

Ю. Г. Стоян, чл.-кор. НАН України
А. М. Чугай, канд. техн. наук

Інститут проблем машинобудування
ім. А.М. Підгорного НАН України,
м. Харків, Україна

e-mail: stoyan@ipmach.kharkov.ua

УДК 519.85

УПАКУВАННЯ ОПУКЛИХ ГОМОТЕТИЧНИХ БАГАТОГРАННИКІВ В КУБОЇД

Розглядається математична модель задачі упакування гомотетичних багатогранників в кубоїд мінімального об'єму, що ґрунтується на Ф-функції для двох опуклих багатогранників. Відмічено ряд особливостей математичної моделі. Базуючись на особливостях, пропонується підхід для побудови початкових точок, швидкий алгоритм пошуку локальних мінімумів і спрямований невичерпний перебір локальних мінімумів для одержання гарного наближення до глобального екстремуму. Наведено числові результати.

Ключові слова: пакування, гомотетичні багатогранники, обертання, оптимізація, Ф-функції.

Вступ

Задачі пакування 3D-об'єктів – це класичні задачі оптимізації, які мають широке коло інженерних застосувань. Натепер інтерес до знаходження ефективних розв'язків вказаного класу задач стрімко зростає. Цей клас поєднує великий набір різних практичних задач, пов'язаних зі знаходженням оптимальних розташувань геометричних об'єктів одного типу в об'єктах іншого. У більшості випадків в задачах пакування 3D-об'єктів необхідно впакувати всі наявні об'єкти до контейнерів мінімальних розмірів.

Задачі виникають у різних галузях науки та інженерії, тому що вони замінюють повномасштабні експерименти комп'ютерним моделюванням, яке значно заощаджує час і матеріальні ресурси. Наприклад, практичне застосування задач – тривимірне моделювання мікроструктур різних матеріалів (включаючи наноматеріали) [1, 2]. Останні досягнення в цій галузі пов'язані з розвитком комп'ютерних технологій тривимірного томографічного аналізу мінеральних частинок [2].

Також існує широкий спектр застосувань у сучасній біології, мінералогії, медицині, матеріалознавстві, нанотехнологіях, робототехніці, системах розпізнавання образів, системах керування, ком'юнікативних апаратних системах керування, а також у хімічній промисловості, енергетиці, машино-, судно-, літакобудуванні, цивільному будівництві і т.д.

Відомо, що задачі пакування 3D-об'єктів є NP-повною. Через це їх важко розв'язати задовільно. Так, для знаходження їх приблизного розв'язку в багатьох дослідницьких роботах використовується дуже велика різноманітність методів, включаючи різні евристичні (евристичні, що ґрунтуються на різних правилах наближення [3], генетичні алгоритми [4], алгоритм імітації відпалу [5], алгоритм бджолоїної колонії [6]), розширений пошук за шаблоном [7], традиційні методи оптимізації [8, 9] та різні змішані підходи, які застосовують евристику й методи нелінійного математичного програмування [10].

Як зазначено в [3], процеси розв'язання складаються з таких циклічних процедур: 1) упорядкування послідовності об'єктів; 2) геометричні процедури, що застосовуються до об'єктів відповідно до їхньої позиції у послідовності; 3) обчислення об'єктивної функції.

Геометричні процедури можуть бути реалізовані за допомогою методів, які відрізняються: шляхом руху об'єкта, складністю моделювання обертання та дозволом наявності об'єкта перетину під час фаз розв'язання.

У більшості робіт не дозволяється змінювати орієнтацію 3D-об'єктів або допускаються лише дискретні зміни в орієнтації для заданих кутів (45° або 90°). Наприклад, в [11] для пакування опуклих багатогранників використовується тільки алгоритм паралельного перенесення. У [12] автори пропонують алгоритм НАРЕЗD, який може бути застосований до поліедра з довільною формою, що може обертатися навколо кожної координатної осі лише під вісьмома різними кутами.

У роботі [13] автори зауважують, що для задач тривимірного пакування орієнтація об'єктів від 0 до 360° відносно кожної осі здійснювати розрахунок неможливо.

Через складність побудови адекватних математичних моделей на цей час існує декілька робіт, які розв'язують задачі 3D-пакування за умови, що допускаються безперервні обертання геометричних об'єктів. Розв'язки таких задач розглядаються в роботах [8, 9, 14–17]. У [8, 9, 14] вводяться безперервні і диференційовані моделі нелінійного програмування й алгоритми для упакування еліпсоїдів у тривимір-

ному просторі. В роботі [16] розв'язується задача упаковки різних опуклих тривимірних об'єктів.

Ця робота присвячена розв'язанню задачі упаковки гомотетичних опуклих багатогранників з безперервними поворотами кутів. Наш підхід базується на математичному моделюванні співвідношень геометричних об'єктів, що зводить задачу до задачі нелінійного програмування. Для цього використано метод Ф-функції [9, 17] для аналітичного опису взаємодії об'єктів та розміщення об'єктів у контейнері з урахуванням сталих обертань та паралельних перенесень.

1. Постановка задачі

Нехай існують гомотетичні багатогранники P_i , $i \in I = \{1, 2, \dots, n\}$, та кубоїд

$$C = \{X \in R^3, w_1 \leq x \leq w_2, l_1 \leq x \leq l_2, \eta_1 \leq x \leq \eta_2\}, \quad (1)$$

де $w_1, w_2, l_1, l_2, \eta_1$ й η_2 – змінні, звідки вектор $\Upsilon = (w_1, w_2, l_1, l_2, \eta_1, \eta_2)$ визначає розміри C .

Багатогранники P_i задані вершинами

$$p_{io} = h_i^\nabla (p_{io}^1, p_{io}^2, p_{io}^3), i \in I, o \in O = \{1, 2, \dots, \varepsilon\}, \quad (2)$$

де h_i^∇ – коефіцієнт гомотетії P_i .

Припускаємо, що

$$1 = h_1^\nabla \geq h_2^\nabla \geq \dots \geq h_n^\nabla \quad (3)$$

і принаймні одна нерівність є строгою.

На основі вершин будуюмо системи нерівностей

$$\chi_{ik}(X) = a_k x + b_k y + c_k z + h_i^\nabla d_k \geq 0, i \in I, k \in K = \{1, 2, \dots, \kappa\}, \quad (4)$$

що визначають багатогранники P_i , $i \in I$, відповідно. Нехай F_{ik} є площинами, які визначені рівняннями $\chi_{ik}(X) = 0$, $k \in K$.

З (1) випливає, що C описується системою нерівностей

$$\{\varpi_r(X, \Upsilon) \geq 0, r \in \{1, 2, \dots, 6\}, \quad (5)$$

де $\varpi_1(X, \Upsilon) = x - w_1$, $\varpi_2(X, \Upsilon) = w_2 - x$, $\varpi_3(X, \Upsilon) = y - l_1$, $\varpi_4(X, \Upsilon) = l_2 - y$, $\varpi_5(X, \Upsilon) = z - \eta_1$, й $\varpi_6(X, \Upsilon) = \eta_2 - z$.

Місце розміщення багатогранника P_i в евклідовому тривимірному арифметичному просторі R^3 визначається вектором трансляції $v_i = (x_i, y_i, z_i)$ та кутами обертання $\theta_i = (\phi_i, \psi_i, \omega_i)$, $i \in I$. Таким чином, вектор руху $u_i = (v_i, \theta_i) = (x_i, y_i, z_i, \phi_i, \psi_i, \omega_i)$ визначає розміщення P_i в R^3 , а вектор $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in R^m$, де $m = 6n$, – місце розміщення P_i , $i \in I$, в R^3 . Координати вершин (2) визначаються таким чином:

$$p_{io}(u_i) = (p_{io}^1(u_i), p_{io}^2(u_i), p_{io}^3(u_i)) = (h_i^\nabla g_i (p_{ioj}^0)^T + x_i, h_i^\nabla l_i (p_{io}^0)^T + y_i, h_i^\nabla q_i (p_{io}^0)^T + z_i), i \in I, o \in O, \quad (6)$$

де

$$R_i = \begin{vmatrix} g_i \\ l_i \\ q_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g_{i1} & g_{i2} & g_{i3} \\ r_{i1} & r_{i2} & r_{i3} \\ q_{i1} & q_{i2} & q_{i3} \end{vmatrix}, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} g_{i1} &= \cos \psi_i \cos \omega_i - \cos \phi_i \sin \psi_i \sin \omega_i, \\ g_{i2} &= -\cos \psi_i \sin \omega_i - \cos \phi_i \sin \psi_i \cos \omega_i, \\ g_{i3} &= \sin \phi_i \sin \psi_i, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} r_{i1} &= \sin \psi_i \cos \omega_i + \cos \phi_i \cos \psi_i \sin \omega_i, \\ r_{i2} &= -\sin \psi_i \sin \omega_i + \cos \phi_i \cos \psi_i \cos \omega_i, \\ r_{i3} &= -\sin \phi_i \cos \psi_i, \end{aligned}$$

$$q_{i1} = \sin \varphi_i \sin \omega_i, q_{i2} = \sin \varphi_i \cos \omega_i, q_{i3} = \cos \varphi_i.$$

Системи нерівностей (4) мають вигляд

$$\zeta_{ik}(X, u_i, \Upsilon) = \chi_{ik}((R_i X^T + v_i), \Upsilon) \geq 0, i \in I, k \in K. \tag{9}$$

Надалі багатогранник P_i , що зазнає трансляції v_i та обертання φ_i, ψ_i та ω_i , позначимо як $P_i(u_i)$, а кубоїд C зі змінними розмірами $\Upsilon - C(\Upsilon)$.

Розглядається задача упакування з такою постановкою.

Задача. Визначити вектор $u \in R^m$, який забезпечує розміщення $P_i(u_i)$, $i \in I$, без їх взаємного перетинання в кубоїді $C(\Upsilon)$, таким чином, щоб об'єм кубоїда $H(\Upsilon) = (w_2 - w_1)(l_2 - l_1)(\eta_2 - \eta_1)$ досягав свого мінімального значення.

2. Математична модель та її особливості

Для побудови математичної моделі поставленої задачі необхідно описати взаємодію багатогранників між собою залежно від їх місця розміщення в R^3 в аналітичній формі. Ф-функції є адаптованим інструментом для такого опису [18].

Математична модель задачі, побудована з використанням Ф-функцій, має вигляд

$$H(R^*) = \min H(R) \text{ s.t. } (u, R) \in \Lambda \subset R^{m+6}, \tag{10}$$

де

$$\Lambda = \{(u, \Upsilon) \in R^{m+6} : \Phi_{ij}(u_i, u_j) \geq 0, 0 < i < j \in I, \Phi_i(u_i, \Upsilon) \geq 0, i \in I, \tag{11}$$

$$w_1 \geq 0, l_1 \geq 0, \eta_1 \geq 0, w_2 - w_1 \geq 0, l_2 - l_1 \geq 0, \eta_2 - \eta_1 \geq 0\}.$$

Нерівність $\Phi_{ij}(u_i, u_j) \geq 0$ забезпечує неперетинання P_i і P_j , а нерівність $\Phi_i(u_i, \Upsilon) \geq 0$ – знаходження P_i в $C(\Upsilon)$. Відзначимо, що $\Phi_i(u_i, \Upsilon)$ – Ф-функція для P_i та множини $A(\Upsilon) = R^3 \setminus \text{int}C(\Upsilon)$, де $\text{int}C(\Upsilon)$ внутрішня частина C .

Розглянемо ряд особливостей математичної моделі.

1. Оскільки кожна Ф-функція [18] для P_i та P_j має форму

$$\Phi_{ij}(u_i, u_j) = \max\{\Psi_{ij}^{1t}(u_i, u_j), \Psi_{ij}^{2d}(u_i, u_j), t, d \in K, \Psi_{ij}^{3l}(u_i, u_j), l \in L = \{1, 2, \dots, v^2\}\}, \tag{12}$$

де $v = \varepsilon + \kappa - 2$ число ребер P_i , тоді $\Phi_{ij}(u_i, u_j) \geq 0$, якщо принаймні одна з нерівностей

$$\Psi_{ij}^{1t}(u_i, u_j) \geq 0, t \in T, \Psi_{ij}^{2d}(u_i, u_j) \geq 0, d \in T, \Psi_{ij}^{3l}(u_i, u_j) \geq 0, l \in L \tag{13}$$

виконана. Таким чином, число нерівностей дорівнює $2\kappa + v^2$.

2. Оскільки $\Psi_{ij}^{1t}(u_i, u_j) = \min\{\varphi_{ij}^{1to}(u_i, u_j), o \in O\} \geq 0$, $\Psi_{ij}^{2d}(u_i, u_j) = \min\{\varphi_{ij}^{2do}(u_i, u_j), o \in O\} \geq 0$ і $\Psi_{ij}^{3l}(u_i, u_j) = \min\{\varphi_{ij}^{3lb}(u_i, u_j), \text{ and } b \in M = \{1, 2, \dots, 5\}\}$ (див. [14] і Додаток 1), $\Psi_{ij}^{1t}(u_i, u_j) \geq 0$, $\Psi_{ij}^{2d}(u_i, u_j) \geq 0$, і $\Psi_{ij}^{3l}(u_i, u_j) \geq 0$ еквівалентні системам нерівностей відповідно

$$\begin{cases} \varphi_{ij}^{1r1}(u_i, u_j) \geq 0 \\ \varphi_{ij}^{1r2}(u_i, u_j) \geq 0 \\ \dots\dots\dots \\ \varphi_{ij}^{1re}(u_i, u_j) \geq 0 \end{cases}, \begin{cases} \varphi_{ij}^{2d1}(u_i, u_j) \geq 0 \\ \varphi_{ij}^{2d2}(u_i, u_j) \geq 0 \\ \dots\dots\dots \\ \varphi_{ij}^{2de}(u_i, u_j) \geq 0 \end{cases}, \begin{cases} \varphi_{ij}^{3l1}(u_i, u_j) \geq 0 \\ \varphi_{ij}^{3l2}(u_i, u_j) \geq 0 \\ \dots\dots\dots \\ \varphi_{ij}^{3ls}(u_i, u_j) \geq 0 \end{cases}, \tag{14}$$

де

$$\varphi_{ij}^{1to}(u_i, u_j) = \zeta_{ik}(p_{jo}(u_j), u_i), \varphi_{ij}^{2ko}(u_i, u_j) = \zeta_{jk}(p_{io}(u_i), u_j). \tag{15}$$

3. З пунктів 1 і 2 випливає, що багатогранники P_i , $i \in I$, не перетинаються, якщо принаймні одна із систем нерівностей

$$G_\tau(u) = \begin{cases} \Psi_{12}^\tau(u_1, u_2) \geq 0 \\ \Psi_{13}^\tau(u_1, u_2) \geq 0 \\ \dots\dots\dots \\ \Psi_{23}^\tau(u_2, u_3) \geq 0 \\ \dots\dots\dots \\ \Psi_{n(n-1)}^\tau(u_{n-1}, u_n) \geq 0 \end{cases}, \tau \in \Xi = \{0, 1, \dots, \zeta = (2\kappa + \nu^2)^\sigma + 1\}, \quad (16)$$

де $\Psi_{ij}^\tau(u_i, u_j)$ чи $\Psi_{ij}^{1l}(u_i, u_j)$, чи $\Psi_{ij}^{2d}(u_i, u_j) \geq 0$, чи $\Psi_{ij}^{3l}(u_i, u_j)$, $\sigma = \frac{n(n-1)}{2}$ виконується.

4. Оскільки $\Phi_i(u_i, \Upsilon) = \min\{\Psi_i^r(u_i, \Upsilon), r \in R\}$, де $\Psi_i^r(u_i, \Upsilon) = \min\{\Phi_{io}^r(u_i, \Upsilon) = \varpi_r(p_{io}(u_i), \Upsilon), o \in O\}$ ((5) і (6)), тоді $\Phi_i(u_i, \Upsilon) \geq 0$ еквівалентно системі нерівностей

$$\{\Psi_i^r(u_i, \Upsilon) \geq 0, r \in R. \quad (17)$$

5. З відношення (10) і пунктів 2, 3 і 4 випливає, що точка $(u, \Upsilon) \in \Lambda$, якщо принаймні одна із систем нерівностей

$$F_\tau(u, \xi) = \begin{cases} G_\tau(u) \geq 0 \\ \Phi_i(u_i, \Upsilon) \geq 0, i \in I \\ w_1 \geq 0, l_1 \geq 0, \eta_1 \geq 0 \\ w_2 - w_1 \geq 0 \\ l_2 - l_1 \geq 0 \\ \eta_2 - \eta_1 \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} \phi_{1\tau}(\xi_1) \geq 0 \\ \phi_{2\tau}(\xi_2) \geq 0 \\ \dots\dots\dots \\ \phi_{\mu\tau}(\xi_\mu) \geq 0 \end{cases}, \tau \in \Xi, \quad (18)$$

де $\xi_t, t \in (1, 2, \dots, \mu)$ чи (u_i, u_j) , або (u_i, w_1) , або (u_i, w_2) , або (u_i, l_1) , або (u_i, l_2) , або (u_i, η_1) , або (u_i, η_2) , або (w_1, w_2) , або (l_1, l_2) , або (η_1, η_2) , або w_1 , або l_1 , або η_2 задоволена.

Таким чином, можлива область Λ може бути подана у такий спосіб:

$$\Lambda = \bigcup_{\tau=0}^{\zeta} \Lambda_\tau, \quad (19)$$

де Λ_τ визначена системою нерівностей $F_\tau(u, \xi) \geq 0$.

6. Відношення (17) дозволяє теоретично знайти глобальну точку мінімуму задачі (10)–(11) як результат розв'язку такої задачі:

$$H(\Upsilon^*) = \min\{H(\Upsilon^{*\tau}), \tau \in \Xi\},$$

де

$$H(\Upsilon^{*\tau}) = \min H(\Upsilon) \text{ s.t. } (u, \Upsilon) \in \Lambda_\tau \subset R^{m+6}, \tau \in \Xi.$$

7. Задача є *NP*-повною.

Властивості моделі показують, що процес розв'язання задачі повинен включати побудову початкових точок, обчислення локальних мінімумів і невичерпний перебір локальних мінімумів для того, щоб одержати гарне наближення до глобального мінімуму.

3. Побудова початкових точок

Для зменшення часу розв'язання поставленої задачі бажано отримати початкові точки, які належать області припустимих розв'язків. Натепер побудова початкових точок виконується різними видами жадібних та евристичних алгоритмів. Але слід відзначити, що ці алгоритми не дозволяють отримувати всі можливі початкові точки, що призводить до значного обмеження відповідних локальних мінімумів. Крім того, ці алгоритми вимагають значних витрат часу. Перелічені факти обумовлюють необхідність розробки нових підходів для отримання початкових точок. Ми пропонуємо підхід, який дозволяє будувати початкові точки, що належать до області допустимих розв'язків без будь-яких обмежень. Для реалізації підхо-

ду покриваємо багатогранники $P_i, i \in I$, кулями мінімальних радіусів і пакуємо кулі в кубоїд C з мінімальним об'ємом. Після цього беремо координати центрів і розміри куль C , отриманих як початкова точка, й обчислюємо точку локального мінімуму задачі (10)–(11).

3.1. Пакування куль

По-перше, ми покриваємо багатогранник P_1 кулею S_1 з мінімальним радіусом r_1^0 . Для цього необхідно розв'язати задачу (див. (6))

$$\rho_1^0 = \min \rho_1 \text{ s.t. } (\rho_1, v) \in \Gamma, \Gamma = \{(\rho_1, v) \in R^4, \|v_0 - p_{1o}^0\| \leq \rho_1, o \in O\}, \quad (20)$$

де $v_0 = (x_0, y_0, z_0)$ – центр кулі. Надалі припускаємо, що O_1 – початок власної системи координат P_1 і центр S_1 збігаються. Тобто куля $S_i(\rho_i^0)$ з мінімальними радіусами $\rho_i^0 = \rho_1^0 h_i^\nabla$ покривають багатогранники $P_i, i \in I$.

Після цього встановлюємо $\Upsilon = \Upsilon^0 = (w_1^0, w_2^0, l_1^0, l_2^0, \eta_1^0, \eta_2^0, \dots)$, так, щоб $0 < w_1^0 < w_2^0, 0 < l_1^0 < l_2^0$ і $0 < \eta_1^0 < \eta_2^0$. Далі припускаємо, що радіуси ρ_i куль $S_i, i \in I$, є змінними й формують вектор $\rho = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n) \in R^n$. У такий спосіб вектором усіх змінних є $X = (v, \rho) \in R^{4n}$. Задавши $v_i^*, i \in I$, випадково, так, щоб $v_i^* \in C(\Upsilon^0)$ і приймаючи $\rho = 0$, одержуємо точку $X^* = (v^*, 0) \in R^{4n}$. Тоді для початкової точки X^* обчислюємо максимальну точку локального максимуму $X^0 = (v^0, \rho^0)$ задачі

$$\Pi(\rho^0) = \max \Pi(\rho) = \max \sum_{i=1}^n \rho_i \text{ s.t. } X \in \Omega \subset R^{4n}, \quad (21)$$

де

$$\Omega = \{X \in R^{4n}, \Phi_{ij}^{SS}(v_i, v_j, \rho_i, \rho_j) \geq 0, 0 < i < j \in I, \Phi_i^S(v_i, \rho_i) \geq 0, i \in I, s_i(\rho_i) = \rho_i - \rho_i^\nabla \geq 0, i \in I\}, \quad (22)$$

$$\Phi_{ij}^{SS}(v_i, v_j, \rho_i, \rho_j) = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2 - (\rho_i + \rho_j)^2,$$

$$\Phi_i^S(v_i, \rho) = \min\{x_i - \rho_i - w_2^0, y_i - \rho_i - l_2^0, z_i - \rho_i - \eta_2^0, w_1^0 - x_i - \rho_i, l_1^0 - y_i - \rho_i, \eta_1^0 - z_i + \rho_i\}.$$

Задача (21)–(22) має такі властивості:

1. Якщо $X^0 = (v^0, \rho^0)$ є локальною точкою максимуму задачі й $\Pi(\rho^0) = \sum_{i=1}^n \rho_i^0 = \sum_{i=1}^n \rho_i^{\nabla} = d$, тоді

кулі $S_i(v_i^0), i \in I$, упаковані в кубоїд $C(\Upsilon^0)$. Це означає, що в цьому випадку точка X^0 є глобальною точкою максимуму задачі (20).

2. Якщо точка глобального максимуму $X^0 = (v^0, \rho^0)$ така, що принаймні один з компонентів ρ^0 строго менше, ніж відповідний компонент $\rho^\nabla = (\rho_1^\nabla, \rho_2^\nabla, \dots, \rho_n^\nabla)$, тоді кулі $S_i, i \in I$, не будуть упаковані у кубоїд $C(\Upsilon^0)$.

Точка $X^0 = (v^0, \rho^0)$ є точкою глобального максимуму, у якій $\Pi(\rho^0) = d$. Її можна отримати, якщо обрати значення Υ^0 таким, що забезпечує розміщення $S_i, i \in I$, в межах кубоїда $C(\Upsilon^0)$.

3.2. Початкові точки

Надалі замість куль $S_i(v_i^0)$ беремо багатогранники $P_i(v_i^0)$ і фіксуємо кути $\Phi_i = \overset{\cdot}{\Phi}_i, \Psi_i = \overset{\cdot}{\Psi}_i$ й $\omega_i = \overset{\cdot}{\omega}_i, i \in I$. Оскільки в даному випадку кути обертання є константами, то вектор усіх змінних $(v, \Upsilon) \in R^{3n+6}$. Отже, система нерівностей (16) складається з лінійних нерівностей. Таким чином, задача (10)–(11) набуває вигляду

$$H(\Upsilon^*) = \min H(\Upsilon) \text{ s.t. } (v, \Upsilon) \in Q \subset R^{3n+6}, \quad (23)$$

де

$$Q = \{(v, \Upsilon) \in R^{3n+6} : \Phi_{ij}(v_i, v_j) \geq 0, 0 < i < j \in I, \Phi_i(v_i, \Upsilon) \geq 0, i \in I, \\ w_1 \geq 0, l_1 \geq 0, \eta_1 \geq 0, w_2 - w_1 \geq 0, l_2 - l_1 \geq 0, \eta_2 - \eta_1 \geq 0\}. \quad (24)$$

З виразу (19) випливає, що

$$Q = \bigcup_{\tau=0}^{\zeta} Q_{\tau},$$

де Q_{τ} визначається лінійною системою нерівностей. Це означає, що обчислення точок локальних мінімумів задачі (23)–(24) може бути зведене до розв'язання ряду підзадач оптимізації лінійного програмування, області розв'язання яких визначені значно меншою кількістю нерівностей, ніж одна із задач (10)–(11). Розглянемо підхід до розв'язання.

Нехай $X^0 = (v^0, \rho^0)$ є глобальною точкою максимуму задачі (20). Тепер виводимо вектор (v^0, Υ^0) (очевидно, що $(v^0, \Upsilon^0) \in Q$) і вибираємо підобласть Q_{τ} , $\tau \in \Xi$, яка містить точку $(v^0, \Upsilon^0) \in Q$. Нехай $(v^0, \Upsilon^0) \in Q_0 \subset Q$ і Q_0 визначена лінійною системою нерівностей (див. (16)) вигляду

$$B_0(v, \Upsilon) = F_0(v, \tilde{\theta}, \Upsilon) = \begin{cases} \Phi_{10}(\xi_1) \geq 0 \\ \Phi_{20}(\xi_2) \geq 0 \\ \dots\dots\dots \\ \Phi_{\mu 0}(\xi_{\mu}) \geq 0 \end{cases}, \quad (25)$$

де $\Phi_{k0}(\xi_k) \geq 0$ – нерівність від систем (14) (див. пункт 5), або системи $w_1 \geq 0, l_1 \geq 0, \eta_1 \geq 0, w_2 - w_1 \geq 0, l_2 - l_1 \geq 0, \eta_2 - \eta_1 \geq 0$, чи (v_i, v_j) , або (v_i, w_1) , або (v_i, w_2) , або (v_i, l_1) , або (v_i, l_2) , або (v_i, η_1) , або (v_i, η_2) , або (w_1, w_2) , або (l_1, l_2) , або (η_1, η_2) , або w_1 , або l_1 , або η_2 , число μ залежить від числа нерівностей, що формують $\Psi_{ij}^{\tau}(v_i, v_j) \geq 0$ у $G_{\tau}(v)$.

Для зменшення витрат часу під час розв'язання задачі (23)–(24) зводимо процес до розв'язання послідовності підзадач, області допустимих розв'язків яких визначаються значно меншим числом нерівностей. З цією метою використовуємо таку властивість: всі кулі не можуть одночасно торкатися одна одної і однакової грані множини $A(\Upsilon^0)$, що означає що значення багатьох лівих частин нерівностей у системі нерівностей $B_0(v, \Upsilon) \geq 0$ в точці $(v^0, \Upsilon^0) \in Q_0$ більші, ніж деякі малі $\rho_i^{\nabla} > \delta > 0$. Це дозволяє виділити підсистему нерівностей $B_{00}(v, \Upsilon) \geq 0$ з $B_0(u, \Upsilon) \geq 0$, яка складається зі значно меншої кількості числа нерівностей. Для виведення підсистеми $B_{00}(u, \Upsilon) \geq 0$ з $B_0(v, \Upsilon) \geq 0$ використовуємо кулі S_i з радіусами ρ_i^{∇} , $i \in I$ (див. (20)). Для цього обчислюємо

$$\begin{aligned} & \|v_i^0 - v_j^0\| - (\rho_i^{\nabla} + \rho_j^{\nabla}) \leq \delta, i \in J_1, j \in J_2, \\ & -w_1^0 + x_i^0 - \rho_i^{\nabla} \leq \frac{1}{2}\delta, i \in I_1, w_2^0 - x_i^0 - \rho_i^{\nabla} \leq \frac{1}{2}\delta, i \in I_2, \\ & -l_1^0 + y_i^0 - \rho_i^{\nabla} \leq \frac{1}{2}\delta, i \in I_3, \\ & -l_2^0 + y_i^0 - \rho_i^{\nabla} \leq \frac{1}{2}\delta, i \in I_4, -\eta_1^0 + z_i^0 - \rho_i^{\nabla} \leq \frac{1}{2}\delta, i \in I_5, -\eta_2^0 + z_i^0 - \rho_i^{\nabla} \leq \frac{1}{2}\delta, i \in I_6. \end{aligned} \quad (26)$$

Далі визначаємо $\Phi_{ij}(v_i^0, v_j^0) = \Psi_{ij}^{1r_{ij}}(v_i^0, v_j^0)$, $i \in J_1 \subset I$, $j \in J_2 \subset I$, $\Phi_{ij}(v_i^0, v_j^0) = \Psi_{ij}^{2d_{ij}}(v_i^0, v_j^0)$, $i \in J_1$, $j \in J_2$, $\Phi_{ij}(v_i^0, v_j^0) = \Psi_{ij}^{3l_{ij}}(v_i^0, v_j^0)$, $i \in J_1$, $j \in J_2$, і $\Phi_i(v_i^0, \Upsilon^0) = \min\{\Psi_i^r(v_i^0, \Upsilon^0), r \in R\}$, $i \in \sum_{r=1}^6 I_r = K_{\delta}$, $I_r \subset I$. Виходячи з нерівностей одержуємо систему нерівностей

$$B_{00}(v, \Upsilon) = F_{00}(v, \tilde{\theta}, \Upsilon) = \begin{cases} \Psi_{ij}^{1t_{ij}}(v_i, v_j) \geq 0, i \in J_1, j \in J_2, \\ \Psi_{ij}^{1d_{ij}}(v_i, v_j) \geq 0, i \in J_1, j \in J_2, \\ \Psi_{ij}^{1l_{ij}}(v_i, v_j) \geq 0, i \in J_1, j \in J_2, \\ \Psi_i^r(u_i, \Upsilon) \geq 0, i \in K_\delta, r \in R, \\ w_1 \geq 0, l_1 \geq 0, \eta_1 \geq 0, \\ w_2 - w_1 \geq 0, l_2 - l_1 \geq 0, \eta_2 - \eta_1 \geq 0, \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} \delta \leq x_i^0 - x_i \leq \frac{\sqrt{2}}{4} \delta, i \in I, \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} \delta \leq y_i^0 - y_i \leq \frac{\sqrt{2}}{4} \delta, i \in I, \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} \delta \leq z_i^0 - z_i \leq \frac{\sqrt{2}}{4} \delta, i \in I, \end{cases} = \begin{cases} \phi_{0i_1}(\xi_{i_1}) \geq 0 \\ \phi_{0i_2}(\xi_{i_2}) \geq 0 \\ \dots\dots\dots \\ \phi_{0i_q}(\xi_{i_q}) \geq 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} \delta \leq x_i^0 - x_i \leq \frac{\sqrt{2}}{4} \delta, i \in I, \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} \delta \leq y_i^0 - y_i \leq \frac{\sqrt{2}}{4} \delta, i \in I, \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} \delta \leq z_i^0 - z_i \leq \frac{\sqrt{2}}{4} \delta, i \in I. \end{cases} \quad (27)$$

яка описує підобласть Q_{00} . Потрібно відзначити, що будь-яка точка $(v, \Upsilon) \in Q_{00}$ відповідно до нерівностей $-\frac{\sqrt{2}}{4} \delta \leq x_i^0 - x_i \leq \frac{\sqrt{2}}{4} \delta, -\frac{\sqrt{2}}{4} \delta \leq y_i^0 - y_i \leq \frac{\sqrt{2}}{4} \delta, -\frac{\sqrt{2}}{4} \delta \leq z_i^0 - z_i \leq \frac{\sqrt{2}}{4} \delta, i \in I$, належить Q_0 , тобто $Q_{00} \subset Q_0$. Крім того, q значно менше, ніж μ в (18).

Обравши точку (v^0, Υ^0) як початкову й розв'язавши задачу

$$H(\Upsilon^{0*}) = \min H(\Upsilon) \text{ s.t. } (v, \Upsilon) \in Q_{00} \subset R^{3n+6},$$

знаходимо точку локального мінімуму (v^{1*}, Υ^{1*}) . Після цього визначаємо множини J_1, J_2 та K_δ в (26) у точці (v^{1*}, Υ^{1*}) , формуючи нову лінійну систему $B_{01}(u, \Upsilon) \geq 0$ вигляду (27) і для початкової точки (v^{1*}, Υ^{1*}) розв'язуємо задачу

$$H(\Upsilon^{2*}) = \min H(\Upsilon) \text{ s.t. } (v, \Upsilon) \in Q_{10} \subset R^{3n+6},$$

де Q_{10} визначена $B_{01}(u, \Upsilon) \geq 0$.

Ітеративний процес продовжується до тих пір, поки не буде виконана рівність $(v^{\gamma^*}, \Upsilon^{\gamma^*}) = (v^{(\gamma+1)^*}, \Upsilon^{(\gamma+1)^*})$. Це означає, що $H(\Upsilon^{\gamma^*}) = \min H(\Upsilon)$ за умови, що $(v, \Upsilon) \in Q_0$.

Використовуючи активні нерівності у точці $(u^{\gamma^*}, \Upsilon^{\gamma^*})$, можемо виконати перехід до нової підобласті Q_1 . Нехай нерівності $\phi_{i_j}(\xi_{i_j}) \geq 0, j \in \Gamma_0$, є активними в точці $(u^{\gamma^*}, \Upsilon^{\gamma^*}) \in Q_0$. Виділяємо підсистеми нерівностей $\Psi_{ij}^0(v_i, v_j) \geq 0, i \in I_{10}, j \in I_{20}$, (див. (14)), які містять активні нерівності $\phi_{i_j}(\xi_{i_j}) \geq 0, j \in \Gamma_0$. Потім вибираємо нерівності $\Phi_{ij}(v_i, v_j) \geq 0$ з системи нерівностей (11), які включають підсистеми нерівностей $\Psi_{ij}^0(v_i, v_j) \geq 0, i \in I_{10}, j \in I_{20}$, (див. (12)), і обчислюємо $\Phi_{ij}(v_i^{0*}, v_j^{0*}) = \chi_{ij}^0, i \in I_{10}, j \in I_{20}$. Це дозволяє вибирати функції $\Psi_{ij}^a(v_i, v_j)$, такі, що $\Phi_{ij}(v_i^{0*}, v_j^{0*}) = \Psi_{ij}^a(v_i^{0*}, v_j^{0*}) = \chi_{ij}^0 > 0, i \in I_{10}^0 \subset I_{10}, j \in I_{20}^0 \subset I_{20}$. Можемо тепер сформулювати нову систему нерівностей, що визначає нову область допустимих розв'язків Q_1 заміною системи нерівностей $\Psi_{ij}^0(v_i, v_j) \geq 0$ від системи, яка визначає Λ_0 для підсистеми нерівностей $\Psi_{ij}^a(v_i, v_j) > 0, i \in I_{10}^0, j \in I_{20}^0, a \neq 0$. Очевидно, що $(v^{\gamma^*}, \Upsilon^{\gamma^*}) \in Q_1 \subset Q_0$. Обираючи початкову точку $(v^{0*}, \Upsilon^{0*}) = (v^{\gamma^*}, \Upsilon^{\gamma^*})$ та розв'язуючи задачу

$$H(\Upsilon^{1*}) = \min H(\Upsilon) \text{ s.t. } (v, \Upsilon) \in Q_1 \subset R^{3n+6},$$

одержуємо точку локального мінімуму (v^{1*}, Υ^{1*}) і т. д.. У такий спосіб пошук точки локального мінімуму задачі (23)–(24) зводиться до розв'язання послідовності підзадач

$$H(\Upsilon^{\theta^*}) = \min H(\Upsilon) \text{ s.t. } (v, \Upsilon) \in Q_\lambda \subset R^{3n+6}, \lambda = 1, 2, \dots \quad (28)$$

Обчислювальний процес продовжується, доки буде виконана рівність $Q_\lambda = Q_{\lambda+1}$, тобто коли ми не змогли перейти з області допустимих розв'язків Q_λ до нової підобласті допустимих розв'язків $Q_{\lambda+1}$. У даному випадку беремо точку $(v^{\lambda^*}, \Upsilon^{\lambda^*})$ як точку локального мінімуму задачі (23)–(24). Таким чином, точка $(v^{\lambda^*}, \tilde{\theta}, \Upsilon^{\lambda^*})$ (де $\tilde{\theta}$ задається випадково), може бути обрана як початкова точка для задачі (10)–(11).

4. Локальна оптимізація

Нехай кутові параметри $\theta_i = (\varphi_i, \psi_i, \omega_i)$, $i \in I$, є змінними. Тоді множина Q_τ перетворюється у множину Λ_τ , $\tau \in \Upsilon$. Взявши $\tilde{\Upsilon} = \Upsilon^{\lambda^*}$ й $\theta = \tilde{\theta}$, одержуємо точку $(\tilde{u}, \tilde{\Upsilon}) = (v^{\lambda^*}, \tilde{\theta}, \Upsilon^{\lambda^*}) \in \Lambda_\lambda$, де Λ_λ визначений $F_\lambda(u, \Upsilon) \geq 0$ (див. (18)). Для зручності припускаємо $\Lambda_0 = \Lambda_\lambda$ та $F_0(u, \Upsilon) = F_\lambda(u, \Upsilon)$. Для того щоб знайти локальний мінімум задачі (10)–(11), модифікуємо підхід, запропонований в підрозділі 3.2. Модифікація полягає у такому.

Кожна з підсистем $\Psi_{ij}^{1ij}(u_i, u_j) \geq 0$, $i \in J_1^0$, $j \in J_2^0$, $\Psi_{ij}^{2dij}(u_i, u_j) \geq 0$, $i \in J_3^0$, $j \in J_4^0$, і $\Psi_i^r(u_i, \Upsilon) \geq 0$, $i \in K_\delta$, $r \in R$, в системі $F_{00}(u, \Upsilon) \geq 0$ складається з ε нерівностей, де ε – число вершин багатогранника (див. (2)). Через нерівності $\|v_i^0 - v_i\| \leq \frac{1}{2}\delta$, $i \in I$, значення кутів φ_i , ψ_i і ω_i , $i \in I$, як правило, менше, ніж $\frac{\pi}{2}$. Таким чином, ряд нерівностей від систем $\Psi_{ij}^{1ij}(u_i, u_j) \geq 0$, $i \in J_1^0$, $j \in J_2^0$, $\Psi_{ij}^{2dij}(u_i, u_j) \geq 0$, $i \in J_3^0$, $j \in J_4^0$, і $\Psi_i^r(u_i, \Upsilon) \geq 0$, $i \in K_\delta$, $r \in R$, (14) може бути опущено. Щоб виключити нерівності із системи $F_{00}(u, \Upsilon) \geq 0$, обчислюємо

$$\begin{aligned} \max\{\varphi_{ij}^{1to}(u_i, u_j), o \in O\} &= a_{ij}^t, i \in J_1^0, j \in J_2^0, \\ \max\{\varphi_{ij}^{2do}(u_i, u_j), o \in O\} &= b_{ij}^d, i \in J_3^0, j \in J_4^0, \\ \max\{\varphi_{io}^r(u_i, \Upsilon), o \in O\} &= a_{ir}, r \in R, i \in K_{\delta 0} \subset K_\delta \end{aligned} \quad (29)$$

і обираємо нерівності

$$\varphi_{ij}^{1ij^o}(\tilde{u}_i, \tilde{u}_j) \leq \frac{1}{q} a_{ij}^o, i \in J_1^0, j \in J_2^0, o \in O_{ij} \subset O, \quad (30)$$

$$\varphi_{ij}^{2dij^o}(\tilde{u}_i, \tilde{u}_j) \leq \frac{1}{q} b_{ij}^o, i \in J_3^0, j \in J_4^0, o \in O_{ij} \subset O,$$

$$\varphi_r(\tilde{u}_i, \tilde{\Upsilon}) \leq \frac{1}{q} a_{ir}, r \in R, i \in K_\delta,$$

де $q \geq 2$. Тоді нерівності

$$\varphi_{ij}^{1ij^o}(u_i, u_j) \geq 0, i \in J_1^0, j \in J_2^0, o \in O_{ij} \subset O, \quad (31)$$

$$\varphi_{ij}^{2dij^o}(u_i, u_j) \geq 0, i \in J_3^0, j \in J_4^0, o \in O_{ij} \subset O,$$

$$\varphi_r(u_i, \tilde{\Upsilon}) \geq 0, r \in R, i \in K_\delta$$

разом з нерівностями $w_1 \geq 0$, $l_1 \geq 0$, $\eta_1 \geq 0$, $w_2 - w_1 \geq 0$, $l_2 - l_1 \geq 0$, $\eta_2 - \eta_1 \geq 0$, $\|v_i^0 - v_i\| \leq \frac{1}{2}\delta$, $i \in I$ формують підсистему нерівностей

$$F_{00}^0(u, \Upsilon) = \begin{cases} \phi_{0i_1}(\xi_{i_1}) \geq 0 \\ \phi_{0i_2}(\xi_{i_2}) \geq 0 \\ \dots\dots\dots \\ \phi_{0i_\zeta}(\xi_{i_\zeta}) \geq 0 \\ \left\| v_i^0 - v_i \right\| \leq \frac{1}{2} \delta, i \in I, \end{cases}, \quad (32)$$

які визначають множину N_0 .

Прийнявши за початкову точку $(\tilde{u}, \tilde{\Upsilon})$, обчислюємо точку локального мінімуму (u^{0*}, Υ^{0*}) задачі

$$H(\Upsilon^{0*}) = \min H(\Upsilon) \text{ s.t. } (u, \Upsilon) \in N_0. \quad (33)$$

Використовуючи точку (u^{0*}, Υ^{0*}) , одержуємо нову систему нерівностей $F_1(u, \Upsilon) \geq 0$ вигляду (27). Потім для точки (u^{0*}, Υ^{0*}) визначаємо J_1, J_2, \dots, J_8 , в (26) і одержуємо систему $F_{11}(u, \Upsilon) \geq 0$ вигляду (27), який описує набір Λ_{11} . Тоді для початкової точки (u^{0*}, Υ^{0*}) знаходимо $J_1^0, J_2^0, J_3^0, J_4^0$ і K_{80} й формуємо систему $F_{11}^0(u, \Upsilon)$ вигляду (32), що визначає множину N_1 . Для початкової точки (u^{0*}, Υ^{0*}) розв'язуємо задачу $H(\Upsilon^{1*}) = \min H(\Upsilon)$, за умови $(u, \Upsilon) \in N_1$ визначається локальна точка мінімуму (u^{1*}, Υ^{1*}) . Тоді, ґрунтуючись на точці (u^{1*}, Υ^{1*}) , будуємо нову систему нерівностей $F_2(u, \Upsilon) \geq 0$ вигляду (27), що визначає під область Λ_2 , визначає J_1, J_2, \dots, J_8 , в (26) і формує систему $F_{22}(u, \Upsilon) \geq 0$ вигляду (27), яка визначає множину Λ_{22} . Після цього для початкової точки (u^{1*}, Υ^{1*}) знаходимо $J_1^0, J_2^0, J_3^0, J_4^0$ і K_{80} й конструємо систему $F_{22}^0(u, \Upsilon)$ вигляду (32), що визначає множину N_2 . Розв'язуємо задачу $H(\Upsilon^{2*}) = \min H(\Upsilon)$, $(u, \Upsilon) \in N_2$, для початкової точки (u^{1*}, Υ^{1*}) й визначаємо точку локального мінімуму (u^{2*}, Υ^{2*}) і т. д. У такий спосіб пошук локальної точки мінімуму задачі (10)–(11) зводиться до розв'язку послідовності підзадач

$$H(\Upsilon^{p*}) = \min H(\Upsilon) \text{ s.t. } (u, \Upsilon) \in N_p, p = 1, 2, \dots \quad (34)$$

Процес закінчується, якщо $H(\Upsilon^{p*}) = H(\Upsilon^{(p-1)*})$. Тоді $(u^{0*}, \Upsilon^{0*}) = (u^{p*}, \Upsilon^{p*})$ береться як локальна точка мінімуму задачі (10)–(11).

Для описаного обчислювального процесу можемо зробити такі висновки. Чим менше δ , тим швидшим є обчислення точки локального мінімуму задачі з послідовності (34) і більшим число ітерацій p , яке потрібне для обчислення локальної точки мінімуму задачі (10)–(11). Чим більше δ , тим більшими є витрати часу, які потрібні для розв'язання однієї задачі з послідовності (34). Отже, необхідний компроміс щодо вибору значення δ , яке гарантуватиме гарний ступінь збіжності до точки локального мінімуму задачі (10)–(11). Значення δ визначається експериментальним шляхом. В роботі обирались значення $\delta = \frac{1}{2} \rho_1^0$.

5. Перехід від одного локального екстремуму до іншого

Для того щоб обчислити нову точку локального мінімуму, необхідно побудувати нову початкову точку. Якщо вона випадково побудована, то значення цільової функції у відповідній точці локального мінімуму може бути або поліпшене, або погіршене, або бути сталою величиною. Ми пропонуємо спосіб переходу від локальної точки мінімуму до нової локальної точки мінімуму, у якій значення цільової функції або поліпшується, або є сталою величиною.

5.1. Допоміжна задача

Нехай (u^{0*}, Υ^{0*}) буде локальною точкою мінімуму задачі (10)–(11). Точці відповідає розміщення багатогранників $P_i(u^{0*})$, $i \in I$. Може бути виявлено, що навколо деякого багатогранника $P_i \in \llcorner$ вільний простір», який дозволяє розмістити більший багатогранник $P_j \subset P_i$ замість багатогранника P_i . Якщо можна виявити такі багатогранники, то це дозволить переставляти багатогранники без перетинання у розміщенні, що

відповідає $P_i(u^{0*})$, $i \in I$, так, щоб значення функції мети не погіршилось. Новому розміщенню багатогранників відповідає точка $(u^0, \Upsilon^0) \in \Lambda$. Якщо ми беремо точку як початкову для задачі (10)–(11), то обчислюємо нову точку локального мінімуму (u^{1*}, Υ^{1*}) . Очевидно, що $H(\Upsilon^{1*}) \leq H(\Upsilon^{0*})$. Щоб виконати описаний підхід, припускаємо, що коефіцієнти гомотетії h_i , $i \in I$, є змінними й формують вектор $h = (h_1, h_2, \dots, h_n) \in R^n$, тобто вектор усіх змінних $Y = (u, \Upsilon, h) \in R^\tau$ де $\tau = m + n + 6$. Отже, Φ -функція для $P_i(u_i, h_i)$ та $P_j(u_j, h_j)$ залежить від h_i і h_j також, тобто вони набувають вигляду $\Phi_{ij}(u_i, u_j, h_i, h_j)$, та Φ -функція для $P_i(u_i, h_i)$ й $A(\Upsilon)$ залежить від h_i , тобто має форму $\Phi_i(u_i, h_i, \Upsilon)$. В такий спосіб ми можемо збільшувати й зменшувати розміри багатогранників, змінюючи значення їх коефіцієнтів гомотетії h_i , $i \in I$. Оскільки для будь-якого $h_i \in (0, \infty)$ багатогранники $P_i(u_i, h_i)$, $i \in I$, є гомотетичними, то Φ -функції $\Phi_{ij}(u_i, u_j, h_i, h_j)$ для $P_i(u_i, h_i)$ і $P_j(u_j, h_j)$ й $\Phi_i(u_i, h_i, \Upsilon)$ для $P_i(u_i, h_i)$ й $A(\Upsilon)$ мають ту ж саму форму для будь-якого $h_i \in (0, \infty)$.

Сформулюємо таку допоміжну задачу:

$$H(\Upsilon) = \min H(\Upsilon) \text{ s.t. } Y = (u, \Upsilon, h) \in \Delta \subset R^\tau, \quad (35)$$

де

$$\Delta = \{Y \in R^\tau, \Phi_{ij}(u_i, u_j, h_i, h_j) \geq 0, 0 < i < j \in I, \Phi_i(u_i, \Upsilon, h_i) \geq 0, \quad (36)$$

$$h_i \geq 0, i \in I, \sum_{i=1}^n (h_i - h_i^\nabla) \geq 0, w_1 \geq 0, l_1 \geq 0, \eta_1 \geq 0,$$

$$w_2 - w_1 \geq 0, l_2 - l_1 \geq 0, \eta_2 - \eta_1 \geq 0, H(\Upsilon^{0*}) - H(\Upsilon) \leq \varepsilon,$$

$$\varepsilon = \left(\frac{1}{2}\right)^t \cdot 0.1 H(\Upsilon^{0*}), t = 0.1.2..... \quad (37)$$

Формуємо початкову точку $Y^{0*} = (u^{0*}, \Upsilon^{0*}, h^\nabla)$ де $h^\nabla = (h_1^\nabla, h_2^\nabla, \dots, h_n^\nabla)$, й обчислюємо точку локального мінімуму $Y^{1*} = (u^{1*}, \Upsilon^{1*}, h^{1*})$ задачі. Оскільки обмеження $h_i - h_i^\nabla \geq 0$, $i \in I$, відсутні, то значення деяких h_i^{1*} , $i \in I$, можуть стати як менше 1, так і більше 1. Нехай $h_i^{1*} > h_i^\nabla$, $i \in k_1 = \{1, 2, \dots, p\} \subset I$, й $h_i^{1*} \leq h_i^\nabla$, $i \in k_2 = \{1, 2, \dots, q\} \subset I$. Крім того, чим більше ε , тим більша кількість коефіцієнтів гомотетії h_i , $i \in I$, суттєво змінює своє значення (зверніть увагу на нерівність $H(\Upsilon^{0*}) - H(\Upsilon) \leq \varepsilon$). Таким чином, деякі багатогранники «збільшуються», тобто вільний простір навколо багатогранників існує, а деякі багатогранники «зменшуються», тобто виникає нестача вільного простору навколо багатогранників. Отже, вектор $h^{1*} = (h_1^{1*}, h_2^{1*}, \dots, h_n^{1*})$ може бути використаний для визначення того, що які багатогранники можна переставити, щоб значення $H(\Upsilon)$ не погіршилось.

5.2. Jump- алгоритм

Запропонований в цьому розділі алгоритм є модифікацією Jump алгоритму (JA), який був запропонований у роботі [19]. Модифікація JA виконана в такий спосіб.

Насамперед формуємо таку послідовність:

$$h_1^{1*} \geq h_2^{1*} \geq \dots \geq h_n^{1*} \quad (38)$$

Якщо $i_j = i$, $i \in I$ для всіх індексів, тоді точка (u^{0*}, Υ^{0*}) приймається як наближення до глобальної точки мінімуму задачі (10)–(11). Якщо $i_j \neq i$, принаймні, для двох індексів, тоді, взявши $h_j^{1*} = h_{i_j}^{1*}$, $j \in I$, одержуємо послідовність

$$h_1^{1*} \geq h_2^{1*} \geq \dots \geq h_n^{1*}. \quad (39)$$

Оскільки $h_i^{1*} > h_i^\nabla$ може виникнути для деяких $i \in I$, то обчислюємо $h_j^0 = \min\{h_j^{1*}, h_j^\nabla\}$, $j \in I$. Це забезпечує нерівність $\sum_{i=1}^n h_i^0 < n$. Тепер будуємо точки $\tilde{X} = (\tilde{u}, \tilde{h})$, де $\tilde{u}_j = u_j^{1*}$, $\tilde{h}_j = h_j^{1*}$, $j \in I$ (див. (33) – (35) і $\tilde{\tilde{X}} = (\tilde{\tilde{u}}, \tilde{\tilde{h}})$ де $\tilde{\tilde{u}}_j = u_j^{1*}$, $\tilde{\tilde{h}} = h_j^0$, $j \in I$. Відзначимо, що якщо $X^{1*} \neq \tilde{X}$, тоді розміщення, яке відповідає точці \tilde{X} , отримується від розміщення, що відповідає точці X^{1*} в результаті «перестановок» деяких багатогранників місцями.

Якщо $X^{1*} \neq \tilde{X}$, тоді $\sum_{i=1}^n \tilde{h}_i < n$, тобто деякі багатогранники $P_i(\tilde{h}_i)$, $i \in I$, зменшені (стиснуті).

Таким чином, необхідно збільшити розміри багатогранників до їхніх початкових розмірів під фіксованим $\Upsilon = \Upsilon^{1*}$. Із цією метою ми розв'язуємо допоміжну задачу

$$\Pi(h^*) = \max \Pi(h) = \max \sum_{i=1}^n h_i \text{ s.t. } X = (u, h) \in D \subset R^{\tau-6}, \quad (40)$$

де

$$\Pi(h^*) = \max \Pi(h) = \max \sum_{i=1}^n h_i \text{ s.t. } X = (u, h) \in D \subset R^{\tau-6}, \quad (41)$$

$$\phi_i(h_i) = h_i^\nabla - h_i \geq 0, h_i \geq 0, i \in I\}.$$

Слід звернути увагу на те, що задача дозволяє збільшити коефіцієнти гомотетії до їх початкових значень (див. нерівності $\phi_i(h_i) = h_i^\nabla - h_i \geq 0$, $h_i \geq 0$, $i \in I$). Це очевидно, що $\tilde{\tilde{X}} \in D$.

Взявши початкову точку $\tilde{\tilde{X}}$ та розв'язуючи задачу (40)–(41), знаходимо локальну точку максимуму $\hat{X} = (\hat{u}, \hat{h})$.

Задача має властивості, що є подібними до задач (10)–(11). Нагадаємо такі властивості:

1. Якщо $\Pi(\hat{h}) = \sum_{i=1}^n \hat{h}_i = \sum_{i=1}^n h_i^\nabla = n$, тоді $\hat{h} = h^\nabla$ й багатогранники P_i , $i \in I$, упаковані в $P(\Upsilon^g)$.

Це означає, що точка \hat{X} є глобальною точкою максимуму задачі (40)–(41).

2. Якщо принаймні один із \hat{h}_i , $i \in I$, строго менше, ніж h_i^∇ у глобальній точці максимуму \hat{X} , то багатогранники P_i , $i \in I$, не можуть бути упакованими в $P(\Upsilon^{1*})$.

Таким чином, можливі два випадки $\Pi(\hat{h}) = n$ і $\Pi(\hat{h}) < n$.

Очевидно, що якщо $\Pi(\hat{h}) = n$, то $(\hat{u}, \Upsilon^{1*}) \in \Lambda$ й (\hat{u}, Υ^{1*}) в загальному випадку не є локальною точкою мінімуму задачі (10)–(11). Отже, беремо початкову точку (\hat{u}, Υ^{1*}) , розв'язуємо задачу (10)–(11) і одержуємо нову точку локального мінімуму (u^{0*}, Υ^{0*}) . Після цього будуємо нову відповідну точку $Y^{0*} = (u^{0*}, \Upsilon^{0*}, h^\nabla)$ й для початкової точки розв'язуємо задачу (35)–(36). У результаті буде обчислена нова точка локального мінімуму $Y^{1*} = (u^{1*}, \Upsilon^{1*}, h^{1*})$. На основі точки Y^{1*} і послідовності (38)–(39) будуємо нову точку $X^{1*} = (u^{1*}, h^{1*})$. Обравши цю точку як початкову, розв'язуємо задачу (40)–(41) і так далі до того, як буде виконано $\Pi(\hat{h}) < n$.

Якщо $\Pi(\hat{h}) < n$, тоді збільшуємо t на 1 в (37) і для початкової точки $Y^{0*} = (u^{0*}, \Upsilon^{0*}, h^\nabla)$ розв'язуємо задачу (35)–(36) і так далі. Ітеративний процес повторюється до виконання умови $\varepsilon \leq 10^3 H(\Upsilon^{0*})$.

6. Загальна схема розв'язання задачі

Наведемо загальну схему розв'язання задачі (10)–(11).

1. Обчислити радіуси куль S_i описаних навколо багатогранників P_i , $i \in I$ (20).
2. Знайти глобальну точку максимуму задачі (21)–(22) упакування куль S_i , $i \in I$, в кубоїд C .
3. Задати значення кутів $\phi_i = \tilde{\phi}_i, \psi_i = \tilde{\psi}_i$ і $\omega_i = \tilde{\omega}_i$, $i \in I$, випадково й зафіксувати їх.
4. Взяти багатогранники P_i замість куль S_i , $i \in I$, розв'язати послідовність задач лінійного програмування (23)–(24) і знайти точку локального мінімуму (v^{0*}, Υ^{0*}) .
5. Отримати точку $(\tilde{u}, \tilde{\Upsilon}) = (v^{0*}, \tilde{\theta}, \Upsilon^{0*}) \in \Lambda$ де $\tilde{v} = v^{0*}$, $\phi_i = \tilde{\phi}_i, \psi_i = \tilde{\psi}_i, \omega_i = \tilde{\omega}_i$, $i \in I$, й $\tilde{\Upsilon} = \Upsilon^{0*}$.
6. Обрати початкову точку $(\tilde{u}, \tilde{\Upsilon})$ й обчислити точку локального мінімуму (u^{0*}, Υ^{0*}) задачі (10)–(11).
7. Сформувати точку $Y^{0*} = (u^{0*}, \Upsilon^{0*}, h^\nabla)$ де $h^\nabla = (h_1^\nabla, h_2^\nabla, \dots, h_n^\nabla)$.
8. Обчислите локальну точку максимуму $Y^{1*} = (u^{1*}, \Upsilon^{1*}, h^{1*})$ задачі (35)–(36) для початкової точки Y^{0*} .
9. Одержати послідовність (38)–(39), обчислити $h_j^0 = \min\{h_j^{1*}, h_j^\nabla\}$, $j \in I$, й побудувати точки $\tilde{X} = (\tilde{u}, \tilde{h})$, де $\tilde{u}_j = u_j^{1*}$, $\tilde{h}_j = h_j^{1*}$, $j \in I$, й $\tilde{X} = (\tilde{u}, \tilde{h})$, де $\tilde{u}_j = u_j^0$, $\tilde{h}_j = h_j^0$, $j \in I$.
10. Знайти локальну точку максимуму $\hat{X} = (\hat{u}, \hat{h})$ задачі (40)–(41) для початкової точки \tilde{X} .
11. Згенерувати точку (\hat{u}, Υ^{1*}) , якщо $\Pi(\hat{h}) = n$, обчислити точку локального мінімуму (u^{0*}, Υ^{0*}) із задачі (10)–(11) для початкової точки (\hat{u}, Υ^{1*}) й повернутися до п. 7.
12. Збільшити t на 1 в (37), якщо $\Pi(\hat{h}) = n$, й повернутися до п. 8, якщо $\epsilon > 10^3 H(\Upsilon^{0*})$.
13. Взяти точку локального мінімуму (u^{0*}, Υ^{0*}) як наближення до глобальної точки мінімуму задачі (10), (11), якщо $\epsilon > 10^3 H(\Upsilon^{0*})$.

7. Числові результати

На даний момент нам не відомі публікацій, в яких були б наведені результати розв'язання задачі, яка розглядається. Тому для того щоб продемонструвати ефективність побудованої математичної моделі та розробленого підходу до розв'язання задачі, ми розв'язали багато прикладів різної розмірності. У наших прикладах розглядаються набори з 10 до 500 багатогранників та використовуються багатогранники з різною кількістю вершин.

Експерименти проводились за допомогою комп'ютера з центральним процесором Intel Core i5-750. Для локальної оптимізації використовували солвер IPOPT (<https://projects.coin-or.org/Ipoprt>).

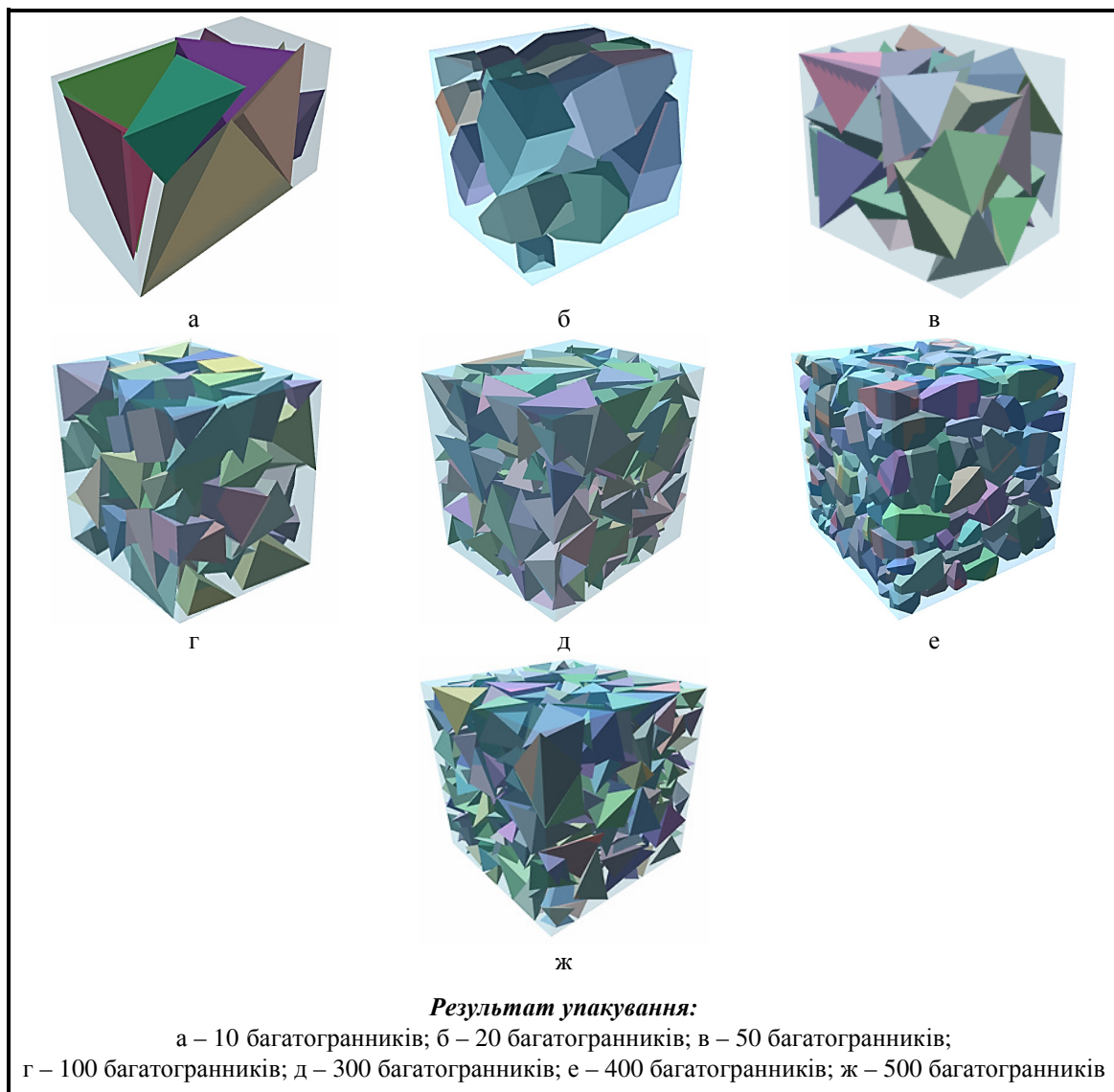
У таблиці наведено обчислювальні витрати та результати розв'язання наших прикладів.

На рисунку зображено результат упакування багатогранників.

Отримані результати показують, що незважаючи на складність математичної моделі розроблений підхід дозволяє ефективно розв'язувати задачі великої розмірності.

Обчислювальні результати

Кількість гомотетичних багатогранників	Число вершин багатогранників	Час	Результат упакування багатогранників
10	4	20 хв.	Рис. 1
20	16	1 год.	Рис. 2
50	4	3 год.	Рис. 3
100	5	8 год.	Рис. 4
300	4	14 год.	Рис. 5
400	16	30 год.	Рис. 6
500	4	34 год.	Рис. 7



Висновки

Покриття багатогранників кулями мінімальних радіусів дозволяє генерувати довільні початкові точки.

Гіпотеза щодо змінних коефіцієнтів гомотетії багатогранників дозволила розробити новий спосіб генерування локальних екстремумів. Цей метод спрощує процес розв'язання і прискорює швидкість отримання результатів.

Модифікація Jump алгоритму виконує плавні переходи між точками локальних екстремумів допоміжної задачі, що забезпечує збільшення значення цільової функції. Алгоритм особливо ефективний, якщо коефіцієнти гомотетії багатогранників у послідовності (2) незначно відрізняються.

Зведення задачі (10)–(11) до розв'язку послідовності підзадач і зменшення числа нерівностей, що визначають область допустимих розв'язків, дозволяє значно зменшувати час обчислення.

Розроблені підходи та алгоритми можуть бути застосовані під час розв'язання оптимізаційних задач упакування будь-яких тривимірних гомотетичних твердих тіл.

Запропонований підхід з деякими модифікаціями можна використовувати для розв'язку задачі упакування різних опуклих багатогранників.

Література

1. Petrov M.S., Gaidukov V.V., Kadushnikov R.M. Numerical method for modelling the microstructure of granular materials. *Powder Metallurgy and Metal Ceramics*. 2004. № 43 (7–8). P. 330–335.
2. Wang Y., Lin C.L., Miller J.D. 3D image segmentation for analysis of multisize particles in a packed particle bed. *Powder Techn.* 2016. № 301. 160–168.
3. Verkhoturov M., Petunin A., Verkhoturova G., Danilov K., Kurennov D. The 3D Object Packing Problem into a Parallelepiped Container Based on Discrete-Logical Representation. *IFAC-PapersOnLine*. 2016. №49 (12). P. 1–5.
4. Karabulut K.A., İnceoğlu M. Hybrid Genetic Algorithm for Packing in 3D with Deepest Bottom Left with Fill Method. *Advances in Inform. Systems*. 2004. № 3261. P. 441–450.
5. Cao P., Fan Z., Gao R., Tang J. Complex Housing: Modelling and Optimization Using an Improved Multi-Objective Simulated Annealing Algorithm. *Proc. ASME*. 2016. № 60563, V02BT03A034.
6. Guangqiang L.A., Fengqiang Z., Rubo Z., Du, Jialu Du., Chen G., Yiran Z. Parallel Particle Bee Colony Algorithm Approach to Layout Optimization. *J. Computational and Theoretical Nanoscience*. 2016. № 13 (7). P. 4151–4157.
7. Torczon V., Trosset M. From evolutionary operation to parallel direct search: Pattern search algorithms for numerical optimization. *Computing Sci. and Statistics*. 1998. № 29. P. 396–401.
8. Birgin E.G., Lobato R. D., Martinez J. M. Packing ellipsoids by nonlinear optimization. *J. Global Optimization*. № 65. 2016. P. 709–743.
9. Stoyan Y., Pankratov A., Romanova T. Quasi-phi-functions and optimal packing of ellipses. *J. Global Optimization*. 2016. №65 (2). P. 283–307.
10. Fasano G. A. Global optimization point of view to handle non-standard object packing problems. *J. Global Optimization*. 2013. № 55(2). P. 279–299.
11. Egeblad J., Nielsen B.K., Brazil M. Translational packing of arbitrary polytopes. *Computational Geometry: Theory and Appl.* 2009. №42(4). P. 269–288.
12. Liu X., Liu J., Cao A., Yao Z. HAPE3D - a new constructive algorithm for the 3D irregular packing problem. *Frontiers of Information Techn. & Electronic Eng.* 2015. № 16(5). P. 380–390.
13. Youn-Kyoung, Joung, Sang Do. Noh Intelligent 3D packing using a grouping algorithm for automotive container engineering. *J. Computational Design and Eng.* 2014. № 1(2). P. 140–151.
14. Kallrath J. Packing ellipsoids into volume-minimizing rectangular boxes. *J. Global Optimization*. № 67 (1–2). P. 151–185.
15. Stoyan Y.G. , Chugay A.M. Packing different cuboids with rotations and spheres into a cuboid *Advances in Decision Sci.* 2014. Availabel at <https://www.hindawi.com/journals/ads/2014/571743>.
16. Stoyan Y.G. , Semkin V.V., Chugay A.M. Modeling Close Packing of 3D Objects. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2016. № 52(2). P. 296–304.
17. Pankratov O., Romanova T., Stoyan Y., Chuhai A. Optimization of packing polyhedra in spherical and cylindrical containers. *Eastern European J. Enterprise Techn.* 2016. Vol.1. № 4(79). P. 39–47.
18. Stoyan Y.G., Chugay A.M. Mathematical modeling of the interaction of non-oriented convex polytopes. *Cybernetic Systems Analysis*. 2012. № 48. P. 837–845.
19. Stoyan Y., Yaskov G. Packing unequal circles into a strip of minimal length with a jump algorithm *Optimization Letters*. 2014. №8 (3). P. 949–970.

Додаток 1

З роботи [18] випливає, що функція вигляду $\Psi_{ij}^{3l}(u_i, u_j)$ визначає взаємодію двох ребер багатогранників P_i та P_j . Нехай $[p_{io}(u_i), p_{ik}(u_i)]$ буде ребром P_i , котре лежить на прямій лінії, яка утворена перетином площин $\zeta_{ir}(X, u_i) = 0$ та $\zeta_{i,r+1}(X, u_i) = 0$. А $[p_{js}(u_j), p_{jv}(u_j)]$ буде ребром P_j , котре лежить на прямій лінії, яка утворена перетином площин $\zeta_{jl}(X, u_i) = 0$ та $\zeta_{j,l+1}(X, u_i) = 0$. Площини формують двогранні кути Δ_{ir} та Δ_{jl} , такі, що $P_i \subset \Delta_{ir}$ та $P_j \subset \Delta_{jl}$. Вочевидь, ці двогранні кути не перетинаються, якщо $P_i \cap P_j = \emptyset$. Тому сформулюємо умову неперетину двограних кутів у аналітичному вигляді.

Транслюючи ребро $[p_{js}(u_j), p_{jv}(u_j)]$ на вектор $\overline{p_{ik}(u_i) - p_{js}(u_j)}$ та ребро $[p_{io}(u_i), p_{ik}(u_i)]$ на вектор $\overline{p_{js}(u_j) - p_{ik}(u_i)}$, отримуємо

$$[p_{io}(u_j) - p_{js}(u_i) + p_{ik}(u_j), p_{js}(u_j)] = [p_{io}(u_j), a_{ij}^{ab}(u_i, u_j)],$$

де $a_{ij}^{ab}(u_i, u_j) = (a_{ij}^{1ab}(u_i, u_j), a_{ij}^{2ab}(u_i, u_j), a_{ij}^{3ab}(u_i, u_j))$, a та b номери ребер та $[p_{io}(u_j) - p_{js}(u_i) + p_{ik}(u_j), p_{jv}(u_j)] = [a_{ij}^{ba}(u_i, u_j), p_{io}(u_j)]$, відповідно.

Далі побудуємо рівняння площини Q_{ij}^{ab} , що проходить через точки $p_{io}(u_j), p_{iv}(u_j)$ та $a_{ij}^{ab}(u_i, u_j)$

$$F_{ij}^{ab}(X, u_i, u_j) = (x - p_{io}^1(u_j))(x - p_{iv}^1(u_j))(x - a_{ij}^{ab}(u_j)) + (y - p_{io}^2(u_j))(y - p_{iv}^2(u_j))(y - a_{ij}^{ab}(u_j)) + (z - p_{io}^3(u_j))(z - p_{iv}^3(u_j))(z - a_{ij}^{ab}(u_j)) = 0$$

та площини Q_{ij}^{ba} , що проходить через точки $p_{js}(u_j), p_{jv}(u_j)$ та $a_{ij}^{ba}(u_i, u_j)$

$$F_{ij}^{ba}(X, u_i, u_j) = (x - p_{js}^1(u_j))(x - p_{jv}^1(u_j))(x - a_{ij}^{ba}(u_j)) + (y - p_{js}^2(u_j))(y - p_{jv}^2(u_j))(y - a_{ij}^{ba}(u_j)) + (z - p_{js}^3(u_j))(z - p_{jv}^3(u_j))(z - a_{ij}^{ba}(u_j)) = 0.$$

Площина Θ_{ij}^{ab} проходить через ребра $[p_{io}(u_i), p_{ik}(u_i)]$ та $[p_{ik}(u_j), a_{ij}^{ab}(u_i, u_j)]$, а площина Θ_{ij}^{ba} – через ребра $[p_{js}(u_i), p_{jv}(u_i)]$ та $[a_{ij}^{ba}(u_i, u_j), p_{io}(u_j)]$. Оскільки $[p_{io}(u_i), p_{ik}(u_i)]$ паралельно $[a_{ij}^{ba}(u_i, u_j), p_{io}(u_j)]$ та $[p_{js}(u_j), p_{jv}(u_j)]$ паралельно $[p_{ik}(u_j), a_{ij}^{ab}(u_i, u_j)]$, то площини Θ_{ij}^{ab} та Θ_{ij}^{ba} є паралельними. Якщо площина Θ_{ij}^{ab} (Θ_{ij}^{ba}) є відокремлювальною площиною для Δ_{ir} та Δ_{jt} , нерівності

$$\min\{\Phi_{ij}^{31ab}(u_i, u_j), \Phi_{ij}^{32ab}(u_i, u_j)\} = \min\{F_{ij}^{ab}(p_{i,k-1}(u_i), u_i, u_j), F_{ij}^{ab}(p_{i,k+1}(u_i), u_i, u_j)\} \geq 0,$$

$$\min\{\Phi_{ij}^{33ba}(u_i, u_j), \Phi_{ij}^{34ba}(u_i, u_j)\} = \min\{F_{ij}^{ba}(p_{j,v-1}(u_j), u_i, u_j), F_{ij}^{ba}(p_{j,v+1}(u_j), u_i, u_j)\} \geq 0,$$

$$\Phi_{ij}^{35ab}(u_i, u_j) = F_{ij}^{ab}(p_{jv}(u_i), u_i, u_j) \geq 0$$

виконуються, $p_{i,k-1}(u_i), p_{i,k+1}(u_i) \in \Theta_{ij}^{ab}$ – це суміжні вершини до вершини $p_{ik}(u_i)$, а $p_{j,v-1}(u_j), p_{j,v+1}(u_j) \in \Theta_{ij}^{ba}$ – суміжні вершини до вершини $p_{jv}(u_i)$.

Таким чином, нерівність

$$\Psi_{ij}^{3ab}(u_i, u_j) = \min\{F_{ij}^{ab}(p_{i,k-1}(u_i), u_i, u_j), F_{ij}^{ab}(p_{i,k+1}(u_i), u_i, u_j), F_{ij}^{ba}(p_{j,v-1}(u_j), u_i, u_j),$$

$$F_{ij}^{ba}(p_{j,v+1}(u_j), u_i, u_j), F_{ij}^{ab}(p_{jv}(u_i), u_i, u_j)\} > 0,$$

буде виконуватись, якщо $\Delta_{ir} \cap \Delta_{jt} = \emptyset$.

Звідси випливає, що якщо хоча б одна з нерівностей структури $\Psi_{ij}^{3ab}(u_i, u_j) > 0$, $a, b \in \{1, 2, \dots, v = \varepsilon + 1 - 2\}$, тоді $P_i \cap P_j = \emptyset$. Для зручності позначимо $\Psi_{ij}^{ab}(u_i, u_j)$, $a, b \in \{1, 2, \dots, v = \varepsilon + 1 - 2\}$, як $\Psi_{ij}^{3l}(u_i, u_j) = \min\{\Phi_{ij}^{3cl}(u_i, u_j), c \in M\}$, $l \in L$. Тоді, якщо функція $\max\{\Psi_{ij}^{3l}(u_i, u_j), l \in L, \} > 0$, то $P_i \cap P_j = \emptyset$.

Надійшла до редакції 17. 01. 2018