УДК 539.3

# МОДУЛЬ СДВИГА ВОЛОКНИСТОГО КОМПОЗИТА С ТРАНСТРОПНОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ МАТРИЦЕЙ И ТРАНСТРОПНЫМ УПРУГИМ ВОЛОКНОМ

**С. Н. Гребенюк**, д-р техн. наук
gsm1212@ukr.net

**М. И. Клименко**, канд. физ.-мат. наук
m1655291@gmail.com

Запорожский национальный университет,
69600, Украина, г. Запорожье, ул. Жуковского, 66

*При решении задач механики деформируемого твердого тела неоднородный композиционный материал моделируется однородным с усредненными механическими свойствами – эффективными характеристиками. Целью этой статьи является разработка методики определения эффективного модуля сдвига для вязкоупругого волокнистого композита с транстропными матрицей и волокном. Их плоскости изотропии совпадают и перпендикулярны оси волокна. Эффективный модуль сдвига определяется как функция механических свойств матрицы и волокна и объемного содержания каждого из них в композите. Рассматривается однонаправленный композиционный материал с гексагональной схемой укладки волокон и с элементарной ячейкой, состоящей из вязкоупругой матрицы и упругого волокна. Геометрической моделью композита является комбинация двух коаксиальных бесконечных цилиндров – полого, моделирующего матрицу, и вставленного в него сплошного, моделирующего волокно. Объем гексагональной ячейки аппроксимируется объемом цилиндра. При этом радиус цилиндра выбирается таким образом, чтобы объемное содержание волокна в гексагональной ячейке совпадало со значением этой характеристики для цилиндрической ячейки. Для описания вязкоупругих свойств композита используются соотношения наследственной теории Больцмана – Вольтерра. Модуль сдвига определяется как интегральный оператор с разностным ядром. Рассмотрены две краевые задачи: о продольном сдвиге транстропного вязкоупругого сплошного цилиндра, моделирующего композит, и о совместном продольном сдвиге полого и сплошного цилиндров, моделирующих соответственно материал матрицы и материал волокна. Предполагается непрерывность перемещений и касательных напряжений на поверхности контакта матрицы и волокна. На внешней поверхности цилиндрической ячейки прикладывается касательная гармоническая нагрузка. Для решения таких задач используется преобразование Лапласа. В качестве условия согласования используется равенство перемещений на внешней поверхности цилиндра для обеих задач. Применение предложенной методики позволяет определить характеристики интегрального оператора, описывающего модуль сдвига для вязкоупругого композиционного материала. Находятся мгновенный модуль сдвига и параметры ядра релаксации как функции известных механических характеристик матрицы и волокна. В качестве примера определены характеристики модуля сдвига для композиционного материала, состоящего из резиновой матрицы и полиамидного волокна.*

***Ключевые слова:*** *композит, эффективный модуль сдвига, вязкоупругость, транстропный материал.*

**Введение**

Предлагается методика определения модуля сдвига вязкоупругого волокнистого композита с транстропными матрицей и волокном в зависимости от механических характеристик матрицы и волокна, а также объемной доли каждого из них в композите. Рассматривается случай вязкоупругой матрицы и упругого волокна. Плоскости изотропии матрицы и волокна совпадают и перпендикулярны оси волокна. Для получения характеристик интегрального оператора, определяющего искомый модуль сдвига, рассмотрены две краевые задачи: о продольном сдвиге трансверсально-изотропного вязкоупругого сплошного цилиндра, моделирующего композит, и о совместном продольном сдвиге полого и сплошного цилиндров, моделирующих соответственно материал матрицы и материал волокна. В качестве условия согласования использовано равенство осевых перемещений матрицы и композита на наружной поверхности моделирующего его цилиндра.

Одним из наиболее распространенных методов получения механических характеристик композитного материала является процедура гомогенизации, когда композит представляется как однородный анизотропный материал с механическими характеристиками, зависящими от механических характеристик матрицы и армирующих волокон, а также объемной доли волокон в композите. При этом полагают, что часто-

© С. Н. Гребенюк, М. И. Клименко, 2018

та армирования волокнами достаточно велика, и армированный слой можно рассматривать как транстропный. Тогда для определения механических характеристик композита необходимо найти пять независимых величин: модули упругости $E_{11}$ и $E_{22}$, модули сдвига $G_{12}$ и $G_{23}$, а также коэффициент Пуассона $\nu_{12}$.

Такие соотношения для композитного материала с упругими транстропным волокном и изотропной матрицей для трехмерного случая получены в [1]. В [2] для композиционного материала с учетом транстропных свойств матрицы и волокна определен модуль сдвига $G_{12}$. В качестве условия согласования использовалось равенство соответствующих компонент вектора перемещений. Модуль сдвига композита с учетом транстропных свойств матрицы и волокна найден в [3] на основе применения энергетического критерия согласования. Задачи определения механических вязкоупругих характеристик однонаправленных композитов по известным характеристикам матрицы и волокна рассматриваются в ряде работ. В [4, 5] исследуются проблемы прогнозирования вязкоупругих свойств композитов при наличии вязкоупругой матрицы или вязкоупругого волокна, изучается также случай наличия вязкоупругих свойств как матрицы, так и волокна. Задача определения характеристик вязкоупругого деформирования композитов с использованием теории наследственной вязкоупругости Больцмана – Вольтерра рассмотрена в [6]. Здесь предложена методика определения эффективных вязкоупругих характеристик композитов, основанная на аппроксимации функции деформирования цепной дробью и применении метода операторных цепных дробей. В [7] представлена гомогенизация двухкомпонентного периодического композита с компонентами, разделенными вязкоупругим слоем. Для решения этой задачи применен метод функций Грина. В [8] выполнен конечноэлементный анализ микромеханической модели однонаправленного волокнистого полимерного композита под действием нагрузки, при этом рассматривается вязкоупругая матрица и упругое волокно, предполагается наличие у матрицы трещин.

В данной работе на основе кинематических условий согласования определяется модуль сдвига $G_{12}$ композита, состоящего из транстропных упругих волокон и транстропной вязкоупругой матрицы.

**1. Основные предположения и соотношения**

Рассмотрим однонаправленный композиционный материал с гексагональной схемой укладки волокон. Мысленно вырежем из объема композита элементарную гексагональную ячейку, содержащую одно волокно и окружающий его материал матрицы. Пусть матрица и волокно изготовлены из транстропных материалов с совпадающими плоскостями изотропии, перпендикулярными оси волокна. Предположим, что материал волокна является упругим, а материал матрицы – вязкоупругим. Такие свойства являются характерными, например, для резинокордных материалов.

Для описания вязкоупругих свойств материалов, как правило, используют дифференциальные (на основе законов Гука и Ньютона) или интегральные соотношения. К последним, более общим, относятся соотношения наследственной теории Больцмана – Вольтерра, где вязкоупругие свойства описываются интегральным оператором с разностным ядром релаксации. Свойства конкретного материала определяются значениями реологических характеристик, входящими в интегральный оператор.

В качестве геометрической модели композита рассматривается комбинация двух коаксиальных бесконечных цилиндров – полого с внешним радиусом $r = b$, моделирующего матрицу, и вставленного в него сплошного цилиндра с радиусом $r = a$, моделирующего волокно. Объем гексагональной ячейки аппроксимируем объемом цилиндра, причем радиус цилиндра примем таким, чтобы объемная доля волокна $f = {a^2}/{b^2}$ в гексагональной ячейке совпадала со значением этого показателя для цилиндрической ячейки.

Механические характеристики определяются из решения двух краевых задач. Сначала решается задача совместного деформирования транстропной вязкоупругой матрицы и транстропного упругого волокна. В результате находим компоненты напряженно-деформированного состояния (НДС) как функции механических характеристик матрицы и волокна, а также объемной доли волокна в композите.

Далее получаем решение аналогичной краевой задачи для композита, который представляется однородным вязкоупругим транстропным материалом с неизвестными механическими характеристиками. В результате определяем компоненты НДС в виде функций неизвестных механических характеристик однородного материала, моделирующего композит. Выбрав условия согласования, находим механические характеристики вязкоупругого транстропного композита, являющиеся функциями механических характеристик матрицы и волокна, а также объемной доли волокна в композите.

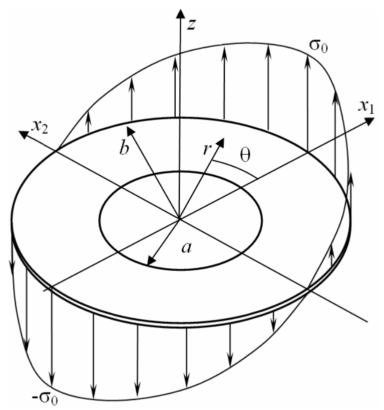


***Рис. 1. Вид нагрузки, приложенной к внешней поверхности цилиндра, моделирующего ячейку композита***

Рассмотрим решение задачи о продольном сдвиге для транстропного цилиндрического тела [1]. Приведем основные соотношения, характеризующие чистый продольный сдвиг в цилиндрической области для вязкоупругого материала (рис. 1). Тогда компоненты НДС определяются соотношениями

$$\sigma_z = \sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_{r\theta} = 0,\ \sigma_{zr} = \sigma_{zr}(r,\theta,t),\ \sigma_{\theta z} = \sigma_{\theta z}(r,\theta,t),$$

$$\varepsilon_z = \varepsilon_r = \varepsilon_\theta = \gamma_{r\theta} = 0,\ \gamma_{zr} = \gamma_{zr}(r,\theta,t),\ \gamma_{\theta z} = \gamma_{\theta z}(r,\theta,t).$$

Предполагается, что к внешней цилиндрической поверхности области приложена нагрузка

$$\sigma_{zr}(b,\theta,t) = \sigma_0 \cos\theta. \tag{1}$$

Осевое перемещение при этом определяется равенством

$$u_z(r,\theta,t) = \left( C_1(t) r + {C_2(t)}/{r} \right)\cos\theta, \tag{2}$$

где $C_1(t)$ и $C_2(t)$ – функции, зависящие от времени. Используя соотношения Коши, получим выражения для деформаций

$$\gamma_{zr} = (r,\theta,t) = \left( C_1(t) - {C_2(t)}/{r^2} \right)\cos\theta,\ \gamma_{z\theta} = (r,\theta,t) = -\left( C_1(t) - {C_2(t)}/{r^2} \right)\sin\theta. \tag{3}$$

Тогда выражения для напряжений примут вид

$$\sigma_{zr} = (r,\theta,t) = \tilde{G}_{12}\left( C_1(t) - {C_2(t)}/{r^2} \right)\cos\theta,\ \sigma_{z\theta} = (r,\theta,t) = -\tilde{G}_{12}\left( C_1(t) - {C_2(t)}/{r^2} \right)\sin\theta. \tag{4}$$

В равенствах (4) $\tilde{G}_{12}$ – линейный интегральный оператор, характеризующий вязкоупругие свойства материала

$$\tilde{G}_{12}[y(t)] = G_{12}\left( y(t) - \int_0^t R(t-\tau)\, y(\tau)\, d\tau \right), \tag{5}$$

где $G_{12}$ – мгновенный модуль сдвига, соответствующий значению $t = 0$, $R(t)$ – ядро релаксации.

**2. Совместный продольный сдвиг матрицы и волокна**

Рассмотрим задачу о совместном продольном сдвиге полого цилиндра ($a \le r \le b$), моделирующего матрицу, и сплошного цилиндра ($0 \le r \le a$), моделирующего волокно. Звездочкой обозначаются величины, относящиеся к матрице, кружочком – к волокну.

Основные соотношения, описывающие НДС вязкоупругой матрицы на основании формул (2)–(4), запишем так:

$$u_z^*(r,\theta,t) = \left( A(t) + {B(t)}/{r} \right)\cos\theta, \tag{6}$$

$$\gamma_{zr}^*(r,\theta,t) = \left( A(t) - {B(t)}/{r^2} \right)\cos\theta,\ \gamma_{z\theta}^*(r,\theta,t) = -\left( A(t) + {B(t)}/{r^2} \right)\sin\theta, \tag{7}$$

$$\sigma_{zr}^*(r,\theta,t) = \tilde{G}_{12}^*\left( A(t) - {B(t)}/{r^2} \right)\cos\theta,\ \sigma_{z\theta}^*(r,\theta,t) = -\tilde{G}_{12}^*\left( A(t) + {B(t)}/{r^2} \right)\sin\theta, \tag{8}$$

где линейный интегральный оператор $\tilde{G}_{12}^*$ имеет вид, аналогичный оператору (5), с мгновенным модулем сдвига $G_{12}^*$ вместо $G_{12}$ и ядром релаксации $R^*(t)$ вместо $R(t)$.

Основные соотношения, описывающие НДС волокна (сплошной цилиндр) с учетом ограниченности перемещений при $r = 0$, принимают вид

$$u_z^\circ(r,\theta,t) = C(t) r \cos\theta, \tag{9}$$

$$\gamma^{\circ}_{zr}(r,\theta,t)=C(t)\cos\theta\,,\ \gamma^{\circ}_{z\theta}(r,\theta,t)=-C(t)\sin\theta\,, \tag{10}$$

$$\sigma^{\circ}_{zr}(r,\theta,t)=G^{\circ}_{12}C(t)\cos\theta\,,\ \sigma^{\circ}_{z\theta}(r,\theta,t)=-G^{\circ}_{12}C(t)\sin\theta\,. \tag{11}$$

Найдем функции $A(t)$, $B(t)$ и $C(t)$ в соотношениях (6)–(11) для задачи о совместном продольном сдвиге вязкоупругой матрицы и упругого волокна. Используем граничное условие (1) и условия непрерывности перемещений и напряжений в композите при $r=a$

$$\sigma^{\circ}_{zr}(a,\theta,t)=\sigma^{*}_{zr}(a,\theta,t)\,,\ u^{\circ}_{z}(a,\theta,t)=u^{*}_{z}(a,\theta,t)\,.$$

С учетом (5) получаем систему интегральных уравнений типа свертки относительно неизвестных функций $A(t)$, $B(t)$ и $C(t)$. Применим к ней преобразование Лапласа. Из полученной системы находим следующие выражения для изображений искомых функций:

$$\tilde{A}(p)=\frac{\left(G^{\circ}_{12}+G^{*}_{12}\left(1-\tilde{R}^{*}(p)\right)\right)\sigma_0}{G^{*}_{12}p\left(1-\tilde{R}^{*}(p)\right)\left(G^{\circ}_{12}(1+f)+G^{*}_{12}\left(1-\tilde{R}^{*}(p)\right)\right)(1-f)}\,, \tag{12}$$

$$\tilde{B}(p)=\frac{a^2\left(G^{*}_{12}\left(1-\tilde{R}^{*}(p)\right)-G^{\circ}_{12}\right)\sigma_0}{G^{*}_{12}p\left(1-\tilde{R}^{*}(p)\right)\left(G^{\circ}_{12}(1+f)+G^{*}_{12}\left(1-\tilde{R}^{*}(p)\right)\right)(1-f)}\,, \tag{13}$$

$$\tilde{C}(p)=\tilde{A}(p)+\frac{\tilde{B}(p)}{a^2}\,. \tag{14}$$

В (12)–(14) $p$ – параметр преобразования Лапласа, $\tilde{R}^{*}(p)$ – изображение ядра релаксации для материала матрицы.

**3. Продольный сдвиг для композитного материала**

Решим аналогичную задачу на чистый продольный сдвиг для однородного трансверсально-изотропного вязкоупругого материала, моделирующего композит, представляя его в виде сплошного бесконечного цилиндра с радиусом $b$. Краевое условие имеет вид (1). Компоненты НДС определяются по формулам, аналогичным (9)–(11), где вместо $G^{\circ}_{12}$ будет фигурировать линейный интегральный оператор $\tilde{G}_{12}$ типа (5) с мгновенным модулем сдвига композита $G_{12}$ и ядром релаксации композита $R(t)$. $C(t)$ заменяется на $\sigma_0\tilde{G}^{-1}_{12}$.

**4. Определение характеристик модуля сдвига композита**

Найдем мгновенный модуль сдвига $G_{12}$ и ядро релаксации $R(t)$, используя кинематическое условие согласования $u_z(b,\theta,t)=u^{*}_{z}(b,\theta,t)$, где $u_z(r,\theta,t)$ – осевое перемещение композита. Подставляя сюда соответствующие выражения для осевых перемещений и применив преобразование Лапласа, получим уравнение в изображениях

$$G_{12}\left(1-\tilde{R}(p)\right)=\frac{G^{*}_{12}\left(\tilde{R}^{*}(p)\right)\left(G^{\circ}_{12}(1+f)+G^{*}_{12}(1-f)\left(1-\tilde{R}^{*}(p)\right)\right)}{(1-f)G^{\circ}_{12}+(1+f)G^{*}_{12}\left(1-\tilde{R}^{*}(p)\right)}\,, \tag{15}$$

где $\tilde{R}(p)$ – изображение $R(t)$. Переходя в этом равенстве к пределу при $p\to\infty$ и учитывая, что $\lim\limits_{p\to\infty}\tilde{R}(p)=\lim\limits_{p\to\infty}\tilde{R}^{*}(p)=0$, получим формулу для определения мгновенного модуля сдвига

$$G_{12}=\frac{G^{*}_{12}\left(G^{\circ}_{12}(1+f)+G^{*}_{12}(1-f)\right)}{(1-f)G^{\circ}_{12}+(1+f)G^{*}_{12}}\,. \tag{16}$$

Отметим, что формула (16) совпадает с выражением для модуля сдвига композита с упругими матрицей и волокном, полученным в работе [3].

Найдем ядро преобразования $R(t)$. Для этого найдем его изображение $\tilde{R}(p)$ из уравнения (15) $\tilde{R}(p) = \dfrac{C_1x^2 + C_2x + C_3}{C_4(x + C_5)}$, where $C_1 = (f-1)\left(G_{12}^*\right)^2$, $C_2 = G_{12}^*\left(G_{12} - G_{12}^\circ\right)(1+f)$, $C_3 = G_{12}G_{12}^\circ(1-f)$, $C_4 = G_{12}G_{12}^*(1+f)$, $C_5 = \dfrac{G_{12}^\circ(1-f)}{G_{12}^*(1+f)}$, $x = 1 - \tilde{R}^*(p)$.

Пусть вязкоупругие свойства матрицы описываются интегральным оператором с экспоненциальным ядром вида $R^*(t) = s_1e^{s_0t}$, где $s_0$, $s_1$ – реологические характеристики материала. Тогда оригинал $R(t)$ имеет вид

$$R(t) = q_1e^{s_0t} + q_2e^{p_0t}, \tag{17}$$

где $p_0 = s_0 + \dfrac{s_1}{C_5+1}$, $q_1 = -\dfrac{C_1s_1}{C_4}$, $q_2 = \dfrac{s_1(C_1C_5^2 - C_2C_5 + C_3)}{C_4(C_5+1)^2}$.

**5. Численные результаты**

Построим интегральный оператор $\tilde{G}_{12}$ для случая, когда матрица представляет собой резину марки 67Л с разностным ядром релаксации $R^*(t-\tau) = s_1e^{s_0(t-\tau)}$, где $s_0 = -1$, $s_1 = \dfrac{G_0^* - G_\infty^*}{G_0^*}$ с мгновенным модулем сдвига $G_0^*$=1,5 МПа и длительным модулем сдвига $G_\infty^*$=0,78 МПа, $G_{12}^* = G_0^*$, материал волокна – полиамидный корд 23КНТС, для которого $G_{12}^\circ$=4,9 МПа. Значения мгновенного модуля сдвига $G_{12}$ для различных значений объемной доли волокна $f$ представляются таким образом:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | 0,0 | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,8 | 1,0 |
| $G_{12}$ | 1,500 | 1,857 | 2,310 | 2,904 | 3,717 | 4,900 |

Для анализа реологических свойств композита построим зависимость $g(t) = \tilde{G}_{12}[1] = G_{12}\left(1 - \int_0^t R(t-\tau)d\tau\right)$. Воспользовавшись (17), получаем

$$g(t) = G_{12}\left(\alpha_1 + \alpha_2e^{s_0t} + \alpha_3e^{p_0t}\right),$$

где $\alpha_1 = 1 + \dfrac{q_1}{s_0} + \dfrac{q_2}{p_0}$, $\alpha_2 = -\dfrac{q_1}{s_0}$, $\alpha_3 = -\dfrac{q_2}{p_0}$.

Исследуем вязкоупругие свойства композита для разных значений $f$ с помощью безразмерной функции $g(t)/G_{12}$ (рис. 2). Как можно заметить, наиболее яркое проявление вязкоупругих свойств можно наблюдать, когда композит полностью состоит из вязкоупругого материала матрицы (при $f = 0$), по мере увеличения объемной доли упругого волокна вязкоупругие свойства композита проявляются все меньше, и когда композит представляет собой материал волокна (при $f = 1$), он становится чисто упругим.

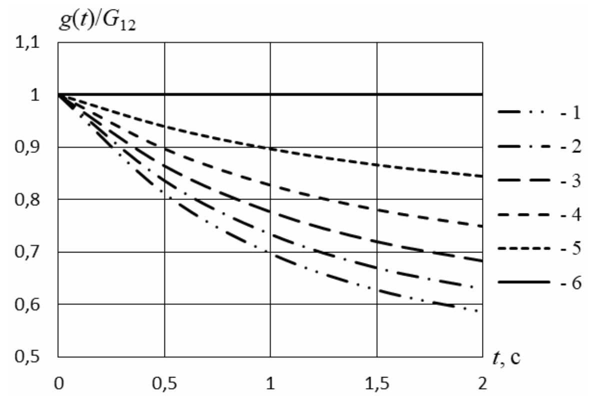


***Рис. 2. Зависимости g(t)/$G_{12}$ при различном объемном содержании волокна:***
1 – $f$=0; 2 – $f$=0,2; 3 – $f$=0,4; 4 – $f$=0,6; 5 – $f$=0,8; 6 – $f$=1

**Выводы**

Решение задачи нахождения эффективного модуля сдвига для композита с вязкоупругой матрицей можно получить, используя кинематические условия согласования, путем решения двух краевых задач: о продольном сдвиге транстропного вязкоупругого сплошного цилиндра, моделирующего композит, и о совместном сдвиге полого и сплошного цилиндров, моделирующих соответственно матрицу и волокно. Предложенную методику, основанную на применении условий согласования выбранных компонентов перемещения для ячейки однородного композита и его составляющих, можно использовать для определения других эффективных характеристик вязкоупругих композитных материалов.

**Литература**


1. Klasztorny M., Konderla P., Piekarski R. An Exact Stiffness Theory of Unidirectional xFRP Composites. *Mech. Composite Materials*. 2009. Т. 45. № 1. P. 77–104.
2. Гребенюк С. Н. Определение модуля сдвига композиционного материала с транстропными матрицей и волокном. *Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла*. Дніпропетровськ, 2012. Вип. 13. С. 92–98.
3. *Grebenyuk S .N.* The shear modulus of a composite material with a transversely isotropic matrix and a fibre. *J. Appl. Math. and Mech.* 2014. Vol. 78. № 2. P. 270–276.
4. Плуме Э. З. Сравнительный анализ ползучести однонаправленных композитов, армированных волокнами различного типа. *Механика композит. материалов*. 1992. № 4. С. 557–566.
5. Maksimov R. D., Plume E. Z. Creep of unidirectionally reinforced polymer composites. *Mech. Composite Materials*. 1984. № 20. P. 149–157.
6. Каминский А. А., Селиванов М. Ф. Об одном методе определения характеристик вязкоупругого деформирования композитов. *Прикл. механика*. 2005. Т. 41. № 5. С. 9–21.
7. Boughammoura A. Homogenization of a Highly Heterogeneous Elastic-Viscoelastic Composite Materials. *Mediterranean J. Math*. 2013. Vol. 10. Iss. 4. P. 1793–1812.
8. Zhang Y., Ellyin F., Zhang Y. Nonlinear viscoelastic micromechanical analysis of fibre-reinforced polymer laminates with damage evolution. *Intern. J. Solids and Structures*. 2005. Vol. 42. Iss. 2. P. 591–604.


*Поступила в редакцию 25.06.2018*