \ge 0$, $i \in I_{0\nu}$, $j \in I_{0\eta}$, из системы неравенств (2), которая включает в себя подсистемы неравенств $\Psi_{ij}^a(u_i, u_j) \ge 0$, $i \in I_{0\nu}, j \in I_{0\eta}$, и вычислим $\Phi_{ij}(u_i^{0*}, u_j^{0*}) = \chi_{ij}^0$, $i \in I_{0\nu}, j \in I_{0\eta}$. Поскольку $(u^{0*}, h^{0*}) \in W_0$, то $\chi_{ij}^0 \ge 0$, $i \in I_{0\nu}, j \in I_{0\eta}$.

Из вида $\Phi_{ij}(u_i, u_j)$ в общем случае следует, что $\Phi_{ij}(u_i^{0*}, u_j^{0*}) = \Psi_{ij}^t(u_i^{0*}, u_j^{0*}) = \chi_{ij}^0$, $i \in I_{0\nu}$, $j \in I_{0\eta}$, $t \in T_{ij}^0 \in T_{ij}$. Это значит, что точка $(u_i^{0*}, h_j^{0*})$ может принадлежать нескольким подобластям типа $W_0$ (рис. 3). Рассмотрим следующие возможные варианты.

1. Пусть $T_{ij}^0$ содержит 2 элемента и каждый из остальных наборов содержит 1 элемент. Тогда $\Phi_{ij}(u_i^{0*}, u_j^{0*}) = \Psi_{ij}^{Ra}(u_i^{0*}, u_j^{0*}) = \Psi_{ij}^{Rb}(u_i^{0*}, u_j^{0*}) = \chi_{ij}^0$, $a, b \in T_{ij}^0$, и $a \ne b$, и каждая из остальных Ф-функций задаётся одной функцией типа $\Psi_{ij}^t(u_i, u_j)$. В этом случае точка $(u^{0*}, h^{0*})$ в общем случае не является точкой локального минимума по отношению к допустимой области $W$.

Действительно, если мы заменим неравенства из системы неравенств (4), входящих в подсистему неравенств $\Psi_{ij}^a(u_i, u_j) \ge 0$ на неравенства, входящие в подсистему неравенств $\Psi_{ij}^b(u_i, u_j) \ge 0$, то новая полученная система неравенств будет характеризовать новую допустимую подобласть $W_1 \subset W$, содержащую точку $(u^{0*}, h^{0*})$ и, кроме того, $W_0 \ne W_1$. Это значит, что в общем случае точка $(u^{0*}, h^{0*})$ не является точкой локального минимума по отношению к допустимой области $W$.

2. Легко увидеть, что если $\chi_{ij}^0 = 0,\ i \in I_{0\nu}, j \in I_{0\eta}$ и каждое из индексных множеств $T_{ij}^0,\ i \in I_{0\nu}$, $j \in I_{0\eta}$, содержат 1 элемент, тогда точка $(u^{0*}, h^{0*})$ является точкой локального минимума по отношению к допустимой области $W$.

3. Если $(u^{0*}, h^{0*})$ является точкой локального минимума задачи (4) и хотя бы одно из значений $\chi_{ij}^0$, $i \in I_{0\nu}, j \in I_{0\eta}$, строго больше нуля, то точка $(u^{0*}, h^{0*})$ не является точкой локального минимума по отношению к допустимой области $W$. Действительно, пусть $\chi_{ij}^0 > 0$. Тогда $\Phi_{ij}(u_i^{0*}, u_j^{0*}) = \Psi_{ij}^b(u_i^{0*}, u_j^{0*}) = \chi_{ij}^0 > 0$. С другой стороны, $\Psi_{ij}^a(u_i, u_j)$ также участвует в построении функции $\Phi_{ij}(u_i, u_j)$, однако $\Psi_{ij}^a(u_i^{0*}, u_j^{0*}) = 0$, потому что точка $(u_i^{0*}, u_j^{0*})$ является точкой локального минимума задачи (4). Следовательно, если мы возьмём неравенство $\Psi_{ij}^b(u_i, u_j) \geq 0$ вместо $\Psi_{ij}^a(u_i, u_j) \geq 0$ в системе неравенств (4), то получим новую систему неравенств, которая определяет новую допустимую подобласть $W_1$, содержащую точку $(u^{0*}, h^{0*})$. Взяв начальную точку $(u^{0*}, h^{0*})$ и решив подзадачу

$$F(h^{0*}) = \min_{(u,h)\in W_1} F(h),$$

получим точку локального минимума $(u^{1*}, h^{1*})$. Поскольку $(u^{0*}, h^{0*})$ является точкой локального минимума задачи (4), то $(u^{0*}, h^{0*}) \neq (u^{1*}, h^{1*})$ и, следовательно, точка $(u^{0*}, h^{0*})$ не является точкой локального минимума по отношению к допустимой области $W$ и, кроме того, $F(h^{1*}) \leq F(h^{0*})$.

Поскольку задачи вида (4) являются классическими задачами математического программирования, то для их решения могут быть применены современные численные методы локальной оптимизации. Следует отметить, что подходы к решению задач оптимизации претерпели в последнее время большое развитие, обусловленное появлением новых методов нелинейной оптимизации, которые кардинально повышают надежность, скорость и точность поиска локальных или глобальных решений и могут быть реализованы независимо от предметной области с помощью внешних процедур, разработанных пользователем для вычисления целевого функционала, невязки ограничений, матриц Якоби и Гессе. Одним из таких методов является метод внутренней точки, реализованный во многих бесплатных внешних библиотеках. В работе для поиска локальных минимумов задач вида (4) использовалась библиотека IpOpt [7], которая очень хорошо работает на разреженных матрицах. Преимущество данной библотеки перед другими заключается в том, что она использует матрицу Гессе.

Подтверждением эффективности предложенного метода локальной оптимизации являются результаты решения задачи упаковки 40 различных цилиндров, представленные на рис. 4. На рис. 4, а изображено размещение цилиндров, соответствующее локальному экстремуму, полученному с использованием предложенного подхода (при этом, функция цели равна 18,38). Высота сферических сегментов на начальном этапе принималась равной 0,01 радиуса цилиндров.

На рис. 4, б представлена упаковка цилиндров, полученная с помощью метода, описанного в работе [4] (при этом функция цели равна 26,01).

Следует отметить, что поиск локальных экстремумов, которым соответствуют размещения на рис. 4, а и рис. 4, б, стартовал из одной и той же начальной точки.

**Выводы**

В работе предложен подход, позволяющий повысить эффективность поиска локальных минимумов в задачах размещения цилиндров. Для решения проблемы попадания в «плохие» нестрогие локальные минимумы в данной работе предлагается на начальном этапе решения задачи размещения цилиндров заменить их сфероцилиндрами (т.е. цилиндрами, в основании которых лежат сферические сегменты заданной высоты). Такая замена позволит при поиске локальных экстремумов обойти точки, в которых траектории градиентов ограничений будут «взаимопогашаться».

Кроме того, свойства математической модели, основанные на виде Ф-функций, позволили предложить способ значительного сокращения временных и вычислительных затрат при поиске локальных минимумов. Предложенный подход заключается в уменьшении количества ограничений, описывающих область допустимых решений, за счет сведения процесса поиска локального минимума к решению задач математического программирования на последовательности подобластей области допустимых решений.

**Литература**


1. *George, J. A.* Packing different-sized circles into a rectangular container / J. A. George, J. M. George, B. W. Lamar // European J. Oper. Res. – 1995. – № 84. – P. 693–712.
2. *George, J. A.* Multiple container packing: a case study of pipe packing / J. A. George // J. Oper. Res. Soc. –1996. – №. 47. – P. 1098–1109.
3. *Birgin, E. G.* Optimizing the packing of cylinders into a rectangular container / E. G. Birgin, J. M. Martinez, D. P. Ronconi // European J. Oper. Res. – 2005. – Vol. 160. – P. 19–33.
4. *Стоян, Ю. Г.* Упаковка различных круговых цилиндров в параллелепипеде / Ю. Г. Стоян, Д. И. Придатко // Доп. НАН України. – 2004. – № 4. – С. 27–32.
5. *Стоян, Ю. Г.* Математическая модель и метод решения задачи размещения сфероцилиндров и цилиндров с учетом специальных ограничений / Ю. Г. Стоян, А. М. Чугай // Электрон. моделирование. – 2008. – Т. 30, № 5. – С. 3–20.
6. *Scheithauer, G.* Mathematical modeling of interactions of primary 3D geometric objects / G. Scheithauer, Y. Stoyan, T. Romanova // Cybernetics and System Analysis. – 2005. – Vol. 41 (3). – P.332– 342.
7. *Wachter, A.* On the implementation of a primal-dual interior point filter line search algorithm for large-scale nonlinear programming / A. Wachter, L. T. Biegler // Math. Program. – 2006. – № 106 (1). – P. 25–57.


*Поступила в редакцию 15.08.14*

**О. О. Литвин**,
канд. фіз.-мат. наук
**Є. Л. Хурдей**

Українська інженерно-педагогічна академія
м. Харків,
e-mail: hurdei@mail.ru

**Ключові слова:** *комп'ютерна томографія, проекція, поліноміальна інтерполяція функцій двох змінних.*

УДК 519.6

# ПОЛІНОМІАЛЬНА ІНТЕРПОЛЯЦІЯ З ВІДОМИМИ ПРОЕКЦІЯМИ НА ДОВІЛЬНІЙ СИСТЕМІ N ГРУП ПРЯМИХ, ЯКІ СКЛАДАЮТЬСЯ З M ПАРАЛЕЛЬНИХ ПРЯМИХ

*Задано N груп прямих, кожна з яких складається з M паралельних прямих. Кожна пряма з однієї групи перетинається з усіма прямими з інших N – 1 груп. Вважається, що в точках перетину цих прямих задаються значення фінітної функції f(x, y) неперервної разом із своїми похідними першого порядку, носій якої квадрат [0, 1]×[0, 1]. Вважаються також відомими проекції, тобто інтеграли вздовж кожної із n×m прямих, які поступають з комп'ютерного томографа. Розв'язується така задача: побудувати оператор наближення функції f(x, y), який не тільки інтерполює функцію у вказаних вузлах, але й також має вказані проєкції. Результати даної роботи можуть бути використані при неруйнівному контролі важливих деталей в машинобудуванні.*

## Вступ

На сьогодні зрозуміло, що методи неруйнівного контролю, зокрема методи комп'ютерної томографії, є невід'ємною частиною дослідження важливих деталей у машинобудуванні, митному контролі тощо. При цьому важливим є використання для контролю невеликої кількості ракурсів. Тому актуальною є задача відновлення функції за допомогою проекцій на довільній системі $N$ груп прямих, які складаються з $M$ паралельних прямих.

В роботах [1–6] запропоновано загальний метод побудови оператора інтерлінації функції двох змінних з відомими проекціями – інтегралами вздовж заданої системи прямих. Цей метод полягає у виконанні таких двох кроків:

Крок 1. Побудова оператора інтерлінації зі слідами на заданій системі прямих.