

Ю. А. Быков, канд. техн. наук

Институт проблем машиностроения  
им. А.Н. Подгорного НАН Украины,  
г. Харьков, Украина  
e-mail: [bykow@ipmach.kharkov.ua](mailto:bykow@ipmach.kharkov.ua)

УДК 621.625+621.438

## ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ПОВЫШЕННОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ ДЛЯ ЗАДАЧ АЭРОУПРУГОСТИ

**Ключові слова:** чисельне моделювання течії, аеропружність в турбомашиних, нестационарна течія, нестационарні навантаження.

*Запропоновано метод чисельного моделювання течії в'язкого стисливого газу через решітку коливних лопаток. Метод призначений для інтегрування нестационарних двовимірних рівнянь Нав'є-Стокса, усереднених за Рейнольдсом, які доповнюються рівнянням моделювання турбулентності. Метод має локально третій порядок апроксимації по просторових координатах та часу. З використанням методу проведено чисельний аналіз аеропружних характеристик решітки турбінних профілів 4-ї стандартної конфігурації в трансзвуковому потоці. Здійснено зіставлення отриманих результатів з даними чисельного моделювання з використанням методів другого і першого порядку апроксимації, а також з даними експерименту.*

### Введение

Решение задачи аэроупругости включает в себя решение нестационарной аэродинамической задачи, которая занимает основную часть вычислительных ресурсов. От точности и детализации ее решения зависит точность определения условий возможного возникновения неконтролируемых колебаний. Множество работ посвящено проблеме совершенствования методов решения аэродинамической задачи. Самым популярным методом упрощения является решение стационарной задачи моделирования течения с последующим решением одномерной задачи о движении поршня для определения нестационарных нагрузок на поверхность лопатки [1]. Далее по степени упрощения идет метод гармонического баланса [2], который предусматривает решение аэродинамической задачи в частотных координатах с последующим решением системы линейных уравнений для определения условий возникновения колебаний. Допустимым в некоторых случаях упрощением является решение уравнений Эйлера движения жидкости [3] или линеаризованных по времени уравнений Навье-Стокса [4]. Как показывают результаты сравнения различных подходов в решении аэродинамической задачи [5], наиболее точные и детальные данные получаются в результате решения нестационарных уравнений Навье-Стокса. Такой подход довольно широко распространен для решения задач аэроупругости турбомашин [6], в том числе и с применением неявных схем [7]. Точность получаемого решения в основном зависит от порядка аппроксимации исходных уравнений. Повышенная точность моделирования необходима, в том числе и для сложных течений, в которых присутствуют скачки уплотнения, т.е. в транс- и сверхзвуковых течениях. В данной статье представлены результаты моделирования трансзвукового течения в решетке колеблющихся турбинных профилей с помощью методов разного порядка точности и осуществлена количественная оценка соответствия результатов в зависимости от порядка аппроксимации.

### Численный метод

В основе численного метода лежит апробированная явная модифицированная численная схема Годунова-Колгана [6], которая имеет второй порядок аппроксимации по пространственным переменным. Схема интегрирует двухмерные, осредненные по Рейнольдсу, уравнения Навье-Стокса

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} = \mathbf{0} \quad (1)$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho v_1 \\ \rho v_2 \\ e \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho v_2 \\ \rho v_1 v_2 - \tau_{21} \\ p + \rho v_2^2 - \tau_{22} \\ (p + e)v_2 - v_1 \tau_{21} - v_2 \tau_{22} - \lambda \frac{\partial T}{\partial x_2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \rho v_1 \\ p + \rho v_1^2 - \tau_{11} \\ \rho v_1 v_2 - \tau_{12} \\ (p + e)v_1 - v_1 \tau_{11} - v_2 \tau_{12} - \lambda \frac{\partial T}{\partial x_1} \end{bmatrix}.$$

Здесь  $\mathbf{U}$  — вектор консервативных переменных;  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{G}$  — потоки консервативных переменных соответственно по  $x$  и  $y$ . Уравнения (1) дополняются уравнениями модели турбулентности  $k$ - $\omega$  Уилкокса [8]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho k v_i - (\mu + \sigma_k \mu_T) \frac{\partial k}{\partial x_i}) &= \Pi - \beta^* \rho \omega k \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho \omega) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \omega v_i - (\mu + \sigma_\omega \mu_T) \frac{\partial \omega}{\partial x_i}) &= \alpha \frac{\omega}{k} \Pi - \beta \rho \omega^2 \\ \mu_T &= \rho \frac{k}{\omega}, \quad \Pi = \tau_{ij}^T S_{ij}. \end{aligned} \quad (2)$$

Уравнения (1) и (2) интегрируются по модифицированной явной схеме Годунова [6], которая хорошо зарекомендовала себя при расчете различных типов течений сжимаемой жидкости [9]. Схема рассчитана на использование произвольных неструктурных сеток. В данной работе использовалась подвижная  $O$ -сетка из четырехугольных ячеек.

При интегрировании исходных уравнений использовались следующие схемы аппроксимации искомым переменных:

- оригинальная схема Годунова первого порядка аппроксимации, в которой переменные принимают постоянные значения в пределах одной ячейки  $u_{i\pm 0.5} = u_i$  (здесь  $u_{i\pm 0.5}$  — значения на гранях ячеек,  $u_i$  — значения в центрах ячеек);
- схема Годунова-Колгана, имеющая локально второй порядок аппроксимации уравнений, при этом переменные представляются линейной функцией в пределах одной ячейки

$$u_{i\pm 0.5} = u_i \pm \frac{h}{2} (u_\xi)_i, \quad (u_\xi)_i \approx \min \text{mod} \left\{ \frac{\Delta_i u}{h}, \frac{\Delta_{i+1} u}{h} \right\}, \quad \Delta_i u = u_i - u_{i-1} \quad (\text{здесь } (u_\xi)_i \text{ — приближение первой производной переменной});$$

- ENO декомпозиция, предложенная в работе [10], имеющая второй порядок аппроксимации уравнений и использующая вторую производную переменной

$$(u_\xi)_i \approx \min \text{mod} \left\{ \frac{\Delta_i u}{h_i} + \alpha h_i \min \text{mod} [\Delta \Delta_{i-1} u, \Delta \Delta_i u], \frac{\Delta_{i+1} u}{h_{i+1}} - \beta h_{i+1} \min \text{mod} [\Delta \Delta_i u, \Delta \Delta_{i+1} u] \right\},$$

$$u_{i\pm 0.5} = u_i \pm \frac{h}{2} (u_\xi)_i, \quad \Delta \Delta_i u = \frac{1}{h^2} (\Delta_{i+1} u - \Delta_i u), \quad \alpha = \beta = 0.5;$$

- ENO декомпозиция, имеющая локально третий порядок аппроксимации уравнений (здесь индексами  $i$  и  $j$  обозначены соответствующие значения в центре ячейки, индексами  $i\pm 0.5$  и  $j\pm 0.5$  — значения в на гранях ячейки)

$$u \approx u_{i,j} + \Delta x (u_x)_{i,j} + \Delta y (u_y)_{i,j} + \frac{1}{2} \Delta x^2 (u_{xx})_{i,j} + \frac{1}{2} \Delta y^2 (u_{yy})_{i,j} + \Delta x \Delta y (u_{xy})_{i,j}$$

$$(u_x)_{i-0.5, j-0.5} = f(u_{i,j}, u_{i-0.5, j}, u_{i, j-0.5}, x_{i,j}, x_{i-0.5, j}, x_{i, j-0.5}, y_{i,j}, y_{i-0.5, j}, y_{i, j-0.5})$$

$$(u_{xx})_{i-0.5, j-0.5} = f((u_x)_{i,j}, (u_x)_{i-0.5, j}, (u_x)_{i, j-0.5}, x_{i,j}, x_{i-0.5, j}, x_{i, j-0.5}, y_{i,j}, y_{i-0.5, j}, y_{i, j-0.5})$$

$$(u_x)_{i,j} = \min \text{mod} [(u_x)_{i-0.5, j-0.5}, (u_x)_{i+0.5, j+0.5}]$$

$$(u_{xx})_{i,j} = \min \text{mod} [(u_{xx})_{i-0.5,j-0.5}, (u_{xx})_{i+0.5,j+0.5}]$$

$$\Delta x = x - x_{i,j}, \Delta y = y - y_{i,j}.$$

Для достижения третьего порядка аппроксимации при интегрировании уравнений применяется квадратичное представление переменных на гранях, для чего определяются значения переменных в двух точках с координатами

$$\xi_{P1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{12}}, \xi_{P2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{12}},$$

где  $\xi$  принимает значения в диапазоне  $[0,1]$  в пределах одной грани.

Интегрирование уравнений (1,2) по времени выполняется с применением схемы Рунге-Кутты 3-го порядка

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= u^n + \Delta t L(u^n) \\ u^{(2)} &= \frac{3}{4} u^n + \frac{1}{4} u^{(1)} + \frac{1}{4} \Delta t L(u^{(1)}) \\ u^{n+1} &= \frac{1}{3} u^n + \frac{2}{3} u^{(2)} + \frac{2}{3} \Delta t L(u^{(2)}) \end{aligned}$$

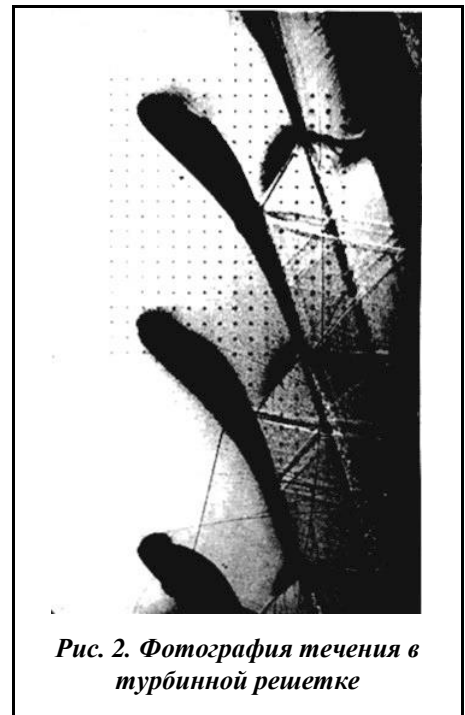
**Объект исследования**

В качестве объекта исследования была выбрана плоская решетка турбинных профилей, исследованная в Лозаннском политехническом институте [11] под наименованием «4-я стандартная конфигурация». Решетка обтекалась воздухом при следующих параметрах: полное давление  $p_0 = 205,8$  кПа, давление на выходе  $p_2 = 98,4$  кПа, температура заторможенного потока  $T_0 = 300$  К, угол натекания  $\beta = -45^\circ$ . Выбранный режим характеризуется числом Маха  $M_2 = 1,2$  и наличием системы скачков давления на стороне разрежения и в межлопаточном канале. Лопатки совершали изгибные колебания амплитудой 0,0038 от хорды и частотой 150 Гц. Разность фаз колебаний между лопатками составляла 0 и 180 градусов. На рис. 1 представлен внешний вид решетки, на рис. 2 показана шпирен-фотография течения в решетке для режима  $M_2 = 1,2$ , на которой хорошо видно положение и интенсивность скачков давления.



**Рис. 1. Решетка турбинных лопаток 4-й стандартной конфигурации:**

- с – хорда;  $M_1$  – скорость на входе;
- $M_2$  – скорость на выходе;  $\beta_1$  – угол натекания;
- $\beta_2$  – угол на выходе;  $\gamma$  – угол установки;
- $\delta$  – направление колебаний;  $\tau$  – безразмерный шаг решетки



**Рис. 2. Фотография течения в турбинной решетке**

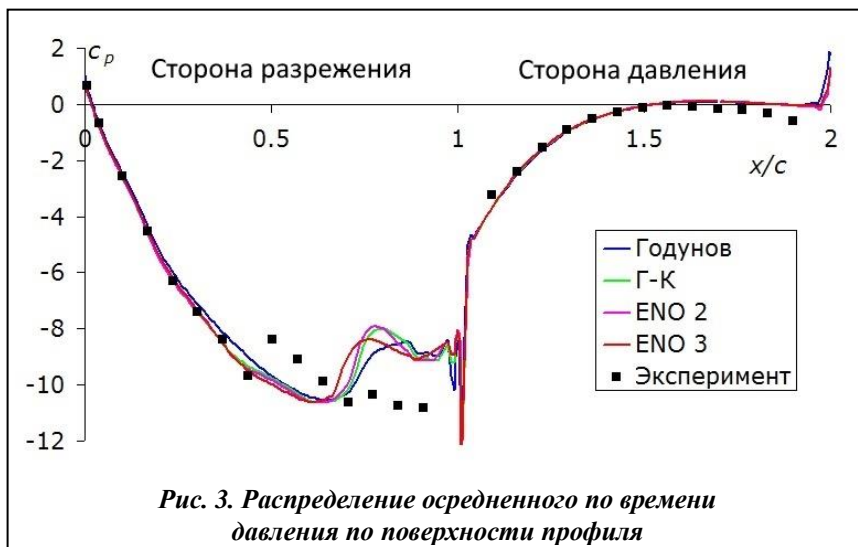
**Результаты и обсуждение**

На рис. 3 представлено распределение осредненного давления  $c_p = \frac{p(x) - p_1}{p_0 - p_1}$  по

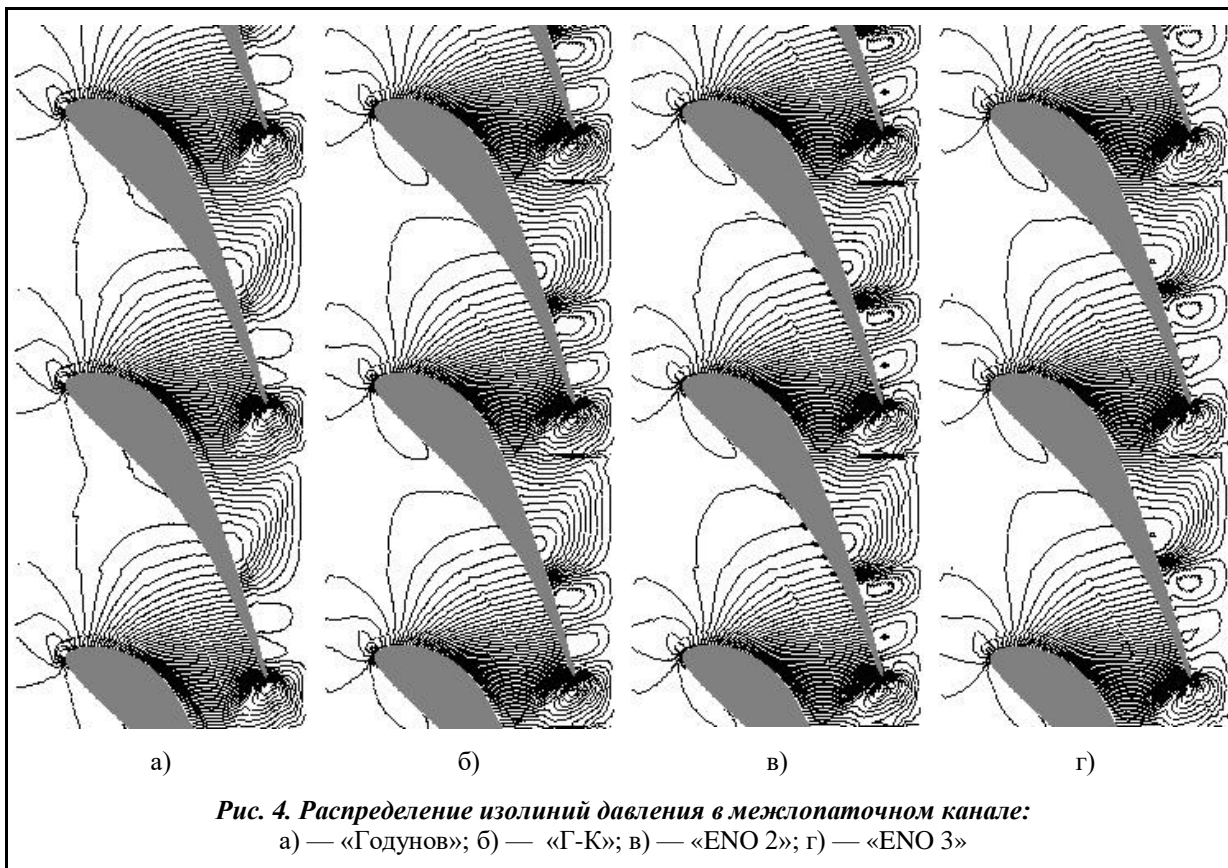
поверхности профиля (здесь и далее значения  $x/c$  в диапазоне 0 – 1 соответствуют стороне разрежения профиля, значения 1 – 2 – стороне давления). На графике хорошо видно присутствие ударной волны на стороне разрежения в области  $x/c = 0,7$ . Здесь и далее результаты для разных схем аппроксимации обозначены символами «Годунов» – для

схемы Годунова первого порядка, «Г-К» – для схемы Годунова-Колгана локально второго порядка, «ENO 2» – для схемы ENO второго порядка, «ENO 3» – для схемы ENO третьего порядка, квадратами – результаты эксперимента из работы [11].

При детальном анализе рис. 3 можно заметить, что схема первого и второго порядков предсказывает положение ударной волны в одной точке с отличием в интенсивности, схема третьего порядка сдвигает положение волны вверх по потоку. Все схемы не показывают наличия отраженной волны от задней кромки соседнего профиля, которая должна находиться в позиции  $x/c = 0,5$ . На рис. 4 представлены изолинии давления в межлопаточном канале, которые могут прояснить картину распределения скачков давления.



**Рис. 3. Распределение осредненного по времени давления по поверхности профиля**



**Рис. 4. Распределение изолиний давления в межлопаточном канале:**  
 а) — «Годунов»; б) — «Г-К»; в) — «ENO 2»; г) — «ENO 3»

Вместо системы скачков давления, показанной на рис. 2, наблюдается две ударные волны – на стороне давления в области выходной кромки и на стороне разрежения – в районе  $x/c = 0,7$ , которые рассеиваются к середине межлопаточного канала. Показанные на рис. 4 картинки демонстрируют увеличение интенсивности ударных волн при увеличении порядка, положение волн при увеличении порядка также смещается вверх по потоку. Далее представлены нестационарные результаты для межлопаточного сдвига фаз  $\sigma = 0^\circ$  в виде распределения амплитуды первой гармоники

нестационарного давления по длине профиля  $p_n(x) = \frac{\sqrt{C_1^{a^2}(x) + C_1^{b^2}(x)}}{(p_0 - p_1)h_0c}$  (рис. 5). Здесь

$C_1^a(x), C_1^b(x)$  — распределение первых коэффициентов разложения в ряд Фурье нестационарного давления.

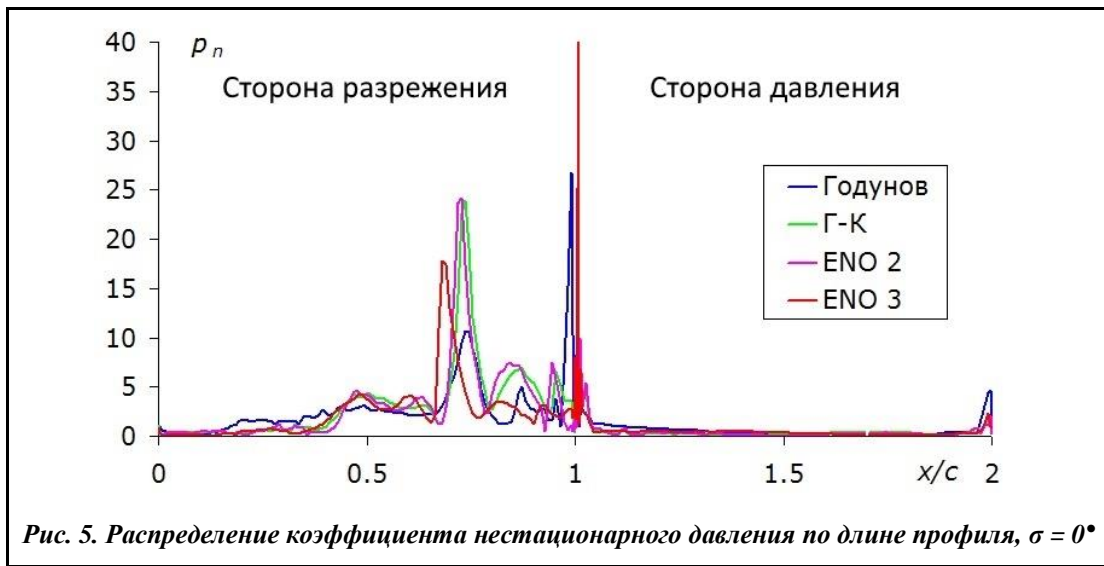


Рис. 5. Распределение коэффициента нестационарного давления по длине профиля,  $\sigma = 0^\circ$

Тщательный анализ приведенных результатов позволяет увидеть, что максимумы значений в области  $x/c = 0,7$  соответствуют положению ударной волны для каждого варианта. На рис. 6 представлено также распределение сдвига фазы первой гармоники нестационарного давления от

колебаний профиля  $phi(x) = \arctg \frac{C_1^b(x)}{C_1^a(x)}$ .

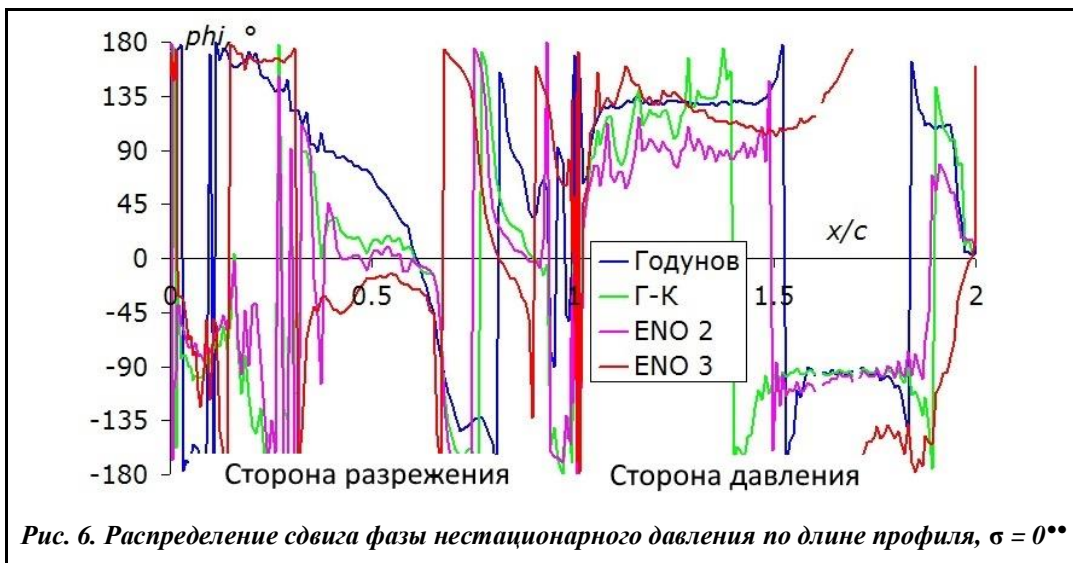


Рис. 6. Распределение сдвига фазы нестационарного давления по длине профиля,  $\sigma = 0^\circ$

Характер зависимости фазы колебаний давления по длине профиля сохраняется для всех вариантов расчета. Более значимым показателем для аэроупругих характеристик является распределение работы аэродинамических сил  $A(x) = \frac{C_1^a(x)wn}{(p_0 - p_1)\pi c^2 h_0^2}$  (здесь  $w$  – скорость перемещения точки на профиле,  $n$  – нормаль к поверхности профиля), по поверхности профиля, которое представлено на рис. 7.

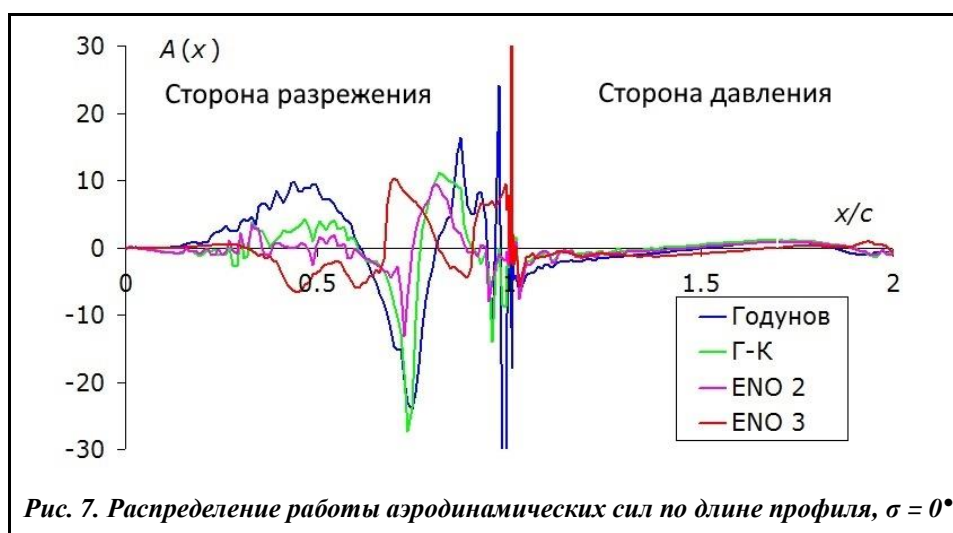


Рис. 7. Распределение работы аэродинамических сил по длине профиля,  $\sigma = 0^\circ$

График на рис. 7 позволяет увидеть, что максимумы значений в области  $x/c = 0,7$  соответствуют положению ударной волны для каждого варианта расчета, однако в области  $x/c = 0,5$  работа для первого и третьего порядка отличается по знаку, в то время как для второго порядка она близка к нулю.

Далее на рис. 8 представлены нестационарные результаты для межлопаточного сдвига фаз  $\sigma = 180^\circ$  в виде распределения амплитуды первой гармоники нестационарного давления по длине профиля. Для этого режима существуют экспериментальные данные, которые обозначены на графиках квадратами.

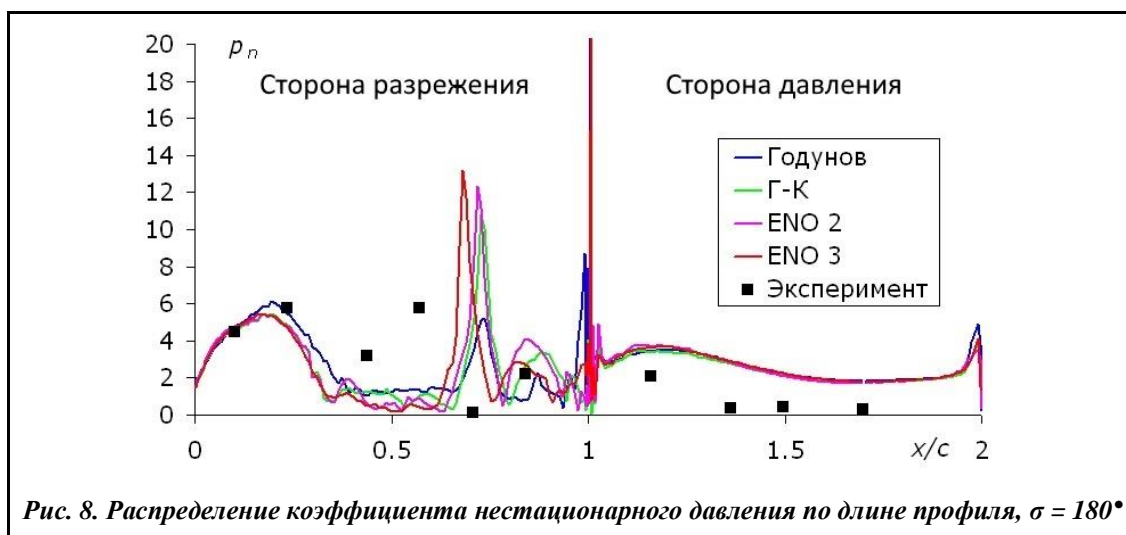


Рис. 8. Распределение коэффициента нестационарного давления по длине профиля,  $\sigma = 180^\circ$

Анализ приведенных результатов позволяет увидеть, что максимумы значений в области  $x/c = 0,7$  соответствуют положению ударной волны для каждого варианта. При этом значения расчета в окрестности  $x/c = 0,5$  не соответствуют эксперименту, в котором в данной области выявлена отраженная ударная волна. Значения в районе  $x/c = 0 - 0,3$  достаточно хорошо соответствуют

експериментальним даним. На рис. 9 представлено також розподілення сдвига фази першої гармоніки нестационарного тиску від коливань профіля.

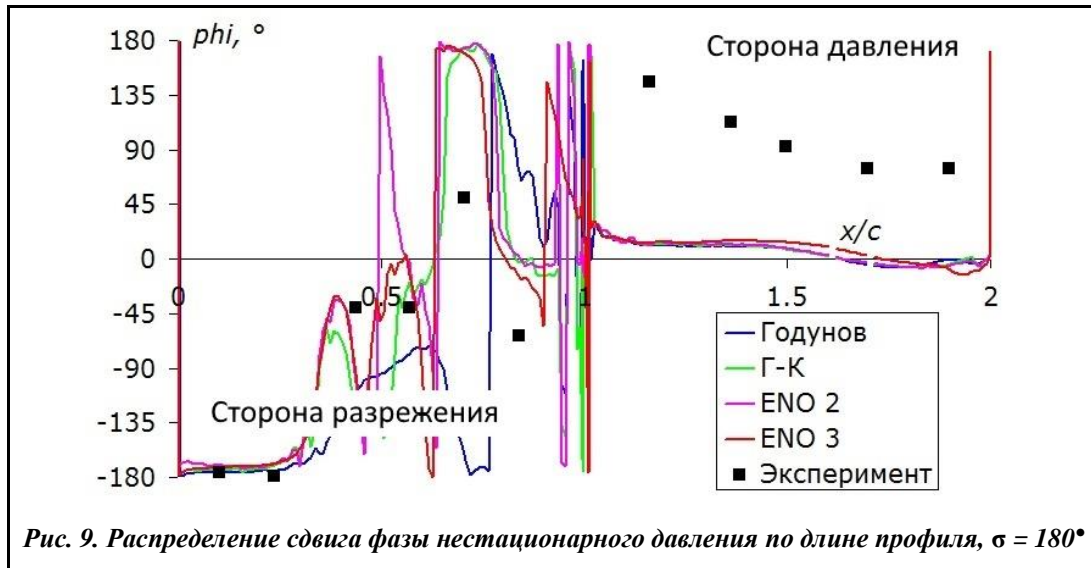


Рис. 9. Розподілення сдвига фази нестационарного тиску по довжині профіля,  $\sigma = 180^\circ$

На стороні разреження розрахункові дані добре відповідають експериментальним, навіть в околицях  $x/c = 0,5$ , де в розрахунок немає ударної хвилі. Величина фази в області  $x/c = 0,5$  приймає негативні значення, що відповідає позитивній роботі аеродинамічних сил, в області ударної хвилі  $x/c = 0,7$  переходить через  $180^\circ$  і приймає позитивні значення, роблячи на демпфування коливань. Таким чином, існують дві області, вплив яких компенсує друг друга. На рис. 10 зображено розподілення роботи аеродинамічних сил для випадку  $\sigma = 180^\circ$ .

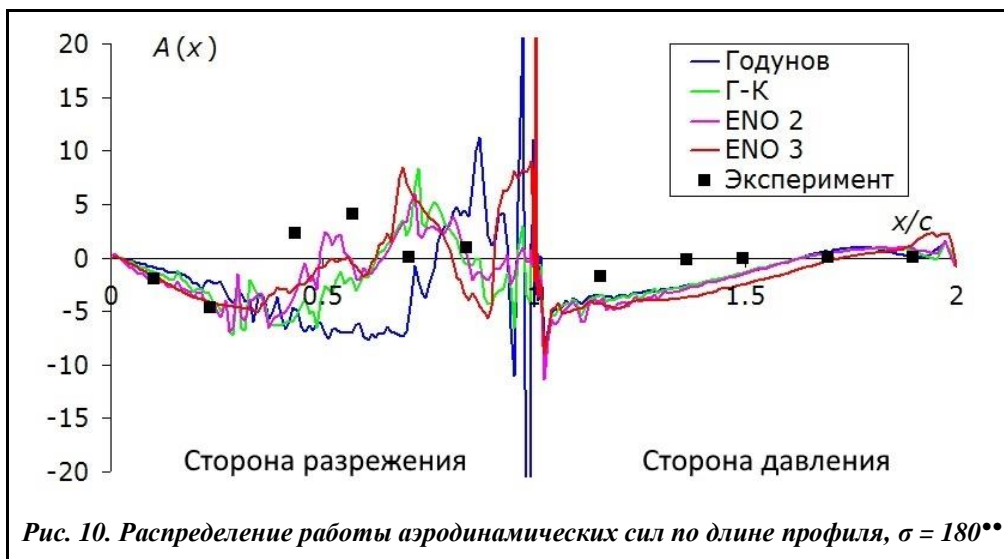


Рис. 10. Розподілення роботи аеродинамічних сил по довжині профіля,  $\sigma = 180^\circ$

На рис. 10 спостерігається задовільне узгодження даних в діапазоні  $x/c = 0-0,3$  і різниця в положеннях максимумів, пов'язане з положенням ударної хвилі. Також спостерігається суттєве різниця в даних для першого порядку, які приймають переважно негативні значення.

Приведені результати показують значительну залежність від порядку апроксимації чисельної схеми. При моделюванні нестационарних процесів це різниця може впливати на характер аероупругого поведіння лопаточних решіток, передбачаючи замість можливого демпфування збудження і навпаки. Також немаловажне значення при використанні методів підвищених порядків являється використання сіток, адаптованих до характерних особливостей

течения. Отсутствие сгущения в области первой ударной волны и в межлопаточном канале привело к ее диссипации и значительному искажению результатов численного моделирования вне зависимости от порядка схемы.

### Выводы

Применен алгоритм численного моделирования течения газа через решетку колеблющихся профилей с повышенным порядком аппроксимации. Алгоритм предназначен для решения задач аэроупругости в решетках турбомашин. Проведен численный анализ трансзвукового течения через решетку турбинных профилей. Показано, что численное моделирование сложных трансзвуковых течений требует применения методов повышенного порядка точности. Эти методы позволяют улучшить разрешающую способность результатов. Нестационарные характеристики сложных трансзвуковых течений также существенно зависят от порядка аппроксимации переменных. Недостаточный порядок аппроксимации иногда может приводить к существенному искажению результатов, вплоть до изменения знака работы аэродинамических сил. Наряду с применением схем повышенного порядка необходимо использовать адаптивные расчетные сетки, которые учитывают особенности течения и не вносят дополнительную погрешность в области больших градиентов значений.

### Литература:

1. Brouwer K., Crowell A. R., McNamara J. J. Rapid Prediction of Unsteady Aeroelastic Loads in Shock-Dominated Flows. *Proc. of 56th AIAA/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conf.* 2015. P. 1-20.
2. Padmanabhan M. A., Pasilio C. L., Dowell E. H. Simulation of Aeroelastic Limit-Cycle Oscillations of Aircraft Wings with Stores. *AIAA J.* 2014. Vol. 52. № 10. P. 2291-2299.
3. Chen T., Xu M., Xie L. Aeroelastic Modeling Using Geometrically Nonlinear Solid-Shell Elements. *AIAA J.* 2014. Vol. 52. № 9. P. 1980-1993.
4. Kersken H., Frey C., Voigt C., Ashcroft G. Time-Linearized and Time-Accurate 3D RANS Methods for Aeroelastic Analysis in Turbomachinery. *ASME. J. Turbomach.* 2012. Vol. 134(5). P. 051024-051024-8.
5. Gupta K. K., Voelker L. S. Aeroelastic Simulation of Hypersonic Flight Vehicles. *AIAA J.* 2012. Vol. 50. № 3. P. 717-723.
6. Гнесин В.И., Быков Ю.А. Численное исследование аэроупругих характеристик лопаточного венца турбомашин, работающей на нерасчетном режиме. *Пробл. машиностроения.* 2004. Т. 7. №1. С. 31-40.
7. Gendel S., Gottlieb O., Degani D. Fluid-Structure Interaction of an Elastically Mounted Slender Body at High Incidence. *AIAA J.* 2015. Vol. 53. № 5. P. 1309-1318.
8. Wilcox D.C. Reassessment of the Scale-Determining Equation for Advanced Turbulence Models. *AIAA J.* 1988. Vol. 26. №11. P. 1299-1310.
9. Терехов В. И., Шаров К. А., Смульский Я. И., Быков Ю. А., Ершов С. В. Расчетно-экспериментальное исследование течения за обратным уступом при наличии пассивного управления. *Вісн. НТУ "ХПИ".* 2013. №56. С. 199-203.
10. Русанов А. В., Ершов С. В. Математическое моделирование нестационарных газо-динамических процессов в проточных частях турбомашин. Харьков: ИПМаш НАН Украины, 2008. 275 с.
11. Bolcs A., Fransson T.H. Aeroelasticity in Turbomachines. Comparison of Theoretical and Experimental Cascade Results. *Communication du Laboratoire de Thermique Appliquee et de Turbomachines, Lausanne, EPFL.* 1986. №13. 230 p.

Поступила в редакцию 20.11.2017