

<sup>1</sup> Б. В. Успенский, канд. техн. наук<sup>1</sup> К. В. Аврамов, д-р техн. наук<sup>2</sup> О. Я. Никонов, канд. техн. наук<sup>1</sup> Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины, г. Харьков,

e-mail: kvavramov@gmail.com

<sup>2</sup> Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет, г. Харьков, e-mail: malsea@ukr.net**Ключові слова:** супергармонійні резонанси, метод Раушера, нелінійні нормальні форми, конфігураційний простір.

УДК 534.1

**НЕЛИНЕЙНЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ПРИ СУПЕРГАРМОНИЧЕСКИХ РЕЗОНАНСАХ***Запропоновано метод розрахунку вимушених коливань суттєво нелінійних кусково-лінійних систем при супергармонійних резонансах. Метод базується на поєднанні нелінійних нормальних форм та методу Раушера, завдяки якому неавтономну динамічну систему зведено до еквівалентної автономної. За допомогою запропонованого методу досліджено супергармонійні коливання в ланці силової передачі двигуна внутрішнього згоряння. Детально розглянуто властивості резонансних коливань.***Введение**

Нелинейные нормальные формы (ННФ) как подход к анализу нелинейных динамических систем был введен в работах Розенберга. В работах Маневича и Михлина построены асимптотические процедуры для расчета ННФ и предложено сочетание метода Раушера и ННФ Каудерера-Розенберга для исследования вынужденных резонансных колебаний. В работах [1, 2] ННФ Шоу-Пьера применяются совместно с методом Раушера для исследования резонансных вынужденных колебаний. Теория инвариантных многообразий для построения ННФ развивается в работах Шоу и Пьера [3]. Подробный обзор результатов, полученных по теории ННФ, содержится в статье [4].

Много усилий было предпринято для исследования кусочно-линейных систем, что объясняется их важностью в инженерном деле. Ряд исследований посвящён исследованию устойчивости, хаоса и бифуркационного поведения кусочно-линейных и виброударных осцилляторов. Хаотические вынужденные колебания в билинейном осцилляторе численно исследуются в [5]. Подробный обзор исследований колебаний кусочно-линейных систем содержится в статье [6]. Крутильные колебания кусочно-линейных систем исследуются в [7]. Кусочно-линейные модели балок с поперечными трещинами рассматриваются в работах [8, 9].

Результаты анализа колебаний в кусочно-линейном осцилляторе при супергармонических резонансах представлены в работах Maezawa. Супергармонические колебания в кусочно-линейных моделях балок с поперечными трещинами исследуются в статьях [10, 11].

Нелинейные моды свободных колебаний кусочно-линейных систем рассматриваются в статьях [12–14]. ННФ в области основных резонансов вынужденных колебаний кусочно-линейных систем исследуются в работе [15].

В этой статье предложен метод расчета вынужденных колебаний кусочно-линейных систем при супергармонических резонансах, основанный на сочетании ННФ Шоу-Пьера и метода Раушера. В основе этого метода лежит автономизация уравнений нелинейных вынужденных колебаний кусочно-линейных систем. С помощью данного метода исследована последовательность супергармонических резонансов крутильных колебаний силового передаточного звена двигателя внутреннего сгорания. Подробно исследуются свойства ННФ таких колебаний.

**1. Постановка задачи**

Рассмотрим механическую систему с  $N$  степенями свободы и трilinearной упругой характеристикой. На  $k$ -ю массу механической системы действует периодическая возмущающая сила  $A \cos(\omega t)$ . Движение механической системы опишем обобщенными координатами  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$ . Тогда уравнение движения системы, в общем случае, представим так:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_i + f_i(\mathbf{x}) &= 0; i = 1, \dots, k-1, k+1, \dots, N; \\ \ddot{x}_k + f_k(\mathbf{x}) &= A \cos(\omega t), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $A$ ,  $\omega$  – амплитуда и частота возмущающей силы. Функции  $f_i$ ,  $i=1, \dots, N$  являются трилинейными упругими характеристиками. В общем случае их можно записать как

$$f_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{k}_{1i} \mathbf{x}; \Delta_{13} < \mathbf{h}^T \mathbf{x} < \Delta_{12}; \\ \mathbf{k}_{2i} \mathbf{x} + b_{2i}; \mathbf{h}^T \mathbf{x} \geq \Delta_{12}; \\ \mathbf{k}_{3i} \mathbf{x} + b_{3i}; \mathbf{h}^T \mathbf{x} \leq \Delta_{13}, \end{cases} \quad (2)$$

где  $\mathbf{k}_{1i}$ ,  $\mathbf{k}_{2i}$ ,  $\mathbf{k}_{3i}$  – вектора-строки коэффициентов;  $b_{2i}$ ,  $b_{3i}$  – константы, обеспечивающие непрерывность упругой характеристики.

Итак, функции  $f_i(\mathbf{x})$  являются непрерывными, а их производные  $\frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}$  терпят разрыв.

Подчеркнем, что динамическая система (1), (2) является существенно нелинейной. Нелинейные нормальные формы в таких системах рассматривались в статьях [13, 14].

## 2. ННФ Шоу-Пьера для супергармонических колебаний

Для анализа вынужденных колебаний воспользуемся методом Раушера совместно с ННФ Шоу-Пьера. Такой подход для систем с гладкими нелинейностями был предложен в работах [1, 2]. Для анализа вынужденных колебаний кусочно-линейных систем этот подход был обобщен в работе [14]. Метод основывается на том факте, что многие нелинейные системы в области основных резонансов колеблются около ННФ [16]. В данном разделе метод Раушера применяется совместно с ННФ Шоу-Пьера для получения колебаний при супергармонических резонансах.

ННФ в системе (1), (2) будем разыскивать вблизи формы свободных колебаний системы с линейным участком  $\mathbf{k}_1 \mathbf{x}$ . Эта система имеет следующую матричную форму:

$$\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_1 \mathbf{x} = 0, \quad (3)$$

где  $\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{11} \\ \mathbf{k}_{12} \\ \dots \\ \mathbf{k}_{1N} \end{bmatrix}$  – квадратная матрица, представленная в блочной форме. Приведем динамическую

систему (3) к модальным координатам  $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_N)$ , которые определяются так:  $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\boldsymbol{\eta}$ , где  $\mathbf{Q}$  – матрица собственных векторов матрицы  $\mathbf{K}_1$ . Динамическую систему (3) в модальных координатах можно записать так:

$$\ddot{\eta}_i + \omega_i^2 \eta_i = 0, \quad i = 1, \dots, N,$$

где  $\omega_i^2$  – собственные значения матрицы  $\mathbf{K}_1$ .

Нелинейная динамическая система (1) относительно модальных координат принимает следующий вид:

$$\ddot{\boldsymbol{\eta}} + \boldsymbol{\Lambda}_1 \boldsymbol{\eta} = \tilde{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\eta}) + \mathbf{Q}_k^{-1} A \cos(\omega t), \quad (4)$$

где  $\boldsymbol{\Lambda}_1 = \text{diag}(\omega_1^2, \dots, \omega_N^2)$ ;  $\mathbf{Q}_k^{-1}$  –  $k$ -й столбец матрицы  $\mathbf{Q}^{-1}$ .

Преобразованная вектор-функция  $\tilde{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\eta})$  имеет форму

$$\tilde{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\eta}) = \begin{cases} 0, \Delta_{13} < \mathbf{h}^T \mathbf{Q}\boldsymbol{\eta} < \Delta_{12}; \\ \mathbf{Z}_2 \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}_2, \mathbf{h}^T \mathbf{Q}\boldsymbol{\eta} \geq \Delta_{12}; \\ \mathbf{Z}_3 \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}_3, \mathbf{h}^T \mathbf{Q}\boldsymbol{\eta} \leq \Delta_{13}, \end{cases}$$

где  $\mathbf{Z}_2 = \boldsymbol{\Lambda}_1 - \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{K}_2 \mathbf{Q}$ ;  $\mathbf{Z}_3 = \boldsymbol{\Lambda}_1 - \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{K}_3 \mathbf{Q}$ ;  $\boldsymbol{\xi}_2 = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{b}_2$ ;  $\boldsymbol{\xi}_3 = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{b}_3$ ;

$$\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{21} \\ \mathbf{k}_{22} \\ \dots \\ \mathbf{k}_{2N} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{K}_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{31} \\ \mathbf{k}_{32} \\ \dots \\ \mathbf{k}_{3N} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{21} \\ \mathbf{b}_{22} \\ \dots \\ \mathbf{b}_{2N} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{31} \\ \mathbf{b}_{32} \\ \dots \\ \mathbf{b}_{3N} \end{bmatrix}.$$

В дальнейшем рассмотрим колебания в области супергармонического резонанса [17]

$$\omega = \frac{\omega_\mu}{M} + \gamma, \quad (5)$$

где  $\gamma$  – малая величина расстройки;  $\mu$  – номер собственной частоты;  $M$  – целое положительное число.

Так как в резонансном условии (5) участвует собственная частота  $\omega_\mu$ , то обобщенная координата  $\eta_\mu$  предполагается наиболее активной. Поэтому она выбирается в качестве ведущей координаты. В дальнейшем воспользуемся координатами  $(a, \varphi)$ , которые определяются как

$$\eta_\mu = a \cos \varphi; \quad \dot{\eta}_\mu = -a\omega_\mu \sin \varphi. \quad (6)$$

Все остальные координаты являются ведомыми и выражаются через ведущую так:

$$\eta_i = P_i(a, \varphi) = \sum_{l=1}^{N_a} \sum_{m=1}^{N_\varphi} C_i^{(l,m)} A_l(a) \cos[(m-1)\varphi], \quad i = 1, \dots, \mu-1, \mu+1, N, \quad (7)$$

где  $A_l(a)$  – базисные функции;  $N_a$  – число базисных функций  $A_l$ ;  $C_i^{(l,m)}$  – неизвестные коэффициенты, метод расчета которых будет изложен ниже. Весь набор этих коэффициентов объединим в вектор  $\mathbf{C}$ .

Если коэффициенты  $C_i^{(l,m)}$  найдены, то ННФ Шоу-Пьера определены [14].

Теперь воспользуемся идеей метода Раушера и представим правую часть динамической системы (4) зависящей от обобщенных координат системы, то есть приведем неавтономную динамическую систему к псевдоавтономной. Дело в том, что для псевдоавтономной динамической системы можно воспользоваться подходом для расчета ННФ Шоу-Пьера в кусочно-линейных системах [15]. Именно эта стратегия будет реализовываться в дальнейшем.

Вследствие выполнения резонансного условия (5) возмущающую силу (4) можно представить в следующем виде:

$$A \cos(\omega t) = A \cos\left(\frac{\omega_\mu}{M} t\right) + O(\gamma) = A \cos\left(\frac{\varphi}{M}\right) + O(\gamma). \quad (8)$$

Используя соотношения (6), получим:

$$\cos \varphi = \frac{\eta_\mu}{\sqrt{\eta_\mu^2 + \frac{1}{\omega_\mu^2} \dot{\eta}_\mu^2}}; \quad \sin \varphi = \frac{\dot{\eta}_\mu}{\sqrt{\omega_\mu^2 \eta_\mu^2 + \dot{\eta}_\mu^2}}.$$

Возмущающую силу (8) можно записать так:

$$A \cos\left(\frac{\varphi}{M}\right) = A \cos\left[\frac{1}{M} \arccos\left(\frac{\omega_\mu \eta_\mu}{\sqrt{\omega_\mu^2 \eta_\mu^2 + \dot{\eta}_\mu^2}}\right)\right] = AG(\eta_\mu, \dot{\eta}_\mu). \quad (9)$$

Теперь соотношения (9) введем в (4) и получим псевдоавтономную динамическую систему в виде

$$\ddot{\boldsymbol{\eta}} + \Lambda_1 \boldsymbol{\eta} = \mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}), \quad (10)$$

где  $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_N)$ ;  $\mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}) = \tilde{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\eta}) + \mathbf{Q}_k^{-1} AG(\eta_\mu, \dot{\eta}_\mu)$ .

Движение на нелинейной нормальной форме системы (10) описывается следующей системой дифференциальных уравнений [14]:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -\frac{g_\mu(\boldsymbol{\eta}(a, \varphi))}{\omega_\mu} \sin \varphi; \\ \dot{\varphi} &= \omega_\mu - \frac{g_\mu(\boldsymbol{\eta}(a, \varphi))}{a\omega_\mu} \cos \varphi. \end{aligned} \quad (11)$$

Теперь анализ ННФ в неавтономной динамической системе (4) в случае супергармонического резонанса (5) сведен к поиску ННФ автономной динамической системы (10). Рассмотрим поиск ННФ в кусочно-линейной псевдоавтономной системе (10), следуя подходу из статьи [14]. Поиск инвариантного многообразия автономной динамической системы (10) сводится к расчету коэффициентов разложения (7)  $C_i^{(l,m)}$ ,  $i = 1, \dots, \mu-1, \mu+1, \dots, N$ ;  $l = 1, \dots, N_a$ ;  $m = 1, \dots, N_\varphi$ . Эти коэффициенты вычисляются из системы нелинейных алгебраических уравнений, которые выводятся из метода Бубнова-Галёркина.

Вычислим значения первых и вторых производных обобщённых координат  $\eta_i$ ,  $i = 1, \dots, \mu-1, \mu+1, \dots, N$  по времени. Используя уравнения (11), получим

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_i &= \sum_{l=1}^{N_a} \sum_{m=1}^{N_\varphi} C_i^{l,m} [A_l' \cos((m-1)\varphi) \cdot \dot{a} - A_l (m-1) \sin((m-1)\varphi) \cdot \dot{\varphi}] = \\ &= \sum_{l=1}^{N_a} \sum_{m=1}^{N_\varphi} \left[ C_i^{l,m} \frac{g_\mu(a, \varphi)}{\omega_\mu} \left[ -A_l' \cos \varphi \cos((m-1)\varphi) + (m-1) \frac{A_l}{a} \sin \varphi \sin((m-1)\varphi) \right] - \right. \\ &\quad \left. - \omega_\mu (m-1) A_l \sin((m-1)\varphi) \right]; \\ \ddot{\eta}_j &= \sum_{l=1}^{N_a} \sum_{m=1}^{N_\varphi} \left[ \cos((m-1)\varphi) (A_l'' \dot{a}^2 + A_l' \ddot{a}) - \sin((m-1)\varphi) (2(m-1) A_l' \dot{a} \dot{\varphi} + A_l \ddot{\varphi}) \right], \end{aligned} \quad (12)$$

где  $A_l'' = \frac{d^2 A_l}{da^2}$ . Для вычисления вторых производных (12) получим следующие соотношения из уравнений (11):

$$\begin{aligned} \ddot{a} &= -\frac{1}{\omega_\mu} \left[ \left( \frac{\partial g_\mu}{\partial a} \dot{a} + \frac{\partial g_\mu}{\partial \varphi} \dot{\varphi} \right) \sin \varphi + g_\mu \cos \varphi \right]; \\ \ddot{\varphi} &= -\frac{1}{\omega_\mu} \left[ \left( \frac{\partial g_\mu}{\partial a} \dot{a} + \frac{\partial g_\mu}{\partial \varphi} \dot{\varphi} - \frac{g_\mu}{a} \dot{a} \right) \frac{1}{a} \cos \varphi - \frac{g_\mu}{a} \dot{\varphi} \sin \varphi \right], \\ \frac{\partial g_\mu}{\partial a} &= \begin{cases} 0, & \Delta_2 < \mathbf{h}^T \mathbf{Q} \boldsymbol{\eta} < \Delta_3; \\ \sum_{i=1}^N Z_{2\mu i} \frac{\partial \eta_i}{\partial a}, & \mathbf{h}^T \mathbf{Q} \boldsymbol{\eta} \leq \Delta_2; \\ \sum_{i=1}^N Z_{3\mu i} \frac{\partial \eta_i}{\partial a}, & \Delta_3 \leq \mathbf{h}^T \mathbf{Q} \boldsymbol{\eta}; \end{cases} & \frac{\partial g_\mu}{\partial \varphi} &= \begin{cases} -\frac{A Q_{\mu,k}^{-1}}{M} \sin \frac{\varphi}{M}, & \Delta_2 \leq \mathbf{h}^T \mathbf{Q} \boldsymbol{\eta} \leq \Delta_3; \\ \sum_{i=1}^N Z_{2\mu i} \frac{\partial \eta_i}{\partial \varphi} - \frac{A Q_{\mu,k}^{-1}}{M} \sin \frac{\varphi}{M}, & \mathbf{h}^T \mathbf{Q} \boldsymbol{\eta} < \Delta_2; \\ \sum_{k=1}^N Z_{3\mu i} \frac{\partial \eta_i}{\partial \varphi} - \frac{A Q_{\mu,k}^{-1}}{M} \sin \frac{\varphi}{M}, & \Delta_3 < \mathbf{h}^T \mathbf{Q} \boldsymbol{\eta}; \end{cases} \\ \frac{\partial \eta_i}{\partial a} &= \begin{cases} \cos \varphi, & i = \mu; \\ \sum_{l=1}^{N_a} \sum_{m=1}^{N_\varphi} C_i^{l,m} A_l' \cos((m-1)\varphi), & i \neq \mu; \end{cases} & \frac{\partial \eta_i}{\partial \varphi} &= \begin{cases} -a \sin \varphi, & i = \mu; \\ -\sum_{l=1}^{N_a} \sum_{m=1}^{N_\varphi} C_i^{l,m} (m-1) A_l \sin((m-1)\varphi), & i \neq \mu, \end{cases} \end{aligned} \quad (13)$$

где  $Z_{2\mu i}$  и  $Z_{3\mu i}$  – элементы матриц  $\mathbf{Z}_2$  и  $\mathbf{Z}_3$ ;  $\mathbf{Q}_{\mu,k}^{-1}$  – элементы матрицы  $\mathbf{Q}^{-1}$ .

Соотношения (13) введем в (12), а полученный результат – в (10). Тогда получим невязку  $\mathbf{R}$  нелинейной динамической системы (10) как функцию переменных  $a$  и  $\varphi$  и вектора  $\mathbf{C}$

$$\mathbf{R}(a, \varphi, \mathbf{C}) = \ddot{\boldsymbol{\eta}}(a, \varphi, \mathbf{C}) + \Lambda_1 \boldsymbol{\eta}(a, \varphi, \mathbf{C}) - \mathbf{g}(a, \varphi, \mathbf{C}), \quad (14)$$

где  $\mathbf{R} = (R_1, \dots, R_N)$ . Подчеркнём, что невязка  $R_\mu$  тождественна 0 вследствие замены переменных (6) и уравнений (10). Поэтому в дальнейшем в системе (14) не рассматривается  $\mu^e$  уравнение. Следуя методу Галёркина, для расчета вектора  $\mathbf{C}$  составим условия ортогональности невязок базисным функциям  $A_l \cos(m-1)\varphi$

$$\int_0^{2\pi a_0} \int_0^{\mu} [\ddot{\eta}(a, \varphi, \mathbf{C}) + \Lambda_1 \eta(a, \varphi, \mathbf{C}) - \mathbf{g}(a, \varphi, \mathbf{C})] A_l \cos((m-1)\varphi) da d\varphi = 0, \quad l = 1, \dots, N_a; m = 1, \dots, N_\varphi, \quad (15)$$

где  $a_0$  – верхняя граница изменения параметра  $a$ .

Условия (15) представляют собой систему  $(N-1) \cdot N_a \cdot N_\varphi$  нелинейных алгебраических уравнений относительно такого же числа неизвестных, которые являются компонентами вектора  $\mathbf{C}$ . Для численного решения системы нелинейных уравнений (15) используется метод Ньютона-Рафсона. Интегрирование выражений (15) производится численно.

В результате численного решения системы нелинейных алгебраических уравнений (15) получаются коэффициенты  $C_i^{(l,m)}$ ,  $i = 1, \dots, \mu - 1, \mu + 1, N$ ;  $l = 1, \dots, N_a$ ;  $m = 1, \dots, N_\varphi$ .

Итак, инвариантное многообразие (7) получено.

### 3. Численный анализ

Рассмотрим крутильные колебания участка силовой передачи двигателя внутреннего сгорания, которая рассмотрена в статье [14]. Эскиз этой системы представлен на рис. 1. В качестве обобщенных координат выберем углы поворотов дисков ( $\theta_1, \theta_2$ ). Моменты инерции дисков обозначим через  $I_1$  и  $I_2$  (рис. 1). Диски  $I_1$  и  $I_2$  соединяются валом с упругой муфтой, которая описывается трилинейной упругой характеристикой в виде

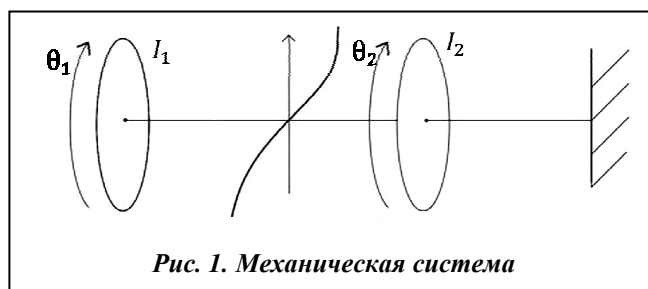


Рис. 1. Механическая система

$$f(\theta_1 - \theta_2) = \begin{cases} c_1(\theta_1 - \theta_2); & -\Delta < \theta_1 - \theta_2 < \Delta; \\ c_2(\theta_1 - \theta_2) + \Delta(c_2 - c_1); & \theta_1 - \theta_2 \geq \Delta; \\ c_2(\theta_1 - \theta_2) - \Delta(c_2 - c_1); & \theta_1 - \theta_2 \leq -\Delta, \end{cases} \quad (16)$$

где  $c_1, c_2$  – параметры жёсткости упругой муфты. К диску  $I_2$  крепится заземленный с одной стороны упругий вал. На диск  $I_1$  действует возмущающий крутильный момент  $A \cdot \cos(\omega t)$ . Уравнения вынужденных колебаний системы представим так:

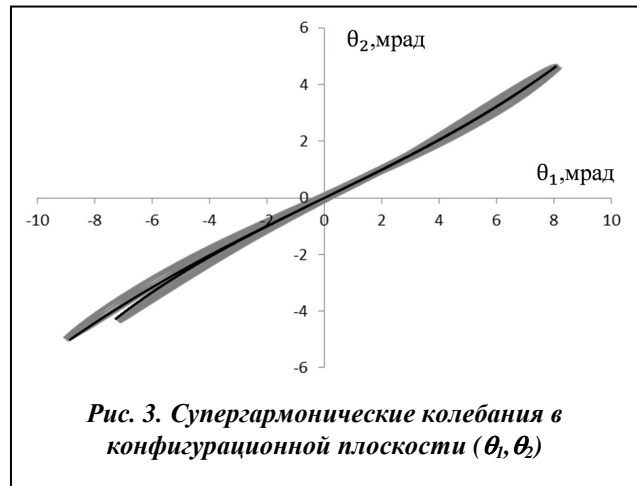
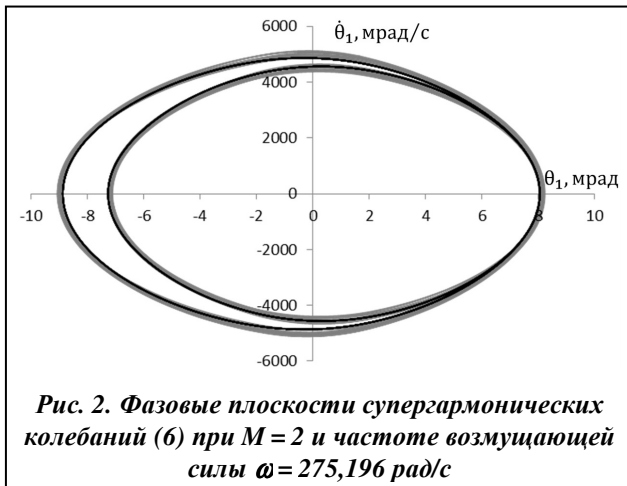
$$\begin{aligned} I_1 \ddot{\theta}_1 + f(\theta_1 - \theta_2) &= A \cos(\omega t); \\ I_2 \ddot{\theta}_2 - f(\theta_1 - \theta_2) + c_1 \theta_2 &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Численные значения параметров системы принимались следующими [14]:  $c_1 = 150$  кН·м;  $c_2 = 300$  кН·м;  $\Delta = 1,04$  мрад;  $I_1 = 0,3$  кг/м<sup>2</sup>;  $I_2 = 0,45$  кг/м<sup>2</sup>;  $A = 77,7$  Н·м.

Подчеркнём, что динамическая система (17) является существенно нелинейной. Собственные частоты линейных колебаний системы (рис. 1) с малыми амплитудами таковы:  $\omega_1 = 577,1$  рад/с;  $\omega_2 = 1414,2$  рад/с.

Проводились численные расчеты супергармонических резонансных колебаний (6) при  $M = 2$ . Результаты расчетов при частоте возмущающей силы  $\omega = 275,196$  рад/с приведены на рис. 2. Движения показаны в фазовой плоскости  $(\theta_1, \dot{\theta}_1)$ . Чёрной линией представлены результаты, полученные методом Раушера, а серой – данные прямого численного интегрирования уравнений движения (17) из начальных условий, принадлежащих ННФ. Результаты, полученные двумя методами, близки.

В конфигурационном пространстве супергармонические колебания (см. рис. 2) принимают вид, представленный на рис. 3. Результаты расчета, полученные методом Раушера, показаны черной линией, а результаты прямого численного интегрирования – серой. Как видно из рис. 3, в нижней части ННФ наблюдается расслоение решения. Такого расслоения не может наблюдаться у ННФ Каудерера-Розенберга [12], которые даны в виде полиномиальной зависимости в конфигурационном пространстве. Поэтому ННФ в области супергармонических резонансов нельзя представить ННФ Каудерера-Розенберга.



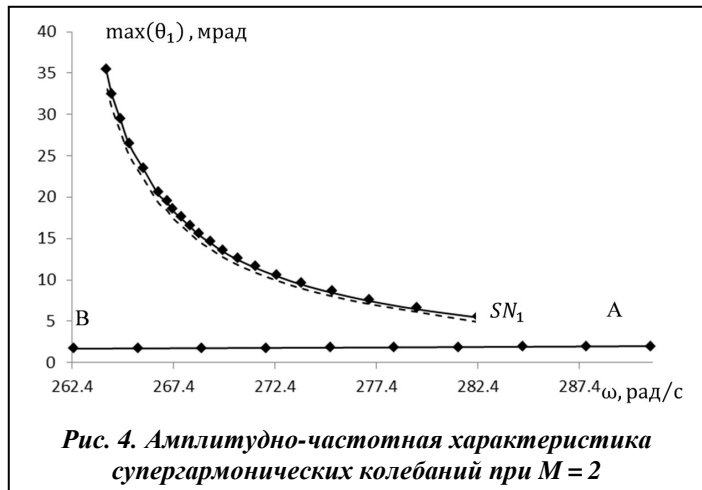
В результате расчетов ННФ Шоу-Пьера при разных значениях частот возмущающего воздействия  $\omega$  была построена амплитудно-частотная характеристика, приведенная на рис. 4. Она состоит из двух ветвей. Ветвь  $AB$  описывает участок линейных колебаний конструкции. Такие движения удовлетворяют условию  $-\Delta < \theta_1 - \theta_2 < \Delta$  из (16). Второй участок амплитудно-частотной характеристики начинается из седло-узловой бифуркационной точки  $SN_1$ , где соединяются устойчивые и неустойчивые супергармонические колебания. Устойчивые колебания показаны на рис. 4 сплошной линией, а неустойчивые – пунктирной.

Проводилось прямое численное интегрирование уравнений движения (17) из начальных условий, принадлежащих нелинейным нормальным формам. Такие расчеты выполнялись для достижения двух целей:

- проверка результатов, полученных методом Раушера (п. 3);
- оценка устойчивости супергармонических колебаний, полученных методом Раушера.

Если при численном интегрировании системы (17) из начальных условий, принадлежащих нелинейной нормальной форме, траектории уходят от этих движений, то они неустойчивы.

В результате численного интегрирования установлено, что периодические движения, представленные пунктирной линией на рис. 4, не реализуются. Амплитуды периодических колебаний, полученные прямым численным интегрированием, показываются ромбами на рис. 4. Результаты, полученные методом Раушера и прямым численным интегрированием, близки.



## Выводы

Предложен метод расчета резонансных супергармонических колебаний в существенно нелинейных кусочно-линейных системах на основе сочетания метода Раушера и ННФ Шоу-Пьера. Этот метод основан на автономизации системы уравнений движения, описывающей вынужденные колебания кусочно-линейных систем. В результате применения описанной процедуры получается псевдаавтономная динамическая система, которая исследуется методом ННФ Шоу-Пьера для свободных колебаний.

Исследованы супергармонические резонансы при крутильных колебаниях существенно нелинейной кусочно-линейной механической системы с двумя степенями свободы. ННФ при супергармоническом резонансе в конфигурационном пространстве содержат расслоения. Такие движения нельзя

представити в виде полиномиальных зависимостей в конфигурационном пространстве. Поэтому движения при супергармонических резонансах не могут быть найдены с использованием идеологии ННФ Каудерера-Розенберга, и для получения таких движений применяется сочетание метода Раушера и ННФ Шоу-Пьера.

Амплитудно-частотные характеристики вынужденных колебаний обладают участками, которые описывают линейные колебания, и участками нелинейных колебаний. Последние начинаются в седло-узловой бифуркационной точке, где соединяются устойчивые и неустойчивые супергармонические колебания. Такая похожесть поведения нелинейных колебаний в области различных супергармонических резонансов впервые была обнаружена в осцилляторе Дuffинга [18].

В случае супергармонических резонансов с четными значениями  $M$  движения являются асимметричными в фазовых плоскостях относительно оси ординат.

### Благодарности

Статья содержит результаты исследований, проведенных при грантовой поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований по конкурсному проекту Ф76.

### Литература

1. Avramov K. V. Nonlinear modes of parametric vibrations and their applications to beams dynamics / K. V. Avramov // *J. Sound and Vibration*. – 2009. – № 322. – P. 476–489.
2. Avramov K. V. Analysis of forced vibrations by nonlinear modes / K. V. Avramov // *Nonlinear Dynamics*. – 2008. – № 53. – P. 117–127.
3. Shaw S. W. Modal analysis-based reduced-order models for nonlinear structures – an invariant manifolds approach / S. W. Shaw, C. Pierre, E. Pesheck // *The Shock and Vibration Digest*. – 1999. – Vol. 31. – P. 3–16.
4. Avramov K. Review of applications of nonlinear normal modes for vibrating mechanical systems / K. Avramov, Yu. Mihlin. // *Appl. Mech. Reviews*. – 2013. – № 65. – P. 4–25.
5. Ostrovsky L. A. Transitions and statistical characteristics of vibrations in a bimodal oscillator / L. A. Ostrovsky, I. M. Starobinets // *Chaos*. – 1995. – № 5. – P. 496–500.
6. Bishop R. S. Impact oscillators / R. S. Bishop // *Philosophy Transactions of Royal Society*. – 1994. – № A347. – P. 347–351.
7. Avramov K. V. Bifurcation analysis of a vibropercussion system by the method of amplitude surfaces / K. V. Avramov // *Intern. Appl. Mech.* – 2001. – № 38. – P. 1151–1156.
8. Avramov K. Bifurcations behavior of bending vibrations of beams with two breathing cracks / K. Avramov, T. Raimberdiyev // *Eng. Fracture Mech.* – 2017. – № 178. – P. 22–38.
9. Avramov K. Modal asymptotic analysis of sub-harmonic and quasi-periodic flexural vibrations of beams with fatigue crack / K. Avramov, T. Raimberdiyev // *Nonlinear Dynamics*. – 2017. – № 88. – P. 1213–1228.
10. Borsunovsky A. P. Considerations regarding superharmonic vibrations of a cracked beam and the variation in damping caused by the presence of the crack / A. P. Borsunovsky, C. Surace // *J. Sound and Vibrations*. – 2005. – № 288 (4–5). – P. 865–886.
11. Ji J. C. On the approximate solution of a piecewise nonlinear oscillator under superharmonic resonance / J. C. Ji, H. Hansen // *J. Sound and Vibrations*. – 2005. – № 283 (1–2). – P. 467–474.
12. Chen S. C. Normal modes for piecewise linear vibratory systems / S. C. Chen, S. W. Shaw // *Nonlinear Dynamics*. – 1996. – № 10. – P. 135–164.
13. Jiang D. Large amplitude non-linear normal modes of piecewise linear systems / D. Jiang, C. Pierre, S. W. Shaw // *J. Sound and Vibration*. – 2004. – № 272. – P. 869–891.
14. Uspensky B. V. On the nonlinear normal modes of free vibration of piecewise linear systems / B. V. Uspensky, K. V. Avramov // *J. Sound and Vibration*. – 2014. – № 333. – P. 3252–3265.
15. Uspensky B. Nonlinear modes of piecewise linear systems under the action of periodic excitation / B. Uspensky, K. Avramov // *Nonlinear Dynamics*. – 2014. – № 76. – P. 1151–1156.
16. Vakakis A. Normal modes and localization in nonlinear systems / A. Vakakis, L. I. Manevich, Yu. V. Mikhlin, V. N. Pilipchuk, A. A. Zevin. – New York: Wiley Interscience, 1996. – 780 p.
17. Nayfeh A. H. Nonlinear oscillations / A. H. Nayfeh, D. T. Mook. – New York: John Wiley and Sons, 1995. – 720 p.
18. Parlitz U. Common dynamical features of periodically driven strictly dissipative oscillators / U. Parlitz // *Intern. J. Bifurcation and Chaos*. – 1993. – Vol. 3, № 3. – P. 703–715.

Поступила в редакцию 23.10.17