

УДК 539.3

ОСНОВНОЕ НАПРЯЖЕННО- ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ДВУХОПОРНЫХ МНОГОСЛОЙНЫХ БАЛОК ПОД ДЕЙСТВИЕМ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ НАГРУЗКИ

ЧАСТЬ 1. ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ

С. Б. Ковальчук, канд. техн. наук

stanislav.kovalchuk@pdaa.edu.ua

А. В. Горик, д-р техн. наук

Полтавская государственная аграрная академия
36003, Украина, г. Полтава,
ул. Сковороды, 1/3

Развитие технологий композитов способствует их широкому внедрению в практику проектирования современных конструкций различного назначения. Достоверное прогнозирование напряженно-деформированного состояния композитных элементов является одним из условий создания надежных конструкций с оптимальными параметрами. Аналитические теории определения напряженно-деформированного состояния многослойных стержней (брусьев, балок) значительно уступают в развитии теориям для композитных плит и оболочек, хотя стержневые элементы конструкций являются самыми распространенными. Цель данной работы – построение аналитической модели изгиба двухопорных многослойных балок под действием сосредоточенной нагрузки на основе полученного ранее решения теории упругости для многослойной консоли. В первой части статьи приведены постановка задачи, принятые предпосылки и основные этапы построения модели изгиба многослойной двухопорной балки с сосредоточенной нагрузкой (нормальная, касательная сила и момент) и закреплениями общего вида в крайних сечениях. При построении модели двухопорная балка была разделена по нагруженному сечению и представлена в виде двух отдельных участков с эквивалентными нагрузками на торцах. С использованием общего решения теории упругости для многослойной консоли с нагрузкой на торцах было описано основное напряженно-деформированное состояние расчетных участков, без учета локальных эффектов изменения напряженного состояния вблизи точек приложения сосредоточенной нагрузки и закреплений. Полученные соотношения содержат 12 неизвестных начальных параметров, для определения которых из условий совместного деформирования (статических и кинематических) расчетных участков построена система алгебраических уравнений. Построенная модель позволяет определять компоненты основного напряженно-деформированного состояния двухопорных балок, состоящих из произвольного количества ортотропных слоев, с учетом податливости их материалов деформациям поперечного сдвига и обжатия.

Ключевые слова: многослойная балка, ортотропный слой, сосредоточенная нагрузка, напряжения, перемещения.

Введение

С развитием технологий композитные материалы находят все более широкое применение в конструкциях различного назначения. Достоверное определение напряженно-деформированного состояния (НДС) композитных элементов различного типа является одним из условий создания прочных и надежных конструкций. Современные численные методы и программные комплексы, построенные на их основе, имеют большой арсенал инструментов для решения этой задачи при выполнении проверочных расчетов. Однако на этапе проектирования и решения задач оптимизации более удобными являются аналитические методы определения НДС композитных элементов.

Отдельным типам композитных, в частности многослойных, элементов, таких, как пластины, плиты и оболочки, посвящено значительное количество научных работ [1–8], в которых построены различные аналитические и численно-аналитические методы определения НДС.

Деформирование композитных стержней (брусьев, балок) исследовано значительно меньше, хотя такие элементы конструкций являются самыми распространенными. Из-за сложности учета неоднородного строения многослойных композитных стержней при построении аналитических теорий их деформирования очень распространены приближенные методы решения задач теории упругости, в частности итерационный метод [9–11]. Несмотря на введение упрощений, построенные по такому методу модели деформирования остаются громоздкими и сложными для практического применения.

Точные решения теории упругости получены лишь для задач изгиба узких консолей с отдельными типами нагрузок [12, 13]. Такие решения достаточно ограничены в части учета различных закреплений и нагрузок. Однако на их основе можно построить сравнительно простые, но достаточно

точные прикладные решения типовых задач изгиба балок.

Целью данной работы является построение аналитической модели изгиба двухопорных композитных многослойных балок под действием сосредоточенной нагрузки, на основе общего решения теории упругости для многослойной консоли с нагрузкой на свободном торце [12].

Основная часть

Рассмотрим общий случай плоского поперечного изгиба прямой многослойной балки под действием сосредоточенной нагрузки, которая в общем случае имеет жесткие крепления, исключающие все перемещения крайних поперечных сечений (рис. 1).

Балка состоит из m параллельных слоев P_k ($k=1,m$), выполненных из различных материалов и жестко связанных на поверхностях контакта. Поперечные сечения (рис. 1, б) вдоль оси балки имеют неизменную структуру и размеры, которые отвечают условию $b = h = l$.

Балка отнесена к декартовой системе координат xuz , начало O которой совпадает с центром жесткости крайнего левого сечения. Ось Ox совпадает с продольной осью жесткости балки, а плоскость xOz – с плоскостью симметрии балки и плоскостью действия внешней нагрузки.

Слои балки выполнены из однородных ортотропных материалов с плоскостями упругой симметрии, параллельными координатным плоскостям. Известны упругие характеристики материалов всех слоев балки, которые для произвольного k -го слоя представлены совокупностью констант

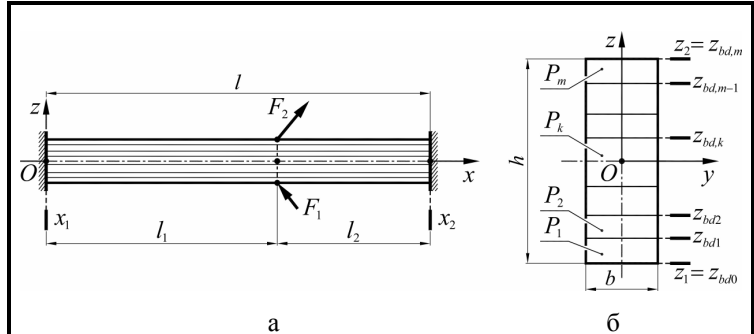


Рис. 1. Двухопорная многослойная балка:
а – схема нагрузки и закреплений;
б – схема поперечного сечения

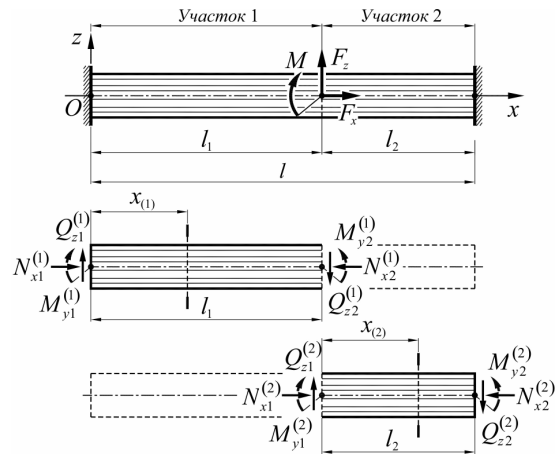


Рис. 2. Расчетная схема балки

$$\|S_a^{[k]}\| = \|E_x^{[k]}, E_y^{[k]}, E_z^{[k]}, G_{xy}^{[k]}, G_{yz}^{[k]}, G_{xz}^{[k]}, \nu_{xy}^{[k]}, \nu_{yx}^{[k]}, \nu_{zy}^{[k]}, \nu_{yz}^{[k]}, \nu_{xz}^{[k]}, \nu_{zx}^{[k]}\|,$$

где $E_x^{[k]}, E_y^{[k]}, E_z^{[k]}$ – модули упругости вдоль координатных осей системы xuz ; $G_{xy}^{[k]}, G_{yz}^{[k]}, G_{xz}^{[k]}$ – модули сдвига в плоскостях параллельных координатным плоскостям; $\nu_{xy}^{[k]}, \dots, \nu_{zx}^{[k]}$ – коэффициенты Пуассона.

Для всей многослойной балки упругие характеристики материала будут кусочно-постоянными функциями $\mu_a^S(z)$, которые аналогично [12] и [13] представим с помощью функций Хевисайда $H(z)$

$$\mu_a^S = \sum_{k=1}^m (S_a^{[k]} (H(z - z_{bd,k-1}) - H(z - z_{bd,k}))) \tag{1}$$

Рассмотрим НДС такой балки при упругой работе материалов ее слоев, пренебрегая локальными искажениями распределения напряжений и перемещений вблизи точек приложения сосредоточенной нагрузки и опорных закреплений. Такой НДС по аналогии с теорией оболочек [14] будем называть основным.

Приведем сосредоточенную нагрузку к оси жесткости балки и представим в виде компонент F_x , F_z и M , приложенных к центру жесткости сечения (рис. 2). Далее разделим балку по нагруженному се-

чению ($x = l_1$) на два расчетных участка, при этом для каждого участка заменим закрепление и отброшенную часть балки соответствующими внутренними силовыми факторами и введем собственную систему отсчета координаты сечения $x_{(i)}$ ($i = 1, 2$ – номер участка).

Если рассматривать участки балки отдельно, то на некотором удалении от крайних сечений их напряженное состояние (НС) будет подобным НС балки-консоли с нагрузкой на торце, для которой в [12] получено точное аналитическое решение. Используя это решение, запишем для i -го расчетного участка соотношения для компонент НДС

$$\sigma_x^{(i)} = \mu_x^E \left(\frac{N_{x1}^{(i)}}{bB_0} + \frac{Q_{z1}^{(i)}}{bB_2} z x_{(i)} + \frac{M_{y1}^{(i)}}{bB_2} z \right), \quad \sigma_z^{(i)} = 0, \quad \tau_{xz}^{(i)} = -\frac{Q_{z1}^{(i)}}{bB_2} \int_{z_1}^z (\mu_x^E z) dz, \quad (2)$$

$$u^{(i)} = \frac{N_{x1}^{(i)}}{bB_0} x_{(i)} - \frac{Q_{z1}^{(i)}}{bB_2} \int_{z_1}^z \left(\frac{1}{\mu_{xz}^G} \int_{z_1}^z (\mu_x^E z) dz - \int_{z_1}^z (\mu_{xz}^v z) dz \right) dz + \frac{Q_{z1}^{(i)}}{bB_2} \left(\frac{1}{2} x_{(i)}^2 z + \frac{D_2}{h} (z - z_1) \right) + \frac{M_{y1}^{(i)}}{bB_2} x_{(i)} z + \frac{u_{11}^{(i)}}{h} (z_2 - z) + \frac{u_{12}^{(i)}}{h} (z - z_1), \quad (3)$$

$$w^{(i)} = -\frac{N_{x1}^{(i)}}{bB_0} \int_{z_1}^z \mu_{xz}^v dz - \frac{Q_{z1}^{(i)}}{bB_2} \left(\frac{1}{6} x_{(i)}^3 + x_{(i)} \int_{z_1}^z (\mu_{xz}^v z) dz + \frac{D_2}{h} x_{(i)} \right) - \frac{M_{y1}^{(i)}}{bB_2} \left(\frac{1}{2} x_{(i)}^2 + \int_{z_1}^z (\mu_{xz}^v z) dz \right) + \frac{u_{11}^{(i)}}{h} x_{(i)} - \frac{u_{12}^{(i)}}{h} x_{(i)} + w_{11}^{(i)}, \quad (4)$$

где $N_{x1}^{(i)}$, $Q_{z1}^{(i)}$, $M_{y1}^{(i)}$ – внутренние силовые факторы в начальном сечении участка i -го участка (рис. 2); $u_{11}^{(i)} = u^{(i)}|_{x_{(i)}=0, z=z_1}$, $u_{12}^{(i)} = u^{(i)}|_{x_{(i)}=0, z=z_2}$, $w_{11}^{(i)} = w^{(i)}|_{x_{(i)}=0, z=z_1}$ – перемещения крайних точек i -го участка (рис. 3, а); $i = 1, 2$ – номер участка балки.

В соотношениях (2)–(4) использованы следующие обозначения интегральных характеристик жесткости сечения:

$$B_0 = \int_{z_1}^{z_2} \mu_x^E dz, \quad B_1 = \int_{z_1}^{z_2} (\mu_x^E z) dz, \quad B_2 = \int_{z_1}^{z_2} \int_{z_1}^z (\mu_x^E z) dz dz, \quad D_2 = \int_{z_1}^{z_2} \left(\frac{1}{\mu_{xz}^G} \int_{z_1}^z (\mu_x^E z) dz - \int_{z_1}^z (\mu_{xz}^v z) dz \right) dz.$$

Решения (2)–(4) получены для главной системы координат xuz , в которой выполняется условие $B_1 = 0$. Положение начала такой системы относительно произвольной параллельной вспомогательной системы координат xzy' определяется соотношением

$$z_{B_1} = B'_1 / B'_0,$$

где B'_1 , B'_0 – характеристики, определяемые в произвольной вспомогательной системе координат xzy' .

Внутренние силовые факторы в пределах i -го участка связаны с их начальными значениями соотношениями

$$N_x^{(i)} = N_{x1}^{(i)}, \quad Q_z^{(i)} = Q_{z1}^{(i)}, \quad M_y^{(i)} = Q_{z1}^{(i)} x_{(i)} + M_{y1}^{(i)}. \quad (5)$$

Для всей балки выражения для компонент НДС и внутренних силовых факторов можно объединить с использованием функции Хевисайда

$$f = f^{(1)}|_{x_{(1)}=x} (1 - H(x - l_1)) + f^{(2)}|_{x_{(2)}=x-l_1} H(x - l_1), \quad (6)$$

где $f^{(1)}$, $f^{(2)}$ – распределение компоненты НДС на первом и втором расчетных участках соответственно.

Соотношения (2)–(4) содержат 6 неизвестных постоянных: 3 – внутренних силовых фактора в начальном сечении (статические начальные параметры), 3 – перемещения точек в начальном сечении (кинематические начальные параметры). С помощью этих неизвестных можно задать перемещения 4 точек расчетного участка балки, что позволяет моделировать различные ограничения перемещений его крайних сечений.

Для двух расчетных участков рассматриваемой балки в общем случае

будем иметь 12 неизвестных постоянных. Такое количество недостаточно для точного выполнения условий совместности перемещений соседних расчетных участков балки ($u^{(1)}|_{x(1)=l_1} = u^{(2)}|_{x(2)=0}$, $w^{(1)}|_{x(1)=l_1} = w^{(2)}|_{x(2)=0}$), как и абсолютно жесткого закрепления ее торцов ($(u^{(1)}, w^{(1)})|_{x(1)=0} = 0$, $(u^{(2)}, w^{(2)})|_{x(2)=l_2} = 0$).

Поэтому кинематические условия на границе раздела расчетных участков балки будем описывать упрощенно, совместив перемещения только крайних точек сечения согласно схеме на рис. 3, б.

В таком случае будем иметь следующую систему кинематических условий совместного деформирования расчетных участков балки:

$$u^{(1)}|_{x(1)=l_1, z=z_1} = u^{(2)}|_{x(2)=0, z=z_1}, \quad w^{(1)}|_{x(1)=l_1, z=z_1} = w^{(2)}|_{x(2)=0, z=z_1}, \quad u^{(1)}|_{x(1)=l_1, z=z_2} = u^{(2)}|_{x(2)=0, z=z_2},$$

или, с учетом принятых обозначений

$$u_{21}^{(1)} = u_{11}^{(2)}, \quad w_{21}^{(1)} = w_{11}^{(2)}, \quad u_{22}^{(1)} = u_{12}^{(2)}. \quad (7)$$

Кроме совместности перемещений участков балки, интегрально обеспечим и совместимость компонент НС. Для этого на границе раздела участков потребуем равенства внутренних силовых факторов с учетом действующей сосредоточенной нагрузки

$$N_{x1}^{(2)} = N_{x1}^{(1)} - F_x, \quad Q_{z1}^{(2)} = Q_{z1}^{(1)} + F_z, \quad M_{y1}^{(2)} = l_1 Q_{z1}^{(1)} + M_{y1}^{(1)} + M. \quad (8)$$

С использованием условий (7), (8) и соотношений (3)–(5) построим систему уравнений для определения всех неизвестных постоянных в решении (2)–(4).

Для этого переменные $x(i)$ и z в соотношениях (3)–(5) заменим значениями $x(i) = l_i$, $z = z_1, z_2$

$$N_{x2}^{(i)} = N_{x1}^{(i)}, \quad Q_{z2}^{(i)} = Q_{z1}^{(i)}, \quad M_{y2}^{(i)} = l_i Q_{z1}^{(i)} + M_{y1}^{(i)},$$

$$u_{21}^{(i)} = \frac{l_i}{bB_0} N_{x1}^{(i)} + \frac{z_1 l_i^2}{2bB_2} Q_{z1}^{(i)} + \frac{z_1 l_i}{bB_2} M_{y1}^{(i)} + u_{11}^{(i)},$$

$$u_{22}^{(i)} = \frac{l_i}{bB_0} N_{x1}^{(i)} + \frac{z_2 l_i^2}{2bB_2} Q_{z1}^{(i)} + \frac{z_2 l_i}{bB_2} M_{y1}^{(i)} + u_{12}^{(i)}, \quad (9)$$

$$w_{21}^{(i)} = -\frac{hl_i^3 + 6D_2 l_i}{6hbB_2} Q_{z1}^{(i)} - \frac{l_i^2}{2bB_2} M_{y1}^{(i)} + \frac{l_i}{h} u_{11}^{(i)} - \frac{l_i}{h} u_{12}^{(i)} + w_{11}^{(i)},$$

где $u_{21}^{(i)} = u^{(i)}|_{x(i)=l_i, z=z_1}$, $u_{22}^{(i)} = u^{(i)}|_{x(i)=l_i, z=z_2}$, $w_{21}^{(i)} = w^{(i)}|_{x(i)=l_i, z=z_1}$, $i = 1, 2$.

Подставив (7) и (8) в (9), после преобразований получим такую систему соотношений между начальными ($N_{x1}^{(1)}, Q_{z1}^{(1)}, M_{y1}^{(1)}, u_{11}^{(1)}, w_{11}^{(1)}, u_{12}^{(1)}$) и конечными ($N_{x2}^{(2)}, Q_{z2}^{(2)}, M_{y2}^{(2)}, u_{21}^{(2)}, w_{21}^{(2)}, u_{22}^{(2)}$) параметрами расчетных участков балки:

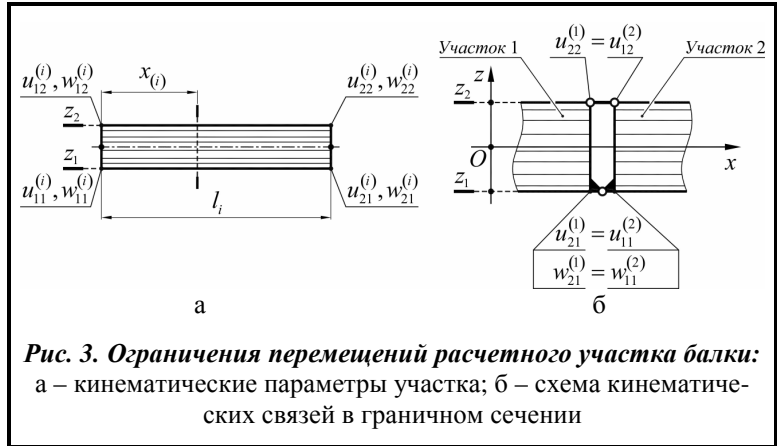


Рис. 3. Ограничения перемещений расчетного участка балки: а – кинематические параметры участка; б – схема кинематических связей в граничном сечении

$$\begin{aligned}
N_{x2}^{(2)} &= N_{x1}^{(1)} - F_x; \quad Q_{z2}^{(2)} = Q_{z1}^{(1)} + F_z; \quad M_{y2}^{(2)} = lQ_{z1}^{(1)} + M_{y1}^{(1)} + l_2F_z + M; \\
u_{21}^{(2)} &= \frac{l}{bB_0} N_{x1}^{(1)} + \frac{z_1 l^2}{2bB_2} Q_{z1}^{(1)} + \frac{z_1 l}{bB_2} M_{y1}^{(1)} + u_{11}^{(1)} - \frac{l_2 F_x}{bB_0} + \frac{z_1 l_2^2 F_z}{2bB_2} + \frac{z_1 l_2 M}{bB_2}; \\
u_{22}^{(2)} &= \frac{l}{bB_0} N_{x1}^{(1)} + \frac{z_2 l^2}{2bB_2} Q_{z1}^{(1)} + \frac{z_2 l}{bB_2} M_{y1}^{(1)} + u_{12}^{(1)} - \frac{l_2 F_x}{bB_0} + \frac{z_2 l_2^2 F_z}{2bB_2} + \frac{z_2 l_2 M}{bB_2}; \\
w_{21}^{(2)} &= -\frac{hl^3 + 6D_2 l}{6hbB_2} Q_{z1}^{(1)} - \frac{l^2}{2bB_2} M_{y1}^{(1)} + \frac{l}{h} u_{11}^{(1)} - \frac{l}{h} u_{12}^{(1)} + w_{11}^{(1)} - \frac{hl_2^3 + 6D_2 l_2}{6hbB_2} F_z - \frac{l_2^2 M}{2bB_2}.
\end{aligned} \tag{10}$$

Обсуждение результатов

Система (10) состоит из 6 уравнений, которые вместе содержат 12 статических и кинематических параметров. В каждом конкретном случае закрепления концов балки значения 6 параметров будут известны или могут быть выражены через другие параметры и известные величины. Это позволяет привести исходную систему (10) к корректному виду и определить оставшиеся неизвестными статические и кинематические параметры.

Полученные решением системы (10) начальные параметры первого участка являются исходными данными для определения начальных параметров второго участка по соотношениям (7)–(9)

$$\begin{aligned}
N_{x1}^{(2)} &= N_{x1}^{(1)} - F_x, \quad Q_{z1}^{(2)} = Q_{z1}^{(1)} + F_z, \quad M_{y1}^{(2)} = l_1 Q_{z1}^{(1)} + M_{y1}^{(1)} + M, \\
u_{11}^{(2)} &= \frac{l_1}{bB_0} N_{x1}^{(1)} + \frac{z_1 l_1^2}{2bB_2} Q_{z1}^{(1)} + \frac{z_1 l_1}{bB_2} M_{y1}^{(1)} + u_{11}^{(1)}, \\
u_{12}^{(2)} &= \frac{l_1}{bB_0} N_{x1}^{(1)} + \frac{z_2 l_1^2}{2bB_2} Q_{z1}^{(1)} + \frac{z_2 l_1}{bB_2} M_{y1}^{(1)} + u_{12}^{(1)}, \\
w_{11}^{(2)} &= -\frac{hl_1^3 + 6D_2 l_1}{6hbB_2} Q_{z1}^{(1)} - \frac{l_1^2}{2bB_2} M_{y1}^{(1)} + \frac{l_1}{h} u_{11}^{(1)} - \frac{l_1}{h} u_{12}^{(1)} + w_{11}^{(1)}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Подстановка известных и определенных с использованием (10) и (11), начальных параметров в исходные соотношения (2)–(4) позволяет получить выражения для компонент основного НДС всех расчетных участков балки. В дальнейшем решения для расчетных участков с помощью (6) можно объединить в общие выражения для всей многослойной балки.

Выводы

Таким образом, построена аналитическая модель плоского изгиба двухопорных многослойных балок под действием сосредоточенной нагрузки, которую составляют соотношения (2)–(4), (10) и (11). Модель позволяет определять компоненты основного НДС многослойных балок, состоящих из произвольного количества ортотропных слоев, с учетом податливости их материалов деформациям поперечного сдвига и обжатия.

Полученные соотношения можно использовать для решения задач деформирования многослойных балок с различными комбинациями закреплений крайних сечений.

Примененный для построения модели подход можно обобщить и расширить на случай многопролетных балок с произвольным количеством сосредоточенных сил и промежуточных опор, а также для балок с различной жесткостью расчетных участков.

Литература

1. Альтенбах Х. Основные направления теории многослойных тонкостенных конструкций. Обзор. *Механика композит. материалов*. 1998. №3. С. 333–348.
2. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360 с.
3. Болотин В. В., Новичков Ю. Н. Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1980. 374 с.
4. Васильев В. В. Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 272 с.

5. Григолюк Э. И., Селезов И. Т. Неклассическая теория колебаний стержней, пластин и оболочек. Итоги науки и техники. М.: Наука, 1972. Т.5. 271 с.
6. Гузь А. Н., Григоренко Я. М., Ванин Г. А., Бабич И. Ю. Механика элементов конструкций: В 3 т. Т. 2: Механика композитных материалов и элементов конструкций. Киев: Наук. думка, 1983. 484 с.
7. Малмейстер А. К., Тамуж В. П., Тетерс Г. А. Соппротивление полимерных и композитных материалов. Рига: Зинатне, 1980. 572 с.
8. Рассказов А. О., Соколовская И. И., Шульга Н. А. Теория и расчет слоистых ортотропных пластин и оболочек. Киев: Вища шк., 1987. 200 с.
9. Пискунов В. Г. Итерационная аналитическая теория в механике слоистых композитных систем. *Механика композит. материалов*. 2003. Т. 39. №1. С. 2–24.
10. Горик О. В., Пискунов В. Г., Чередников В. М. Механіка деформування композитних брусків. Полтава – Київ: АСМІ, 2008. 402 с.
11. Goryk A. V. Modeling Transverse Compression of Cylindrical Bodies in Bending. *Intern. Appl. Mech.* 2001. Vol. 37. Iss. 9. P. 1210–1221.
12. Goryk A. V., Koval'chuk S. B. Elasticity theory solution of the problem on plane bending of a narrow layered cantilever bar by loads at its end. *Mech. Composite Materials*. 2018. Vol. 54. Iss. 2. P. 179–190.
13. Goryk A. V. Koval'chuk S.B. Solution of a Transverse Plane Bending Problem of a Laminated Cantilever Beam Under the Action of a Normal Uniform Load. *Strength Materials*. 2018. Vol. 50. Iss. 3. P. 406–418.
14. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.

Поступила в редакцию 26.09.2018