

**В. В. Мірошніков,**

канд. техн. наук

Харківський національний  
університет будівництва та  
архітектури,

м. Харків, e-mail:

mivi30166@gmail.com)

УДК 539.3

**ПЕРША ОСНОВНА ЗАДАЧА ТЕОРІЇ  
ПРУЖНОСТІ В ПРОСТОРІ З  $N$   
ПАРАЛЕЛЬНИМИ КРУГОВИМИ  
ЦИЛІНДРИЧНИМИ ПОРОЖНИНАМИ***Наведено розв'язок тривимірної задачі теорії пружності, коли на межах паралельних циліндричних порожнин в пружному просторі задані напруження. Розв'язок системи рівнянь Ламе отримано узагальненим методом Фур'є в циліндричних координатах, пов'язаних з циліндрами. Нескінченні системи лінійних алгебраїчних рівнянь, до яких зведена проблема, розв'язуються методом усічення. В результаті були знайдені переміщення та напруження в пружному тілі. Числові результати зведені для випадку двох циліндрів.***Ключові слова:** циліндричні порожнини в просторі, рівняння Ламе, узагальнений метод Фур'є.**Вступ**

В науковій літературі відомі аналітичні підходи до розв'язання задач теорії пружності для однієї циліндричної порожнини в просторі [1–3] і напівпросторі [4]. Числові результати в вісесиметричному випадку наведені для періодичного напруження порожнини вздовж її осі [3]. Для тривимірної задачі навіть у випадку однієї порожнини числові розрахунки напружень відсутні. Лише нещодавно просторова задача для двох порожнин у пружному циліндрі вивчалась в роботі [5], де наведені деякі результати числових розрахунків напружень, але відсутній детальний аналіз впливу взаємного розташування порожнин та зовнішньої межі.

Водночас в механіці гірських порід і геотехнічній механіці такі задачі знаходять застосування при прогнозуванні міцності гірських виробок в глибинних шахтних породах і при проектуванні тунелів в метробуді. Наскільки важливі чисто пружні розв'язки для проектування подібних технічних об'єктів можна судити по роботі [6]. В ній обговорюються різні підходи до оцінки міцності таких споруд на основі просторових задач теорії пружності і наведений великий список літературних джерел з плоских та просторових задач, що тісно примикають до цієї проблематики.

В цій статті наведено аналітико-численне розв'язання першої основної просторової задачі теорії пружності (на межі задані напруження) для декількох паралельних кругових циліндричних порожнин в пружному просторі. Як приклад подано докладний числовий аналіз напружено-деформівного стану простору з двома порожнинами і вивчено взаємний вплив порожнин.

В основі методу розв'язання задачі, як і в [5], лежить узагальнений метод Фур'є [7].

**Постановка задачі. Метод розв'язання.**

Пружний однорідний простір має  $N$  кругових непересічних між собою циліндричних паралельних порожнин, на межах яких задані напруження, які будемо вважати швидко спадними до нуля по координаті  $z$  на далеких відстанях від початку координат.

Потрібно розв'язати рівняння рівноваги Ламе за умови

$$F\bar{U} = \bar{F}_0^{(q)} \text{ на } S_q, q = 1, 2, \dots, N, \quad (1)$$

де  $S_q$  – поверхня порожнини з номером  $q$ ,

$$F\bar{U} = 2 \cdot G \cdot \left[ \frac{\sigma}{1-2 \cdot \sigma} \bar{n} \cdot \text{div} \bar{U} + \frac{\partial}{\partial n} \bar{U} + \frac{1}{2} (\bar{n} \cdot \text{rot} \bar{U}) \right], \quad (2)$$

де  $\bar{n}$  – орт нормалі до поверхні  $S_q$ ;  $G$  – модуль зсуву;  $\sigma$  – коефіцієнт Пуассона.

На нескінченності напруження дорівнюють нулю.

Розв'язок задачі шукаємо у вигляді

$$\vec{U} = \sum_{p=1}^N \vec{U}_p, \quad (3)$$

де

$$\vec{U}_p = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \sum_{m=-\infty}^{\infty} \vec{\Omega}_m^{(p)}(M_p; \lambda), \quad M_p = (\rho_p, \phi_p, z), \quad (4)$$

$$\vec{\Omega}_m^{(p)}(M_p; \lambda) = x_m^{(p)}(\lambda) \cdot \vec{S}_{1,m}(M_p; \lambda) + y_m^{(p)}(\lambda) \cdot \vec{S}_{2,m}(M_p; \lambda) + z_m^{(p)}(\lambda) \cdot \vec{S}_{3,m}(M_p; \lambda), \quad (5)$$

де  $x_m^{(p)}(\lambda)$ ,  $y_m^{(p)}(\lambda)$ ,  $z_m^{(p)}(\lambda)$  – невідомі функції;  $\vec{S}_{k,m}$  – базисні розв’язки рівняння Ламе зовні циліндра

$$\left. \begin{aligned} \vec{S}_{1,m}(M_p; \lambda) &= \lambda^{-1} \cdot \text{grad}(s_m), \\ \vec{S}_{2,m}(M_p; \lambda) &= \lambda^{-1} \cdot \left[ \text{grad} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + 4(\sigma - 1) \left( \vec{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \vec{e}_\phi \rho^{-1} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \right] \cdot s_m, \\ \vec{S}_{3,m}(M_p; \lambda) &= i \cdot \lambda^{-1} \cdot \text{rot}[\vec{e}_z \cdot s_m], \end{aligned} \right\}, \quad (6)$$

$$s_m(\rho, \phi, z; \lambda) = (\text{sign}(\lambda))^m \cdot K_m(|\lambda\rho) \cdot e^{i(m\phi + \lambda \cdot z)}.$$

При розв’язанні задачі також будуть використані базисні розв’язки рівняння Ламе, регулярні всередині циліндра  $\rho < \rho_0$ . Вони мають вигляд

$$\left. \begin{aligned} \vec{R}_{1,m}(M_p; \lambda) &= \lambda^{-1} \cdot \text{grad}(r_m), \\ \vec{R}_{2,m}(M_p; \lambda) &= \lambda^{-1} \cdot \left[ \text{grad} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + 4(\sigma - 1) \left( \vec{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \vec{e}_\phi \rho^{-1} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \right] \cdot r_m, \\ \vec{R}_{3,m}(M_p; \lambda) &= i \cdot \lambda^{-1} \cdot \text{rot}[\vec{e}_z \cdot r_m], \end{aligned} \right\}, \quad (7)$$

$$r_m(\rho, \phi, z; \lambda) = I_m(\lambda\rho) \cdot e^{i(m\phi + \lambda \cdot z)}$$

де  $I_m(x)$ ,  $K_m(x)$  – функції Бесселя [2].

Розв’язання (6), (7) наведені в [7].

Напруження на поверхні пружного тіла з нормаллю  $\vec{n}$  обчислюються за допомогою оператора напруження (2).

Для базисних векторів (6), (7) маємо при  $\vec{n} = \vec{e}_\rho$  та  $\rho = \rho_0$  [1]

$$\left. \begin{aligned} F\vec{U}_{1,m}^\pm &= \frac{2 \cdot G}{\rho_0} \cdot \left[ \mp Du_{m-1}^\pm \cdot \frac{e^{i\phi}}{2} (\vec{e}_\rho + i \cdot \vec{e}_\phi) \mp Du_{m+1}^\pm \cdot \frac{e^{-i\phi}}{2} (\vec{e}_\rho - i \cdot \vec{e}_\phi) + Du_m^\pm \cdot \vec{e}_z \right], \\ F\vec{U}_{2,m}^\pm &= \frac{2 \cdot G}{\rho_0} \cdot \left[ \mp [a_m + (\lambda\rho_0)^2 + (2\sigma - 3)D] \cdot u_{m-1}^\pm \cdot \frac{e^{i\phi}}{2} (\vec{e}_\rho + i \cdot \vec{e}_\phi) \mp [b_m + (\lambda\rho_0)^2 + \right. \\ &\quad \left. + (2\sigma - 3)D] u_{m+1}^\pm \cdot \frac{e^{-i\phi}}{2} (\vec{e}_\rho - i \cdot \vec{e}_\phi) + i [m^2 + (\lambda\rho_0)^2 + (2\sigma - 1)D] \cdot u_m^\pm \cdot \vec{e}_z \right], \\ F\vec{U}_{3,m}^\pm &= \frac{G}{\rho_0} \cdot \left[ \pm (D + m - 1) u_{m-1}^\pm \cdot \frac{e^{i\phi}}{2} (\vec{e}_\rho + i \cdot \vec{e}_\phi) \mp (D - m - 1) u_{m+1}^\pm \cdot \frac{e^{-i\phi}}{2} (\vec{e}_\rho - i \cdot \vec{e}_\phi) - i \cdot m \cdot u_m^\pm \cdot \vec{e}_z \right] \end{aligned} \right\}, \quad (8)$$

де  $\vec{U}_{1,m}^\pm = \begin{pmatrix} \vec{S}_{1,m} \\ \vec{R}_{1,m} \end{pmatrix}$ ,  $u_m^\pm = \begin{pmatrix} s_m \\ r_m \end{pmatrix}$ ,  $D = \rho \frac{\partial}{\partial \rho}$ ,  $a_m = (m-1) \cdot (m-1+2\sigma)$ ,  $b_m = (m+1)(m+1-2\sigma)$ ,  $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z$  – орти циліндричної системи координат.

При розв'язанні задачі узагальненим методом Фур'є будемо користуватися формулами переходу в базисних розв'язках від однієї циліндричної системи координат, пов'язаної з циліндром з номером  $p$ , до іншої, пов'язаної з циліндром з номером  $q$ . Ці формули мають вигляд [1]

$$\left. \begin{aligned} \bar{S}_{1,m}(M_p; \lambda) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_{m,n}^{(1)}(p, q) \cdot \bar{R}_{1,n}(M_q; \lambda), \\ \bar{S}_{2,m}(M_p; \lambda) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_{m,n}^{(1)}(p, q) \cdot \bar{R}_{2,n}(M_q; \lambda) + H_{m,n}^{(2)}(p, q) \cdot \bar{R}_{1,n}(M_q; \lambda), \\ \bar{S}_{3,m}(M_p; \lambda) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_{m,n}^{(1)}(p, q) \cdot \bar{R}_{3,n}(M_q; \lambda), \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

де  $H_{m,n}^{(1)}(p, q) = (-1)^n \tilde{K}_{m-n}(\lambda \ell_{pq}) \cdot e^{i(m-n)\alpha_{pq}}$ ;

$H_{m,n}^{(2)}(p, q) = \frac{\lambda}{2} \ell_{pq} (-1)^{n+1} e^{i(m-n)\alpha_{pq}} [\tilde{K}_{m-n+1}(\lambda \ell_{pq}) + \tilde{K}_{m-n-1}(\lambda \ell_{pq})]$ ,

$\tilde{K}(x) = (\text{sign}(x))^m \cdot K_m(|x|)$ ;  $\ell_{pq}, \alpha_{pq}$  – позначені на рис. 1.

Для знаходження напруження на поверхні циліндра з номером  $q$  запишемо (1) у вигляді

$$\vec{U} = \vec{U}_q + \sum_{p=1, p \neq q}^N \vec{U}_p. \quad (10)$$

Перепишемо (10), застосувавши формули переходу (9)

$$\begin{aligned} \vec{U} &= \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{\Omega}_n^{(q)}(M_q; \lambda) + \sum_{p=1, p \neq q}^N \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \sum_{m=-\infty}^{\infty} \bar{\Omega}_m^{(p)}(M_q; \lambda) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x_n^{(q)}(\lambda) \cdot \bar{S}_{1,m}(M_p; \lambda) + y_n^{(q)}(\lambda) \cdot \bar{S}_{2,m}(M_p; \lambda) + z_n^{(q)}(\lambda) \cdot \bar{S}_{3,m}(M_p; \lambda)] + \right. \\ &+ \sum_{p=1, p \neq q}^N \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [(x_m^{(q)}(\lambda) \cdot H_{m,n}^{(1)}(p, q) + y_n^{(q)}(\lambda) \cdot H_{m,n}^{(2)}(p, q)) \cdot \bar{R}_{1,n}(M_p; \lambda) + \\ &\left. y_n^{(p)}(\lambda) \cdot H_{m,n}^{(1)}(p, q) \cdot \bar{R}_{2,n}(M_p; \lambda) + z_n^{(q)}(\lambda) \cdot H_{m,n}^{(1)}(p, q) \cdot \bar{R}_{3,n}(M_p; \lambda)] \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

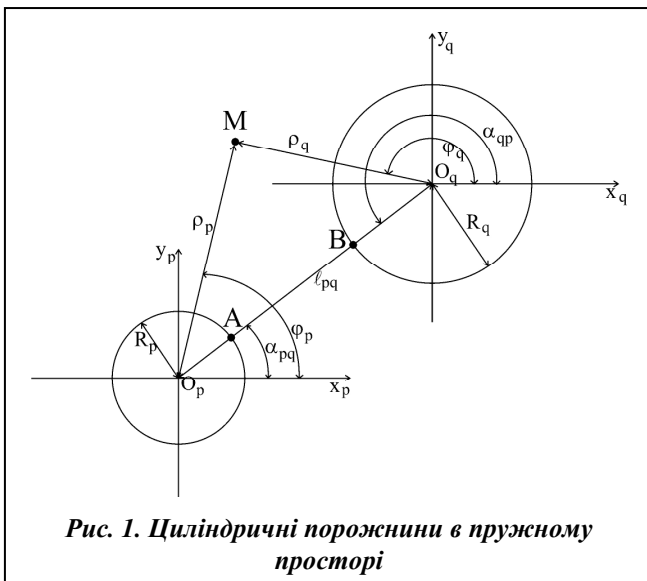


Рис. 1. Циліндричні порожнини в пружному просторі

В останній формулі всі базисні розв'язки записані в системі координат  $(\rho, \phi, z)$  циліндра з номером  $q$ .

Застосуємо до (11) оператор напруження (2) та використаємо рівності (8) для базисних розв'язків. В результаті отримаємо вектор напруження від всього розв'язання (3) на поверхні циліндра з номером  $q$ . Прирівняємо цей вектор напруження при  $\rho = R_q$  заданому вектору напруження, що діє на поверхні порожнини з  $\vec{n} = -\vec{e}_\rho$

$$\vec{F}_0^{(q)} = \vec{e}_\rho \cdot \sigma_\rho^{(q)} + \vec{e}_\phi \cdot \tau_{\rho\phi}^{(q)} + \vec{e}_z \cdot \tau_{\rho z}^{(q)}. \quad (12)$$

де  $\sigma_\rho^{(q)}, \tau_{\rho\phi}^{(q)}, \tau_{\rho z}^{(q)}$  – задані функції. Розкладемо їх в ряди-інтеграли по  $\phi$  і  $z$

$$\vec{F}_0^{(q)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda z} d\lambda \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\phi} (\vec{e}_\rho \cdot \vec{\sigma}_{n,\rho}^{(q)}(\lambda) + \vec{e}_\phi \cdot \vec{\tau}_{n,\phi}^{(q)} + \vec{e}_z \cdot \vec{\tau}_{n,z}^{(q)}). \quad (13)$$

В отриманій векторній рівності прирівняємо проекції при  $\vec{e}_\rho$ ,  $\vec{e}_\phi$ ,  $\vec{e}_z$ . В результаті отримаємо три рівності, які після звільнення в них від рядів та інтегралів дадуть три сукупності нескінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих  $x_n^{(q)}(\lambda)$ ,  $y_n^{(q)}(\lambda)$ ,  $z_n^{(q)}(\lambda)$ . Оскільки всього циліндричних порожнин  $N$  ( $q = 1, 2, \dots, N$ ), то таких сукупностей рівнянь буде  $3N$ . Це буде розв'язувальна система рівнянь задачі теорії пружності, що розглядається.

Необхідно відмітити, що нескінченні системи, до яких зведена проблема, припускають застосування до них методу редукції. При цьому наближені розв'язки сходяться до точного при збільшенні порядку системи.

### Чисельний аналіз задачі для двох циліндрів

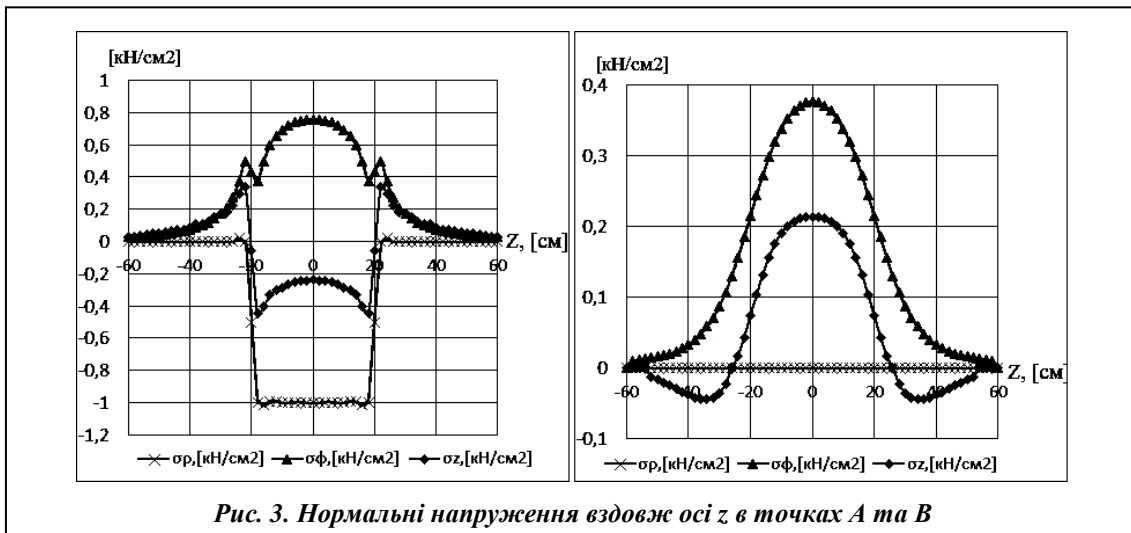
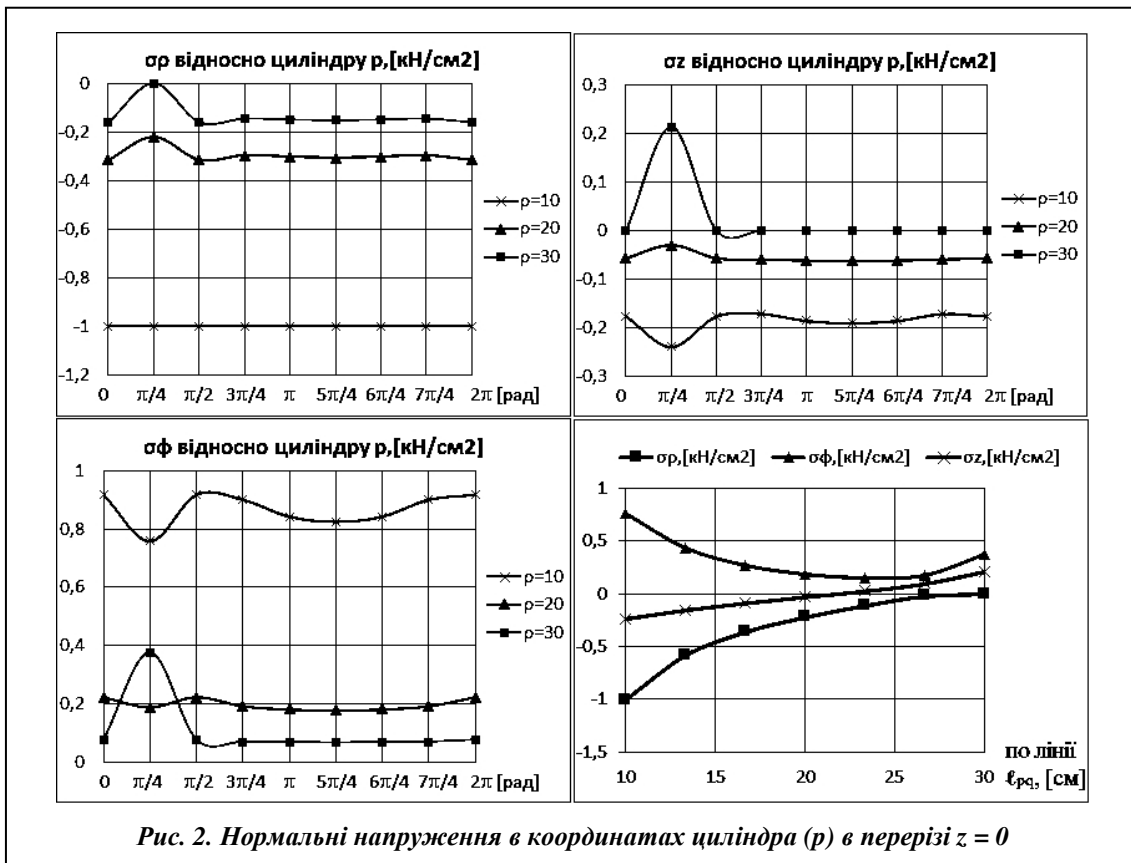
Маємо дві паралельні циліндричні порожнини у просторі, які розташовані на відстані  $\ell_{pq} = 45$  см, під кутом  $\alpha_{pq} = \pi/4$ . Радіуси порожнин  $R_p = 10$  см.,  $R_q = 15$  см.,  $\Delta\ell = \frac{R_p + R_q}{\ell_{pq}} = 0,55$ . Простір – ізотропний матеріал, коефіцієнт Пуассона  $\sigma = 0,35$ , модуль пружності  $E = 2$  кН/см<sup>2</sup>. На межах циліндрів задано напруження у вигляді  $\sigma_\rho^{(p)} = -1$  кН/см<sup>2</sup> |  $-20 \leq z \leq 20$ ,  $\sigma_\rho^{(p)} = 0$  |  $\begin{matrix} z < -20 \\ z > 20 \end{matrix}$ ,  $\sigma_\rho^{(q)} = 0$ ,  $\tau_{\rho\phi}^{(p)} = \tau_{\rho\phi}^{(q)} = 0$ ,  $\tau_{\rho z}^{(p)} = \tau_{\rho z}^{(q)} = 0$ . Застосувавши перетворення Фур'є, отримаємо  $\vec{\sigma}_{n,\rho}^{(p)}(\lambda) = \frac{-\sin(\lambda z)}{\pi\lambda}$ ,  $\vec{\tau}_{n,\phi}^{(p)} = 0$ ,  $\vec{\tau}_{n,z}^{(p)} = 0$ .

Нескінченна система рівнянь була зведена до кінцевої:  $m = -8 \dots 8$ , межі інтеграції були взяті від  $-4 \dots 4$ , обчислення інтегралів виконано за допомогою квадратурної формули Філона. Число вузлових точок – 1200. Це є достатнім за заданих геометричних умов, точність виконання граничних умов в цьому випадку досягає  $10^{-4}$ .

В результаті розв'язання цієї системи рівнянь були знайдені невідомі функції, перевірено виконання граничних умов на межах циліндричних порожнин, побудовані графіки нормальних напружень при  $z = 0$  на межі першої  $p$  порожнини, на відстані  $\rho_p = 20$  см,  $\rho_p = 30$  см та на перешийку (рис. 2).

Графіки нормальних напружень (рис. 2) свідчать про виконання граничних умов на поверхнях циліндрів  $p$  ( $\sigma_\rho = -1$ , при  $\rho = R_p = 10$ ) та  $q$  ( $\sigma_\rho = 0$ , при  $\rho = \ell_{pq} - R_q = 30$ ,  $\phi = \alpha_{pq} = \pi/4$ ). Цілком логічним є поступове зменшення напружень в міру віддалення від навантаженого циліндра. Нестабільним змінням є тільки ділянка впливу циліндра  $q$  на перешийку (по лінії  $\ell_{pq}$ , рис. 2) між циліндричними порожнинами при  $z = 0$ . На цьому рисунку можна побачити виконання граничних умов  $\sigma_\rho$  на межах циліндрів, стискаючі напруження  $\sigma_z$  на циліндрі  $p$  та розтягуювальні на циліндрі  $q$ . Та найбільш цікавим є те, що  $\sigma_\phi$ , яке спочатку зменшується, проте на межі ненавантаженого циліндра  $q$  зростає, що є результатом впливу послаблення пружного простору циліндровою порожниною.

Вздовж осі  $z$  напруження теж змінюються (рис. 3) та залежать від ширини ділянки, на якій діє  $\sigma_\rho$ . Зокрема, в точці А (на поверхні циліндра  $p$ ) при наближенні до центру навантаження  $\sigma_\phi$  зростає, а  $\sigma_z$  падає, а в точці В (на поверхні циліндра  $q$ )  $\sigma_\phi$  та  $\sigma_z$  зростає, що є впливом навантаженого циліндра  $p$ . Поблизу  $z = \pm 20$  (межа навантаження циліндра  $p$ ) відбуваються стрибки напруження  $\sigma_\phi$  та  $\sigma_z$ , що є впливом різкого коливання навантаження  $\sigma_\rho$ .



Взаємний вплив циліндрових порожнин можливо побачити, якщо збільшити чи зменшити відстань між ними. На рис. 4 наведені нормальні напруження за різних  $\Delta\ell = \frac{R_p + R_q}{\ell_{pq}}$  в перерізі  $z = 0$ .

Найбільш вагомо відстань між порожнинами впливає на  $\sigma_\phi$  (рис. 4): при  $\Delta\ell = 0,641$  напруження на межах циліндрів однакові, проте при зближенні циліндрів  $\sigma_\phi$  суттєво зростає на ненавантаженому циліндрі, натомість на навантаженому зменшується та навіть становиться стискаючим.

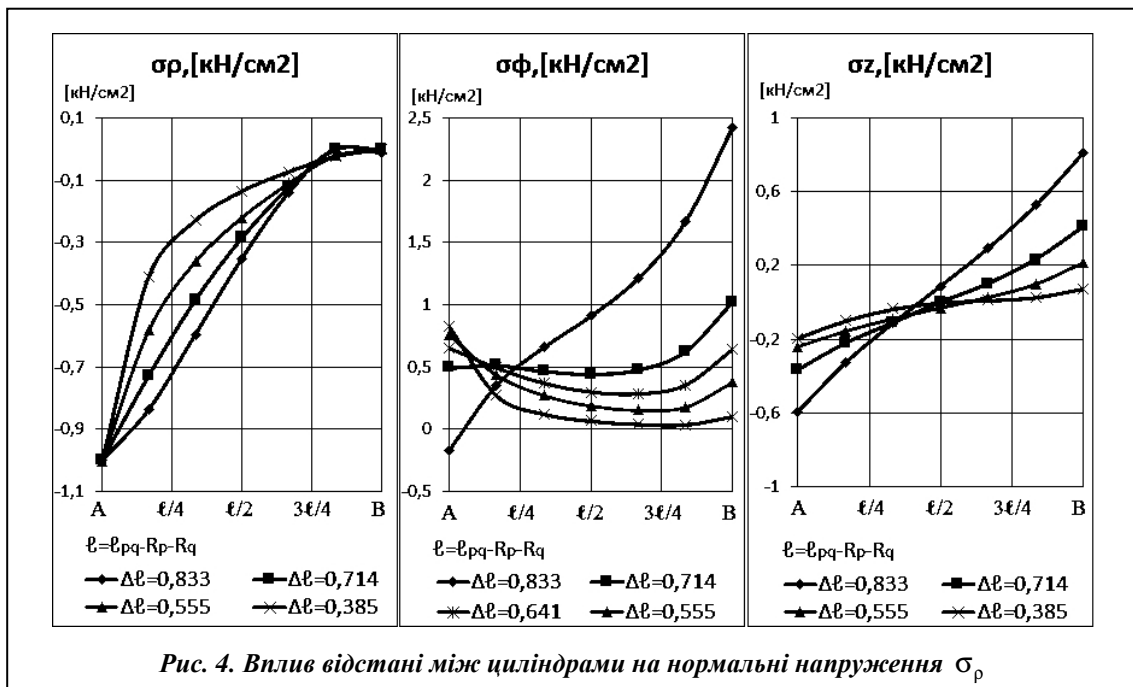


Рис. 4. Вплив відстані між циліндрами на нормальні напруження  $\sigma_r$

При збільшенні ширини прикладання навантаження циліндра  $p$  по осі  $z$  до  $\pm 120$  см ( $\sigma_r^{(p)} = 0$   $\left| \begin{matrix} z < -120 \\ z > 120 \end{matrix} \right.$ ,  $\sigma_r^{(p)} = -1 \text{ кН/см}^2$   $|-120 \leq z \leq 120$ ) при розгляданні результатів задачі в межах  $-40 \leq z \leq 40$  маємо умови, близькі до плоскої задачі теорії пружності. За цих умов отримані результати узгоджуються з тими, що наведені в роботі Г. Н. Савіна [8].

Якщо розвантажити циліндр  $p$  (прийняти  $\sigma_r^{(p)} = 0$ ), та навантажити циліндр  $q$  функцією

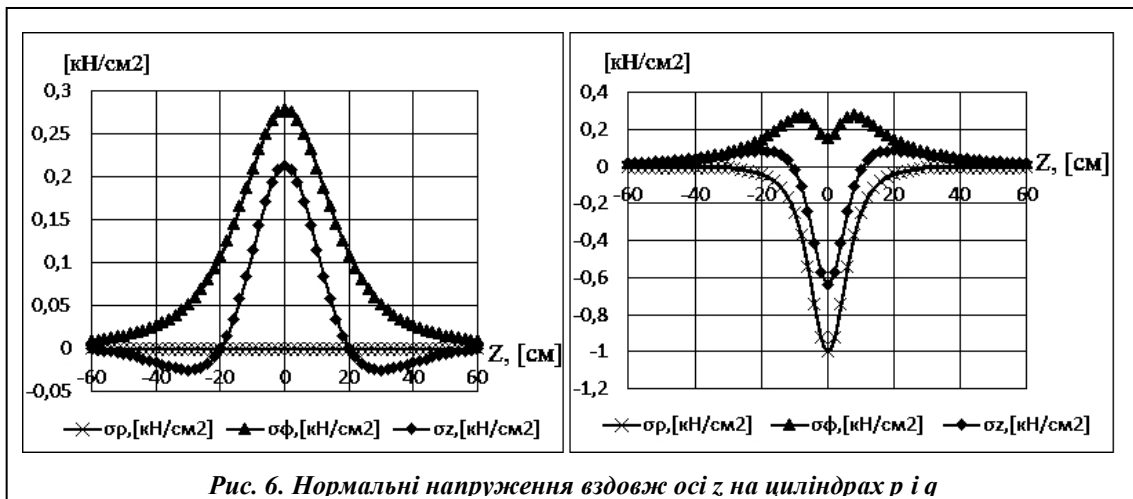
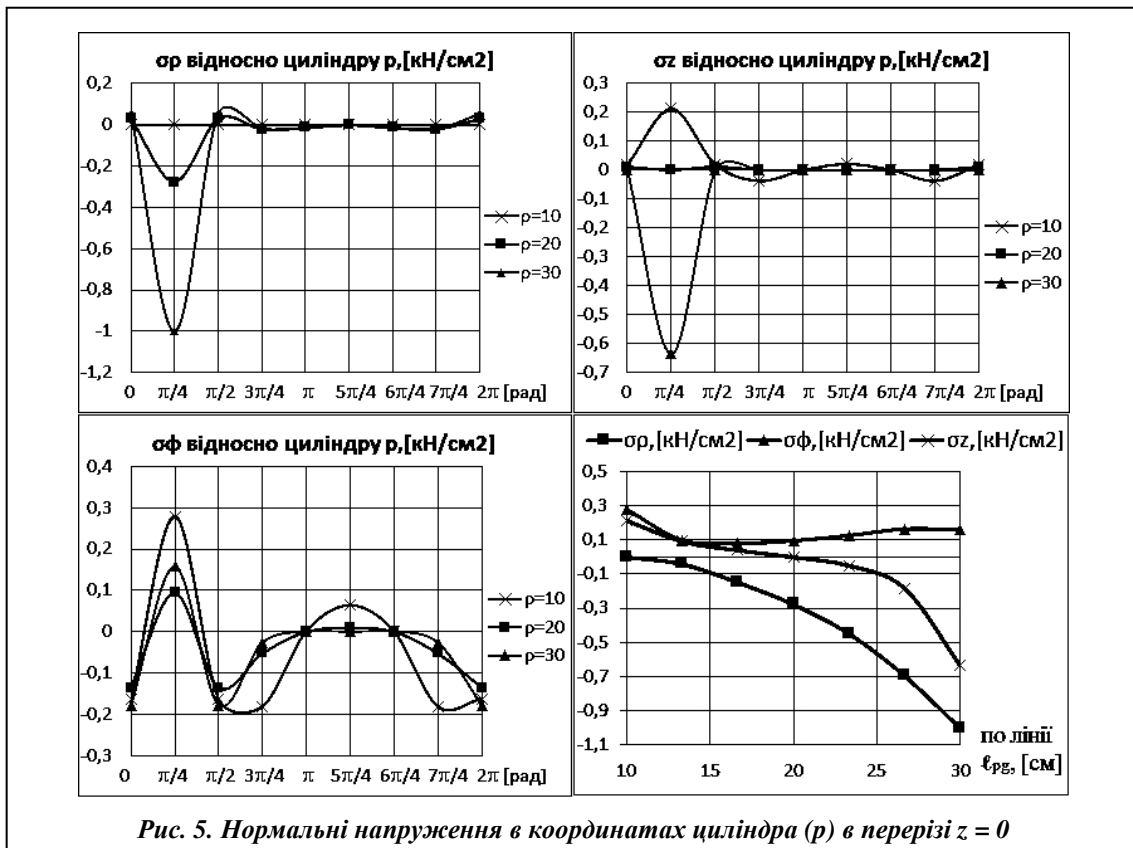
$$\sigma_r^{(q)} = \frac{-a^4}{(z^2 + a^2)^2} \text{ (хвиля висотою } -1 \text{ кН/см}^2 \text{, довжиною } a \text{), при } \tau_{r\phi}^{(p)} = \tau_{r\phi}^{(q)} = 0, \tau_{rz}^{(p)} = \tau_{rz}^{(q)} = 0, a = 10,$$

при цьому  $\tilde{\sigma}_{n,p}^{(q)}(\lambda) = \frac{-2500 \cdot e^{-a|\lambda|} \cdot (a \cdot |\lambda| + 1)}{a^3}$ ,  $\tilde{\tau}_{n,\phi}^{(q)} = 0$ ,  $\tilde{\tau}_{n,z}^{(q)} = 0$ , отримаємо за рахунок більшого радіуса циліндра  $q$  більш напружений стан (рис. 5).

На рис. 5, крім виконання граничних умов, можна побачити вплив навантаженого циліндра  $q$  на ненавантажений  $p$ . Найбільший вплив позначається на  $\sigma_\phi$ , де на поверхні циліндра  $p$ , крім стискаючих зусиль, мають місце розтягувальні напруження в області перешийку. Щодо самого перешийку (по лінії  $l_{pq}$ , рис. 5), то  $\sigma_\phi$  на ненавантаженому циліндрі  $p$  навіть більше, ніж на навантаженому циліндрі  $q$ . Це свідчить про вагомий вплив на результат радіуса навантаженого циліндра та близькість самих циліндрів.

Аналізуючи напруження вздовж осі  $z$  (рис. 6) на навантаженому циліндрі, при порівнянні з першою задачею (рис. 3) можна стверджувати, що  $\sigma_\phi$  та  $\sigma_z$  чутливо реагують до зміни ширини ділянки, на якій діє  $\sigma_r$ , зокрема, при зменшенні ширини прикладення навантаження  $\sigma_\phi$  має тенденцію до зниження, а  $\sigma_z$  – до зростання, на ненавантаженому циліндрі форма напружень приблизно однакова.

Взаємний вплив циліндрових порожнин при заданому навантаженні (у формі хвилі на циліндрі  $q$ ), наведений на рис. 7, показує, що при  $\Delta l = 0,495$  напруження  $\sigma_\phi$  на межах циліндрів однакові, при зближенні циліндрів  $\sigma_\phi$  зростає на ненавантаженому циліндрі, натомість на навантаженому переходить до стиснення.

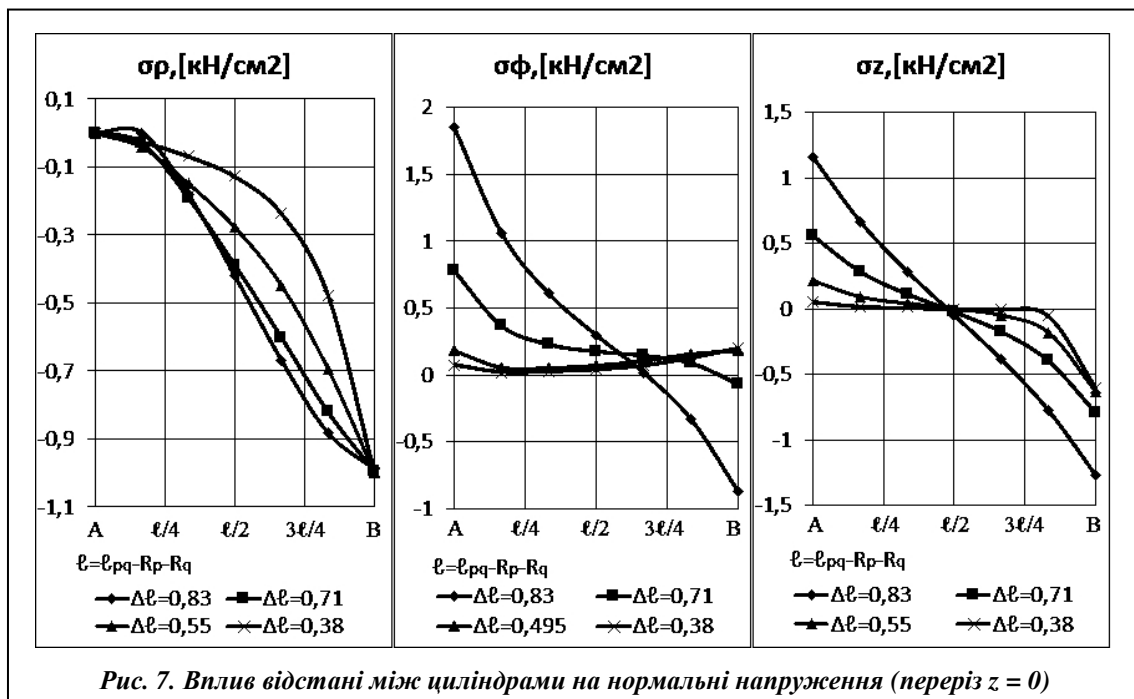


## Висновки

Запропоновано метод розв'язання задачі теорії пружності, коли на межах декількох паралельних циліндрових кругових порожнин задані напруження.

Числові дослідження алгебраїчної системи для двох циліндрів дають можливість стверджувати, що її розв'язок може бути з будь-яким ступенем точності знайдено методом редукції.

Наведені графіки дають уявлення про особливості розподілу переміщення і напружень в тілі в зоні, що прилягає до порожнин, і про взаємний вплив циліндрових порожнин.



## Література

1. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости / А. И. Лурье. – М.: Гостехиздат, 1955. – 492 с.
2. Подильчук Ю. Н. Трехмерные задачи теории упругости/ Ю. Н. Подильчук. – Киев.: Наукдумка, 1979. – 240 с.
3. Соляник-Краса К. В. Осесимметричная задача теории упругости/ К. В. Соляник-Краса. – М.: Стройиздат, 1987. – 336 с.
4. Васильев В. З. Осесимметричная деформация упругого изотропного пространства с бесконечной цилиндрической выемкой/ В. З. Васильев // Механика твердого тела – 1968. – Т. 5. – С. 124–129.
5. Николаев А. Г. Распределение напряжений в цилиндрическом образце материала с двумя параллельными цилиндрическими полостями/ А. Г. Николаев, Е. А. Танчик. // Вопр. проектирования и производства конструкций летательных аппаратов. – 2013. – Вып. 4. – С. 40–49.
6. Перепелица В. Г. Методика аналитических исследований распределения напряжений в забоях разных форм при проведении горных выработок/ В. Г. Перепелица, Л. Д. Шматовский, А. Н. Коломиец // Геотехн. механика. – 2008. – № 78. – С. 1–33.
7. Николаев А. Г. Обобщенный метод Фурье в пространственных задачах теории упругости/ А. Г. Николаев, В. С. Проценко. – Харьков: Нац. аэрокосм. ун-т им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», 2011. – 344 с.
8. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий/ Г. Н. Савин. – Киев: Наук. думка, 1968. – 891 с.

Поступила в редакцию 31.08.17