

^{1,2} О. Л. Андреева^{1,3} А. О. Костиков, д-р техн. наук^{2,3} В. И. Ткаченко, д-р физ.-мат. наук¹ Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины, г. Харьков, e-mail: andreevaoksana@kipt.kharkov.ua,

e-mail: kostikov@ipmach.kharkov.ua

² Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт» НАН Украины,³ Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина e-mail: tkachenko@kipt.kharkov.ua

УДК 632.5

**КОНВЕКТИВНЫЙ ТЕПЛООБМЕН
ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ
ЖИДКОСТИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ
ЯЧЕЙКЕ С КОНИЧЕСКИ
УГЛУБЛЕННЫМ ДНОМ И
ТВЕРДЫМИ ГРАНИЧНЫМИ
УСЛОВИЯМИ**

Розглянуто задачу про теплову конвекцію в'язкої нестискуваної рідини в циліндричній елементарній конвективній комірці з конічно поглибленим дном і твердими граничними умовами. Побудовані функції Стокса в циліндричній конвективній комірці, а також конічному поглибленні дна комірки. На підставі ефекту Фудзіварі отримані модельні розподіли ліній струму Стокса в циліндричній елементарній конвективній комірці з конічно поглибленим дном і твердими граничними умовами.

Ключові слова: циліндрична елементарна комір-ка, тепла конвекція, конічне поглиблення, тверді граничні умови, в'язка нестискувана рідина, ефект Фудзіварі.

Введение

Конвективный теплоперенос в слоях подогреваемой снизу (охлаждаемой сверху) вязкой, несжимаемой жидкости сопровождается возникновением упорядоченных структур, которые наиболее часто имеют вид двухмерных валов или полигональных трехмерных ячеек. Частным видом полигональных трехмерных ячеек являются ячейки Рэлея-Бенара [1–3].

Однако, несмотря на достаточно обширный и проработанный материал по конвективному теплопереносу, вне рамок исследования остались такие структуры, как цилиндрические конвективные ячейки с твердыми верхней и нижней границами. Такие ячейки впервые, без придания им физической трактовки, аналитически описаны в работах [4–5].

Значительно позже в работе [6] было найдено аналитическое решение линейной стационарной задачи Рэлея для цилиндрической элементарной конвективной ячейки с плоскими твердыми и смешанными граничными условиями. Проведено их сравнение с аналогичными решениями для свободной конвективной ячейки для моды $n = 1$. Показано, что диаметр конвективной ячейки обратно пропорционален значению минимального волнового числа соответствующей краевой задачи, т.е. диаметр ячейки со смешанными граничными условиями меньше диаметра ячейки со свободными граничными условиями, но больше диаметра ячейки с твердыми граничными условиями.

Приведенное выше описание решений для цилиндрической конвективной ячейки с твердыми граничными условиями применимо для случая слоя жидкости с плоскими границами. Для конвективной ячейки с неплоским дном будут характерны иные пространственные распределения конвективных потоков. Например, в водоемах с полусферическим дном распределение потока вблизи твердой границы отражают геометрию дна [7]. Такое распределение вполне объяснимо требованием выполнения граничных условий: равенством нормальной и касательной составляющей скорости нулю на свободной или твердой границе [8].

Для рассмотрения граничных условий в элементарной цилиндрической ячейке с коническим углубленным дном в качестве базовых функций, на наш взгляд, следует рассматривать аналитические решения стационарной линейной задачи Рэлея со свободными граничными условиями [1–3] для решения задачи о конвекции в открытых водоемах. В случае решения задачи о конвективном теплопереносе в теплообменниках, где всегда присутствуют охлаждаемая и охлаждающая поверхности, следует использовать аналитические решения стационарной линейной задачи Рэлея с твердыми или смешанными граничными условиями [6].

© О. Л. Андреева, А. О. Костиков, В. И. Ткаченко, 2017

Также существует процесс вакуумно-дугового переплава стали, легированной оксидными нанопорошками, где гомогенизация наночастиц оксида осуществляется в результате тепломассопереноса расплавленной стали в цилиндрической конвективной ячейке с косинусоидальным профилем дна и свободными граничными условиями. Свободные граничные условия реализуются в конвективной ячейке, процентное содержание добавленной дисперсной фазы в которой достаточно высоко. В рассматриваемом в [9] случае оно должно превышать 1,5 мас. %, когда для легирования стали требуется добавить небольшое количество дисперсной фазы, например, менее 0,125 мас. %. В этом случае на дне ячейки реализуются твердые граничные условия, а в горизонтальном слое в целом – смешанные граничные условия (на верхней границе свободные граничные условия, на нижней – твердые) [10].

В настоящей работе рассмотрим задачу о конвективном тепломассопереносе в подогреваемой снизу цилиндрической элементарной конвективной ячейке с конически углубленным дном.

Постановка задачи

Рассмотрим бесконечный в горизонтальном направлении слой вязкой несжимаемой жидкости (рис. 1) толщиной h с расположенной в нем цилиндрической элементарной конвективной ячейкой, нижняя граница которой имеет вид конического углубления с образующей $z = \Delta h(r/r_{cell} - 1)$, здесь r_{cell} – радиус цилиндрической конвективной ячейки.

Ось z направлена вверх, перпендикулярно границам слоя $z = 0$ и $z = h$. Температура границ слоя задана таким образом, что температура ниже лежащих уровней ячейки больше температуры верхних $T_0(0) = T_2$, $T_0(h) = T_1$, ($T_2 > T_1$), а температура у вершины конуса

$$T_0(-\Delta h) \equiv T_3 = T_2 + \Delta T_{cone}, (\Delta T_{cone} > 0).$$

Считаем, что в состоянии механического равновесия распределение температуры внутри ячейки описывается линейной функцией от координаты

$$\bar{\nabla} T_0(z) = -\frac{\Theta}{h} \bar{e}_z (0 \leq z \leq h), \quad \bar{\nabla} T_0(z) = -\frac{\Delta T_{cone}}{\Delta h} \bar{e}_z (\Delta h \leq z \leq 0),$$

где $T_0(z)$ – распределение температуры по толщине слоя; $\Theta = T_2 - T_1$ – разность температур между нижней и верхней плоскостями; \bar{e}_z – единичный вектор, направленный вдоль оси z .

Сверху элементарная конвективная ячейка граничит с горизонтальным слоем теплоотводящего металлического массива толщиной Δh_1 , снизу – с горизонтальным слоем теплоподводящей среды толщиной Δh_2 , поддерживается постоянный градиент температуры, $\Delta T_{cone} = \Theta \cdot \Delta h/h$.

Возмущения (отклонения от величин, характерных для случая механического равновесия) безразмерных скорости v_z и температуры T описываются уравнениями, которые могут быть получены из уравнений Навье–Стокса [2]

$$\frac{\partial}{\partial T} \Delta v_z = \Delta \Delta v_z + R \Delta_{\perp} T; \quad (1)$$

$$P \frac{\partial T}{\partial t} = \Delta T + v_z, \quad (2)$$

где $\Delta = \Delta_{\perp} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа; Δ_{\perp} – поперечный лапласиан; $R = g\beta h^3 \Theta / (\nu \chi)$ – число Рэлея; g – ускорение свободного падения, направленное против оси z ; $P = \nu / \chi$ – число Прандтля; ν и χ – коэффициенты кинематической вязкости и температуропроводности жидкости соответственно; β – ко-

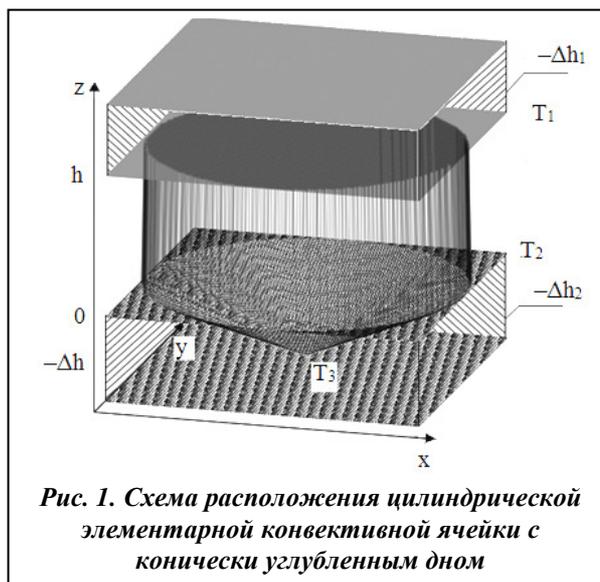


Рис. 1. Схема расположения цилиндрической элементарной конвективной ячейки с конически углубленным дном

эффицент объемного температурного расширения жидкости; v_z, T – возмущения вертикальной скорости и температуры соответственно.

При приведении системы уравнений (1) – (2) к безразмерному виду использованы следующие характерные единицы измерения: единица длины h – это толщина слоя ; единица времени $\tau = h^2 \nu^{-1}$; единица температуры Θ . Следует отметить, что для выбранной единицы длины координата z изменяется в интервале $0 \leq z \leq 1$.

Будем рассматривать задачу в осесимметричной постановке, т.е. полагаем везде $\partial \dots / \partial \varphi = 0$.

Например, поперечный Лапласиан $\Delta_{\perp} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right)$.

Система уравнений (1)–(2) применима для определения возмущений скорости и температуры при условии, что она должна быть дополнена граничными условиями.

В настоящей работе рассмотрим твердые граничные условия, когда на границах при $z = 0$ и $z = 1$ значения возмущенных проекций скорости, температуры и производной вертикальной скорости по координате равны нулю [2]

$$v_r = 0, v_z = 0, \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, T = 0. \quad (3)$$

Аналитическое решение

В интервале высот $0 \leq z \leq 1$ стационарные возмущения компонент скорости $v_z^{(n)}(r, z), v_r^{(n)}(r, z)$ и температуры $T^{(n)}(r, z)$ цилиндрической конвективной ячейки с твердыми граничными условиями

$(v_z^{(n)} = 0, \frac{\partial v_z^{(n)}}{\partial z} = 0, T^{(n)} = 0)$ на верхней границе $z = 1$ и со свободными граничными условиями

$(v_z^{(n)} = 0, \frac{\partial^2 v_z^{(n)}}{\partial z^2} = 0, T^{(n)} = 0)$ на нижней границе $z = 0$ определяются выражениями, метод получения которых изложен в работе [8]

$$\begin{aligned} v_z^{(n)}(r, z) &= v_n(z) J_0(k_r r); v_r^{(n)}(r, z) = -dv_n(z)/dz k_r^{-1} J_1(k_r r) \\ T_n^{(n)}(r, z) &= v_n(z) J_0(k_r r), \end{aligned} \quad (4)$$

где $v_n(z) = A(1 - ch(zX_{n,+})/ch(X_{n,+})) \sin(n\pi z)$, $n = 1, 2, 3 \dots$ – номер моды, A, B – константы,

$$a = 8(n\pi)^2, b = 7(n\pi)^2, X_{n,+} = 0,5 \left(\sqrt{(0,5a + b)^2 + 0,75a^2} + (0,5a + b) \right)$$

$$v_n(z) = Bb \frac{1}{2} \left(\frac{sh(z\sqrt{b})/sh(\sqrt{b})}{\int_0^1 v_n(\xi) sh(\sqrt{b}(\xi - 1)) d\xi} - \int_0^z v_n(\xi) sh(\sqrt{b}(\xi - 1)) d\xi \right),$$

где $J_0(k_r r), J_1(k_r r)$ – функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядка соответственно; k_r – радиальное волновое число, характеризующее зависимость возмущений от поперечной координаты r .

В выражении (4) использованные параметры характеризуются следующими константами задачи: $a^3 = (k_r^2 R), b = k_r^2, R = g\beta h^3 \Theta / (\nu \chi)$ – число Рэлея; g – ускорение свободного падения, направленное против оси z ; $P = \nu / \chi$ – число Прандтля; ν и χ – коэффициенты кинематической вязкости и температуропроводности жидкости соответственно; β – коэффициент объемного температурного расширения жидкости.

В интервале $0 \leq z \leq 1$ для модового числа $n = 1$ решения (4) описывают стационарные возмущения скорости и температуры элементарной цилиндрической конвективной ячейки с твердыми граничными условиями на верхней границе $z = 1$ и свободными – на нижней $z = 0$.

В области конического углубления для $-\Delta h \leq z \leq 0$ возмущенные скорости и температура элементарной цилиндрической ячейки не могут быть представлены в виде решений (4), т. к. на границе

конуса $z = \Delta h(r/R_c - 1)$ они будут связаны между собой. Поэтому пространственное распределение скоростей и температуры в такой ячейке при $-\Delta h \leq z \leq 0$ представим в виде бесконечных рядов Фурье и Фурье-Бесселя [11] по пространственным гармоникам

$$v_z^{(1)}(r, z) = \sum_{m,l=1}^{\infty} A_{m,l} \sin(mk_0 z) J_0(k_{r,l} r) \quad (5)$$

$$v_r^{(1)}(r, z) = \sum_{m,l=1}^{\infty} A_{m,l} \frac{mk_0}{k_{r,l}} \cos(mk_0 z) J_1(k_{r,l} r) \quad (6)$$

$$T^{(1)}(r, z) = \sum_{m,l=1}^{\infty} B_{m,l} \sin(mk_0 z) J_0(k_{r,l} r), \quad (7)$$

где $k_0 = \pi/\Delta h$ – волновое число вдоль оси z ; $k_{r,l} = \sigma_{0,l}/R_c$ – волновые числа вдоль оси r ; $\sigma_{0,l}$ – нули функции Бесселя нулевого порядка первого рода, расположенные в порядке возрастания с увеличением индекса $l = 1, 2, 3, \dots$. Константы $A_{m,l}$ и $B_{m,l}$ определяются из граничных условий. Так, например, из выражений (5) – (7) следует, что на оси конической ячейки ($r = 0$) имеем

$$v_z^{(1)}(0, z) \equiv \varphi_1(z) = \sum_{m,l=1}^{\infty} A_{m,l} \sin(mk_0 z),$$

$$v_r^{(1)}(0, z) = 0,$$

$$T^{(1)}(0, z) \equiv \varphi_2(z) = \sum_{m,l=1}^{\infty} B_{m,l} \sin(mk_0 z),$$

где $\varphi_1(z) = v_1(z/\Delta h)$, $\varphi_2(z) = \vartheta_1(z/\Delta h)$.

На верхней границе ячейки $z = 0$ справедливы соотношения

$$v_z^{(1)}(r, 0) = T^{(1)}(r, 0) = 0,$$

$$v_r^{(1)}(r, 0) \equiv \varphi_3(r) = - \sum_{m,l=1}^{\infty} A_{m,l} \frac{mk_0}{k_{r,l}} J_1(k_{r,l} r), \quad (8)$$

где $\varphi_3(r) = -Adv_1(z/\Delta h)/dzk_r^{-1}J_1(k_r r)$.

На конической поверхности ячейки, при $z = \Delta h(r/R_c - 1)$, должны выполняться граничные условия

$$v_z^{(1)}(r, \Delta h(r/R_c - 1)) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A'_{m,l} (-1)^m \exp\left(i \frac{m\pi}{R_c} r\right) J_0(k_{r,l} r) = 0 \quad (9)$$

$$v_r^{(1)}(r, \Delta h(r/R_c - 1)) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A'_{m,l} \frac{imk_0}{k_{r,l}} (-1)^m \exp\left(i \frac{m\pi}{R_c} r\right) J_1(k_{r,l} r) = 0 \quad (10)$$

$$T^{(1)}(r, \Delta h(r/R_c - 1)) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} B'_{m,l} (-1)^m \exp\left(i \frac{m\pi}{R_c} r\right) J_0(k_{r,l} r) = 0, \quad (11)$$

где $(A, B)_{-m,l} = -(A, B)_{m,l}$, $(A', B')_{m,l} = -i0.5(A, B)_{m,l}$, i – мнимая единица.

Равенства (9) – (11) следуют из условия равенства нулю вектора скорости вязкой несжимаемой жидкости на неподвижной границе [8].

Линии тока в ячейке с конически углубленным дном

Основываясь на представлении об элементарной цилиндрической конвективной ячейке [6], полагаем заданными функции в выражениях (8) в виде

$$\begin{aligned} \varphi_1(z) &= -A(0, z) \sin(k_0 z) (1 - ch(zX_{1,+}/\Delta h) / ch(X_{1,+})), \\ \varphi_3(z) &= -A(r, 0) dv_1(z/\Delta h) / dz k_r^{-1} J_1(k_r r). \end{aligned} \quad (12)$$

На основании (12) можно построить функцию Стокса для линий тока, которая автоматически удовлетворяет уравнению неразрывности. Эта функция имеет вид

$$\psi(r, z) = A(r, z) r \sin(k_0 z) (1 - ch(zX_{1,+}/\Delta h) / ch(X_{1,+})) J_0\left(\frac{\sigma_{1,r}}{R_c} r\right) \equiv A(r, z) \Psi_0(r, z). \quad (13)$$

Кривые для линий тока получаются как результат решения уравнения $\psi(r, z) = \text{const}$ [4].

Определим функциональную зависимость $A(r, z)$ от координат. Для этого найдем приращение $\psi(r, z)$ при смещении координаты от r_0 и z_0 на малые величины dr и dz соответственно ($r = r_0 + dr$, и $z = z_0 + dz$)

$$d\psi = \frac{\partial \psi(r_0, z)}{\partial r} dr + \frac{\partial \psi(r, z_0)}{\partial z} dz = 0. \quad (14)$$

Выполняя дифференцирование в (14) и учитывая, что по определению $\partial \psi_0(r, z) / \partial r = rv_z(r, z)$ а $\partial \psi_0(r, z) / \partial z = rv_r(r, z)$, преобразуем, используя (14), выражение (13) к виду

$$rA(r, z) \left(v_z(r, z) - v_r(r, z) \frac{dz}{dr} \right) + \Psi_0(r, z) \frac{dA(r, z)}{dr} = 0. \quad (15)$$

Первое слагаемое в (15) на конической границе равно нулю, т. к. представляет собой нормальную к поверхности границы компоненту скорости. Из второго слагаемого следует, что $A(r, z) = A_0 v(z/\Delta h - r/R_c)$, где A_0 – произвольная константа интегрирования; $v(x)$ – произвольная функция от аргумента x , равная нулю на границе $z = \Delta h(r/R_c - 1)$. В качестве таких функций, например, можно взять модельные функции

$$v_1(r, z) = J_0(\sigma_{0,1}(z/\Delta h - r/R_c)) \quad \text{или} \quad v_2(r, z) = \cos((z/\Delta h - r/R_c)\pi/2).$$

На рис. 2 приведено расположение линий тока для модельной функции $v_1(r, z)$. График расположения линий тока для модельной функции второго вида $v_2(r, z)$ аналогичен предыдущему и поэтому его вид не приводится.

Применение предложенных видов модельных решений или других должно основываться на экспериментальных данных. Однако из этих решений можно сделать следующие выводы: распределения линий тока в ячейках с различными модельными функциями качественно подобны; различные модельные функции линий тока отличаются величиной численного значения максимума.

На рис. 3. показано распределение линий тока в цилиндрической элементарной конвективной ячейке с коническим дном глубиной $\Delta h = 1/3$ и твердыми граничными условиями.

Для получения течения, образованного двумя вихрями, (рис. 3) (в цилиндрической и конических частях) применим подход, исследованный для ячейки со свободными граничными условиями [12]. В рассматриваемом случае вихри помещены в закрытый объем и поэтому не вращаются друг относительно друга, а могут осуществлять взаимную экспансию в вертикальном направлении, накладываясь друг на друга. В соответствии с эффектом Фудзивары [13], результирующая функция Стокса $\psi_{1,2}(r, z)$ будет определяться суперпозицией

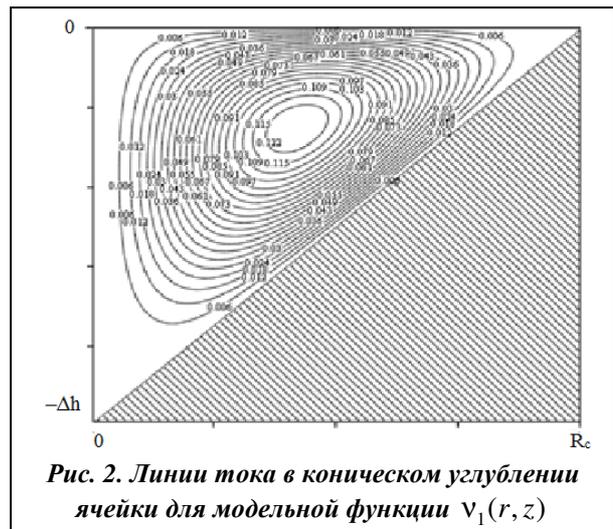


Рис. 2. Линии тока в коническом углублении ячейки для модельной функции $v_1(r, z)$

функций Стокса двух вихрей, размеры которых перенормированы на единичную высоту вдоль вертикальной оси конвективной ячейки, изображенной на рис. 1.

$$\Psi_{1,2}(r, z) = A_0(1 - v_{1,2}((1 + \Delta h)z/\Delta h - r/R_c))\Psi_0(r, z/\Delta h). \quad (16)$$

Использование принципа суперпозиции функций Стокса двух вихрей является следствием эффекта Фудзивары. Отрицательный знак алгебраической суммы объясняется тем, что горизонтальные скорости заполняющих объем ячейки вихрей противоположно направлены, и поэтому функции

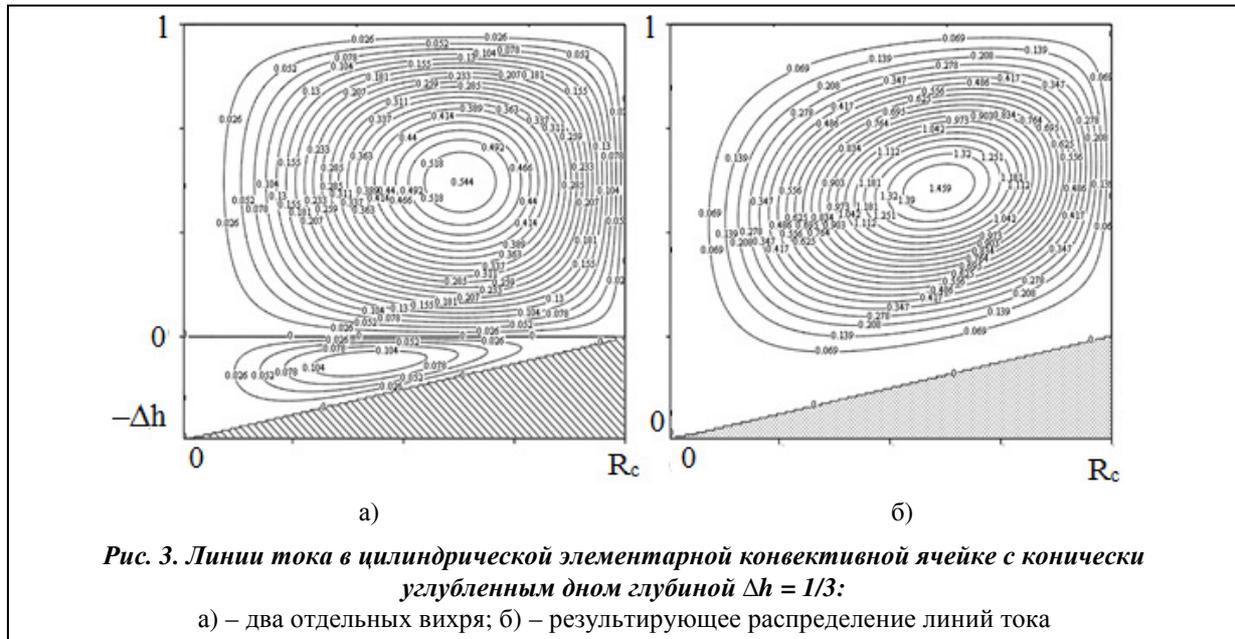


Рис. 3. Линии тока в цилиндрической элементарной конвективной ячейке с коническим углубленным дном глубиной $\Delta h = 1/3$:

а) – два отдельных вихря; б) – результирующее распределение линий тока

Стокса при наложении вычитаются.

На рис. 3, б приведены линии тока в свободной цилиндрической элементарной конвективной ячейке с коническим углубленным дном глубиной $\Delta h = 1/3$ в результате наложения вихрей в ячейке, или, что означает то же самое, приведения масштабов вихрей к одному, определяемому размерами элементарной конвективной ячейки.

Выводы

В настоящей работе исследована тепловая конвекция вязкой несжимаемой жидкости в цилиндрической элементарной конвективной ячейке с коническим углубленным дном и твердыми граничными условиями. Построены линии тока для массопереноса в коническом углублении конвективной ячейки, которые удовлетворяют свободным граничным условиям на верхней границе, и твердым граничным условиям – на конической поверхности. Получены линии тока в цилиндрической элементарной конвективной ячейке с коническим дном глубиной $\Delta h = 1/3$ с твердыми граничными условиями на верхней и нижней границах. С использованием эффекта Фудзивары получены модельные распределения линий тока Стокса в цилиндрической элементарной конвективной ячейке с коническим углубленным дном и твердыми граничными условиями.

Литература

1. Strutt, J. W. (Lord Rayleigh) On convection currents in a horizontal layer of fluid when the higher temperature is on the under side/ J. W. Strutt (Lord Rayleigh) // 1916. – Vol. 32. – P. 529–546.
2. Гершуни, Г. З. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости / Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий – М: Наука, 1972. – 393 с.
3. Getling, A. V. Formation of spatial structures of Rayleigh-Benard convection / A. V. Getling // UFN. – 1991. – Vol. 161. – № 9. – P. 1–80.
4. Zierep, J. Über rotationssymmetrische Zellularkonvektionsströmungen / J. Zierep //Z. Angew. Math. Mech. – 1958. – Bd. 39. Nr. 7/8. – P. 329–333.
5. Koschmieder, E. L. Bénard Cells and Taylor Vortices (Cambridge Monographs on Mechanics) / E. L. Koschmieder. – Cambridge: University Press, 1993. – 350 p.

6. *Patochkina, O. L.* Elementary Convection Cell in the Horizontal Layer of Viscous Incompressible Liquid with Rigid and Mixed Boundary Conditions / O. L. Patochkina, B. V. Borts, V. I. Tkachenko // East-European J. of Phys. – 2015. – Vol. 2, № 1. – P. 23–32.
7. *Винников, С. Д.* Гидрофизика: Учеб. для вузов / С. Д. Винников, Б. В. Проскуряков. – Л.: Гидрометеоиздат, 1988. – 248 с.
8. *Landau, L. D.* Theoretical physics: hydrodynamics / L. D. Landau, E. M. Lifshitz, Vol. 6. – М.: Nauka. – 1986. – 736 p.
9. Pat. RU 2293268, МПК F27V3/08. Sposob elektroplavky v duhovoі pechy postoiannoho toka / Y. M. Yachykov, A. P. Morozov, Y. V. Portnova (RF). – 2005115622/02, zaiavl. 23.05.2005, opubl. 10.02.2007, Biul. # 4. – 10.
10. Investigation of the oxide phase convective homogenization while vacuum-arc with hollow cathode remelting of steel / O. L. Andreeva, B. V. Borts, A. O. Kostikov, V. I. Tkachenko // Eastern-European J. Enterprise Techn. – 2016. – Vol 5, № 5(83). – P. 25–32.
11. *Korn, G. A.* Mathematical handbook for scientists and engineers / G. A. Korn, T. M. Korn. – М.: Science. – 1977. – P. 832.
12. *Fujiwhara, S.* The natural tendency towards symmetry of motion and its application as a principle in meteorology / S. Fujiwhara // Quarterly J. the Royal Meteorological Society. – 1921. – Vol. 47, № 200. – P. 287–292.
13. *Бозбей, Л. С.* Тепломассоперенос в подогреваемой снизу свободной цилиндрической элементарной конвективной ячейке с конически углубленным дном / Л. С. Бозбей, А. О. Костиков, В. И. Ткаченко // Пробл. машиностроения. – 2016. – Т. 19, № 2. – С. 19–24.

Поступила в редакцию 14.04.17