

УДК 539.3

ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНО- ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ШАРУ З ПОВЗДОВЖНЬОЮ ЦИЛІНДРИЧНОЮ ТОВСТОСТІННОЮ ТРУБОЮ ТА ЗАДАНИМИ НА МЕЖАХ ШАРУ ПЕРЕМІЩЕННЯМИ

В. Ю. Мірошніков,

канд. техн. наук

m0672628781@gmail.com

ORCID: 0000-0002-9491-0181

Харківський національний
університет будівництва та
архітектури,
61002, Україна, м. Харків,
вул. Сумська, 40

Запропоновано аналітико-числовий підхід до розв'язання просторової задачі теорії пружності для шару з круговою циліндричною трубою. Циліндрична порожня товстостінна труба розташована всередині шару паралельно його поверхням та жорстко з ним скріплена. Необхідно дослідити напружено-деформований стан пружних тіл шару та труби. На внутрішній поверхні труби задані напруження, на межах шару – переміщення. Розв'язок просторової задачі теорії пружності отримано узагальненим методом Фур'є стосовно системи рівнянь Ламе в циліндричних координатах, пов'язаних із трубою, та в декартових координатах, пов'язаних із межами шару. Нескінченні системи лінійних алгебраїчних рівнянь, які отримані в результаті задоволення граничних умов та умов сполучення, розв'язано методом зрізання. В результаті отримані переміщення та напруження в різних точках пружного шару та пружної труби. Завдяки підбраному параметру зрізання для заданих геометричних характеристик виконання граничних умов доведено до 10^{-3} . Проведено аналіз напружено-деформованого стану тіла за різних товщин труби, а також за різних відстаней від труби до меж шару. Подані графіки нормальних та дотичних напружень на межі труби та шару, а також нормальні напруження на внутрішній поверхні труби. Вказані графіки напружень свідчать про те, що у разі наближення труби до верхньої межі шару напруження в тілі шару та в тілі труби зростають, у разі зменшення товщини труби напруження в тілі шару зменшуються, а в тілі труби зростають. Запропонований метод може використовуватись для розрахунку конструкцій та деталей, розрахункові схеми яких співпадають з постановкою задачі даної роботи. Наведений аналіз напруженого стану труби може бути використаний для підбору геометричних параметрів конструкції, що проектується, а графік напружень на межі труби та шару – для аналізу міцності з'єднання.

Ключові слова: товстостінна труба в шарі, рівняння Ламе, узагальнений метод Фур'є.

Вступ

Під час проектування композитних конструкцій та деталей, розрахунковою схемою яких є шар з вбудованою поздовжньою круглою трубою, необхідно мати уявлення про напружено-деформований стан шару та труби, а також напруження в місті їх з'єднання. Для досягнення цієї мети потрібен метод розрахунку, який би давав можливість отримувати результат з необхідною точністю.

В більшості публікацій розглядається пластина або шар з поперечною круговою порожниною або включенням [1, 2]. Однак методи, які в них використовуються, не можуть бути застосовані для шару з поздовжньою порожниною чи включенням.

В роботах [3–5] для шару з поздовжньою циліндричною порожниною або включенням на основі методу розкладання в ряди Фур'є розглянуті стаціонарні задачі дифракції хвиль та визначення напружень. Задача для шару з круговою порожниною, перпендикулярною до границь шару, яка розв'язується за допомогою методу суперпозиції загальних розв'язків, розглянута в [6].

В роботі [7] за допомогою методу зображень розв'язана крайова задача дифракції симетричних нормальних хвиль поздовжнього зсуву для шару з циліндричною порожниною чи включенням.

В зазначеній роботі використовується аналітико-числовий підхід, що базується на узагальненому методі Фур'є [8]. На основі цього методу також розв'язані задачі для півпростору з циліндричною порожниною або включенням [9–13], а також для циліндра з циліндричними включеннями [14].

Постановка задачі

В пружному однорідному шарі розташована кругова циліндрична товстостінна труба зовнішнім радіусом R_1 та внутрішнім радіусом R_2 (рис. 1).

Трубу будемо розглядати у циліндричній системі координат (ρ, φ, z) , межі шару у декартовій системі координат (x, y, z) , яка однаково орієнтована та поєднана з системою координат труби (рис. 1).

© В. Ю. Мірошніков, 2019

Верхня межа шару розташована на відстані $y=h$, нижня – на відстані $y=-\tilde{h}$. Потрібно знайти розв’язок рівняння Ламе за умов, що на межах шару задані переміщення $\vec{U}_1(x, z)|_{y=h} = \vec{U}_h^0(x, z)$, $\vec{U}_1(x, z)|_{y=-\tilde{h}} = \vec{U}_{\tilde{h}}^0(x, z)$, на внутрішній поверхні труби – напруження $F\vec{U}_2(\varphi, z)|_{\rho=R_2} = \vec{F}_R^0(\varphi, z)$, а на межі труби та шару – умови сполучення

$$\vec{U}_1(\varphi, z)|_{\rho=R_1} = \vec{U}_2(\varphi, z)|_{\rho=R_1}, \quad (1)$$

$$F\vec{U}_1(\varphi, z)|_{\rho=R_1} = F\vec{U}_2(\varphi, z)|_{\rho=R_1}, \quad (2)$$

де \vec{U}_1 – переміщення в шарі; \vec{U}_2 – переміщення в трубі;

$F\vec{U} = 2 \cdot G \cdot \left[\frac{\sigma}{1-2 \cdot \sigma} \vec{n} \cdot \text{div} \vec{U} + \frac{\partial}{\partial n} \vec{U} + \frac{1}{2} (\vec{n} \times \text{rot} \vec{U}) \right]$ – оператор напруження;

$$\vec{U}_h^0(x, z) = U_x^{(h)} \vec{e}_1^{(1)} + U_y^{(h)} \vec{e}_2^{(1)} + U_z^{(h)} \vec{e}_3^{(1)},$$

$$\vec{U}_{\tilde{h}}^0(x, z) = U_x^{(\tilde{h})} \vec{e}_1^{(1)} + U_y^{(\tilde{h})} \vec{e}_2^{(1)} + U_z^{(\tilde{h})} \vec{e}_3^{(1)}, \quad (3)$$

$$\vec{F}_R^0(\varphi, z) = \sigma_\rho^{(p)} \vec{e}_1^{(2)} + \tau_{\rho\varphi}^{(p)} \vec{e}_2^{(2)} + \tau_{\rho z}^{(p)} \vec{e}_3^{(2)}$$

відомі функції; $\vec{e}_j^{(k)}$, ($j=1,2,3$) – орти декартової ($k=1$) і циліндричної ($k=2$) систем координат; σ , G – пружні константи.

Усі задані вектори і функції будемо вважати швидко спадними до нуля на далеких відстанях від початку координат за координатою z для труби та координатами x і z для меж шару.

Розв’язання задачі

Виберемо базисні розв’язки рівняння Ламе для зазначених систем координат у вигляді [8]

$$\vec{u}_k^\pm(x, y, z; \lambda, \mu) = N_k^{(d)} e^{i(\lambda z + \mu x) \pm \gamma y};$$

$$\vec{R}_{k,m}(\rho, \varphi, z; \lambda) = N_k^{(p)} I_m(\lambda \rho) e^{i(\lambda z + m\varphi)}; \quad (4)$$

$$\vec{S}_{k,m}(\rho, \varphi, z; \lambda) = N_k^{(p)} \left[(\text{sign } \lambda)^m K_m(|\lambda| \rho) \cdot e^{i(\lambda z + m\varphi)} \right]; k=1,2,3;$$

$$N_1^{(d)} = \frac{1}{\lambda} \nabla; \quad N_2^{(d)} = \frac{4}{\lambda} (\sigma - 1) \vec{e}_2^{(1)} + \frac{1}{\lambda} \nabla(y \cdot); \quad N_3^{(d)} = \frac{i}{\lambda} \text{rot}(\vec{e}_3^{(1)} \cdot); \quad N_1^{(p)} = \frac{1}{\lambda} \nabla;$$

$$N_2^{(p)} = \frac{1}{\lambda} \left[\nabla \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + 4(\sigma - 1) \left(\nabla - \vec{e}_3^{(2)} \frac{\partial}{\partial z} \right) \right]; \quad N_3^{(p)} = \frac{i}{\lambda} \text{rot}(\vec{e}_3^{(2)} \cdot); \quad \gamma = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}, \quad -\infty < \lambda, \mu < \infty,$$

де σ – коефіцієнт Пуассона; $I_m(x)$, $K_m(x)$ – модифіковані функції Бесселя; $\vec{R}_{k,m}$, $\vec{S}_{k,m}$, $k=1, 2, 3$ – відповідно внутрішні та зовнішні розв’язки рівняння Ламе для циліндра; $\vec{u}_k^{(-)}$, $\vec{u}_k^{(+)}$ – розв’язки рівняння Ламе для шару.

Розв’язок задачі подамо у вигляді

$$\vec{U}_1 = \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_{k,m}(\lambda) \cdot \vec{S}_{k,m}(\rho, \varphi, z; \lambda) d\lambda + \quad (5)$$

$$+ \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (H_k(\lambda, \mu) \cdot \vec{u}_k^{(+)}(x, y, z; \lambda, \mu) + \tilde{H}_k(\lambda, \mu) \cdot \vec{u}_k^{(-)}(x, y, z; \lambda, \mu)) d\mu d\lambda,$$

$$\vec{U}_2 = \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_{k,m}(\lambda) \cdot \vec{R}_{k,m}(\rho, \varphi, z; \lambda) + \tilde{A}_{k,m}(\lambda) \cdot \vec{S}_{k,m}(\rho, \varphi, z; \lambda) d\lambda, \quad (6)$$

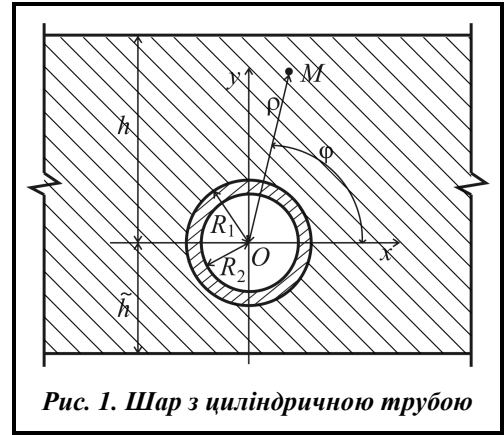


Рис. 1. Шар з циліндричною трубою

де $\bar{S}_{k,m}(\rho, \varphi, z; \lambda)$, $\bar{R}_{k,m}(\rho, \varphi, z; \lambda)$ $\bar{u}_k^{(+)}(x, y, z; \lambda, \mu)$ і $\bar{u}_k^{(-)}(x, y, z; \lambda, \mu)$ – базисні розв'язки, які задані формулами (4), а невідомі функції $H_k(\lambda, \mu)$, $\tilde{H}_k(\lambda, \mu)$, $B_{k,m}(\lambda)$, $A_{k,m}(\lambda)$ і $\tilde{A}_{k,m}(\lambda)$ необхідно знайти із крайових умов (3) та умов спряження (1) і (2).

Для переходу між системами координат (рис. 1) скористаємось формулами

– для переходу від розв'язків $\bar{S}_{k,m}$ циліндричної системи координат до розв'язків шару $\bar{u}_k^{(-)}$ (при $y > 0$) та $\bar{u}_k^{(+)}$ (при $y < 0$)

$$\begin{aligned}\bar{S}_{k,m}(\rho, \varphi, z; \lambda) &= \frac{(-i)^m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega_{\mp}^m \cdot \bar{u}_k^{(\mp)} \cdot \frac{d\mu}{\gamma}, \quad k=1, 3; \\ \bar{S}_{2,m}(\rho, \varphi, z; \lambda) &= \frac{(-i)^m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega_{\mp}^m \cdot \left(\left(\pm m \cdot \mu - \frac{\lambda^2}{\gamma} \right) \bar{u}_1^{(\mp)} - \lambda^2 \bar{u}_2^{(\mp)} \pm \right. \\ &\quad \left. \pm 4\mu(1-\sigma) \bar{u}_3^{(\mp)} \right) \frac{d\mu}{\gamma^2},\end{aligned}\quad (7)$$

де $\gamma = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$, $\omega_{\mp}(\lambda, \mu) = \frac{\mu \mp \gamma}{\lambda}$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$;

– для переходу від розв'язків $\bar{u}_k^{(+)}$ та $\bar{u}_k^{(-)}$ шару до розв'язків $\bar{R}_{k,m}$ циліндричної системи координат

$$\begin{aligned}\bar{u}_k^{(\pm)}(x, y, z) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} (i \cdot \omega_{\mp})^m \bar{R}_{k,m}, \quad (k=1, 3); \\ \bar{u}_2^{(\pm)}(x, y, z) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[(i \cdot \omega_{\mp})^m \cdot \lambda^{-2} \left((m \cdot \mu) \cdot \bar{R}_{1,m} \pm \gamma \cdot \bar{R}_{2,m} + 4\mu(1-\sigma) \bar{R}_{3,m} \right) \right],\end{aligned}\quad (8)$$

де $\bar{R}_{k,m} = \tilde{b}_{k,m}(\rho, \lambda) \cdot e^{i(m\varphi + \lambda z)}$; $\tilde{b}_{1,n}(\rho, \lambda) = \bar{e}_{\rho} \cdot I'_n(\lambda\rho) + i \cdot I_n(\lambda\rho) \cdot \left(\bar{e}_{\varphi} \frac{n}{\lambda\rho} + \bar{e}_z \right)$;

$$\begin{aligned}\tilde{b}_{2,n}(\rho, \lambda) &= \bar{e}_{\rho} \cdot \left[(4\sigma - 3) \cdot I'_n(\lambda\rho) + \lambda\rho I''_n(\lambda\rho) \right] + \\ &+ \bar{e}_{\varphi} i \cdot m \left(I'_n(\lambda\rho) + \frac{4(\sigma-1)}{\lambda\rho} I_n(\lambda\rho) \right) + \bar{e}_z i \lambda \rho I'_n(\lambda\rho);\end{aligned}$$

$$\tilde{b}_{3,n}(\rho, \lambda) = - \left[\bar{e}_{\rho} \cdot I_n(\lambda\rho) \frac{n}{\lambda\rho} + \bar{e}_{\varphi} \cdot i \cdot I'_n(\lambda\rho) \right],$$

\bar{e}_{ρ} , \bar{e}_{φ} , \bar{e}_z – орти в циліндричній системі координат.

Для виконання граничних умов на межах шару $y=h$ та $y=-\tilde{h}$, вектори $\bar{S}_{k,m}$ в (5), за допомогою формул переходу (7), перепишемо у декартовій системі координат через базисні розв'язки відповідно $\bar{u}_k^{(-)}$ та $\bar{u}_k^{(+)}$. Отримані вектори (при $y=h$, та $y=-\tilde{h}$) прирівняємо заданим $\bar{U}_h^0(x, z)$ та $\bar{U}_{\tilde{h}}^0(x, z)$, поданим через подвійний інтеграл Фур'є.

Отримана система з 6 рівнянь має визначник

$$\frac{4 \cdot e^{-x} \cdot \gamma^2 \cdot (e^{2x} - 1) (x^2 - \bar{\sigma}^2 \cdot \text{sh}^2 x)}{\lambda^4},$$

де $x = \gamma(h + \tilde{h})$, $\bar{\sigma} = 3 - 4\sigma$.

З отриманих рівнянь знайдемо функції $H_k(\lambda, \mu)$ і $\tilde{H}_k(\lambda, \mu)$ через $B_{k,m}(\lambda)$.

Для урахування умов спряження (1) розкладемо в (5) базисні розв'язки $\bar{u}_k^{(\pm)}$ за допомогою (8) по розв'язках $\bar{R}_{k,m}$. Після цього прирівняємо в них $\rho=R_1$. Цим буде виконана умова (1).

Для урахування умов сполучення (2) знайдемо вектори $F\bar{U}_1$ та $F\bar{U}_2$ від розв'язку (6) і розкладеного через $\bar{u}_k^{(\pm)}$ розв'язку (5). Прирівняємо в них $\rho=R_1$. Цим буде виконана умова (2).

Ці дві умови дають 6 рівнянь, зв'язуючи між собою всі невідомі в рівностях (5), (6).

Ще три рівняння дає умова на внутрішній поверхні труби, для виконання граничних умов на якій застосуємо оператор напруження до правої частини (6) та прирівняємо (при $\rho=R_2$) заданому $\bar{F}_R^0(\varphi, z)$, поданому інтегралом та рядом Фур'є.

З цієї системи 9 рівнянь виключимо знайдені раніше функції $H_k(\lambda, \mu)$ і $\tilde{H}_k(\lambda, \mu)$ через $B_{k,m}(\lambda)$. Звільнившись від рядів за m та інтегралів за λ , отримаємо сукупність дев'яти нескінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення невідомих $A_{k,m}(\lambda)$, $\tilde{A}_{k,m}(\lambda)$ і $B_{k,m}(\lambda)$.

До отриманих нескінченних систем рівнянь будемо застосовувати метод зрізання. Числові дослідження показали, що визначник зрізаної системи не обертається на нуль ні за якого m , для $0 \leq m \leq 10$, як наслідок, ця система рівнянь має єдиний розв'язок.

Розв'язавши цю систему, знайдемо невідомі $A_{k,m}(\lambda)$, $\tilde{A}_{k,m}(\lambda)$ і $B_{k,m}(\lambda)$.

Знайдені з нескінченної системи рівнянь функції $B_{s,m}(\lambda)$ підставимо у вирази для $H_k(\lambda, \mu)$ і $\tilde{H}_k(\lambda, \mu)$. Цим будуть визначені всі невідомі задачі.

Числові дослідження напруженого стану

Маємо шар з повздовжньою циліндричною трубою (рис. 1). Шар та труба – ізотропні матеріали, для шару коефіцієнт Пуассона $\sigma_1=0,38$, модуль пружності $E_1=1700$ Н/мм², для труби коефіцієнт Пуассона $\sigma_2=0,21$, модуль пружності $E_2=200000$ Н/мм². Зовнішній радіус труби $R_1=10$ мм, внутрішній розраховувався в двох варіантах $R_2=6$ мм та $R_2=8$ мм. Товщина шару $h + \tilde{h}=60$ мм. Відстань від верхньої межі шару до центру труби розраховувалась у двох варіантах $h=30$ мм, та $h=20$ мм.

На верхній межі шару задані переміщення $U_y^{(h)}(x, z) = -10^8 \cdot (z^2 + 10^2)^{-2} \cdot (x^2 + 10^2)^{-2}$, $U_x^{(h)} = U_z^{(h)} = 0$, на нижній межі шару – переміщення $U_x^{(\tilde{h})} = U_y^{(\tilde{h})} = U_z^{(\tilde{h})} = 0$. На внутрішній поверхні труби задані напруження $\sigma_\rho^{(p)} = \tau_{\rho\varphi}^{(p)} = \tau_{\rho z}^{(p)} = 0$.

Розв'язувалась скінченна система рівнянь порядку $m=10$. Обчислення інтегралів виконано за допомогою квадратурних формул Філона (для коливних функцій) та Сімпсона (для функцій без коливань). Точність виконання граничних умов за вказаних значень геометричних параметрів 10^{-3} .

На верхній межі шару, при $z=0$, максимальне напруження σ_ρ становить: при $h=30$ мм, $R_2=6$ мм $\sigma_\rho = -246,42$ Н/мм²; при $h=20$ мм, $R_2=6$ мм $\sigma_\rho = -283,29$ Н/мм²; при $h=30$ мм, $R_2=8$ мм $\sigma_\rho = -244,71$ Н/мм²; при $h=20$ мм, $R_2=8$ мм $\sigma_\rho = -272,25$ Н/мм². Це свідчить про те, що з наближенням циліндричної труби до межі шару напруження σ_ρ на поверхні шару зростають, а зі зменшенням товщини труби ці напруження зменшуються.

На рис. 2 наведені напруження (в Н/мм²) на межі труби та шару в площині $z=0$ в тілі шару. Напруження σ_ρ , σ_φ при $3\pi/4 < \varphi < \pi/4$, та $\tau_{\rho z}$ при $\varphi > \pi$ мають невеликі значення, тому на графіку не показані. Графік напружень σ_z має такий же вигляд, як і графік напружень σ_φ та мало відрізняється в значеннях.

Напруження σ_ρ , σ_φ на межі труби та шару (рис. 2, а, б) зростають з наближенням труби до верхньої межі шару (лінія 1 переходить в лінію 2, лінія 3 – в лінію 4). Зі зменшенням товщини труби напруження зменшуються (лінія 1 переходить в лінію 3, лінія 2 – в лінію 4). Дотичні напруження на межі труби та шару $\tau_{\rho z}$ (рис. 2, в) майже не залежать від товщини труби (на графіку співпадають лінії 1 і 3 та лінії 2 і 4), натомість з наближенням труби до верхньої межі шару ці напруження зростають (лінія 1 переходить в лінію 2).

На рис. 3 наведені напруження (в Н/мм²) на межі труби та шару в площині $z=0$ в тілі труби. Вони суттєво відрізняються від напружень в тілі шару, що є наслідком різних матеріалів шару та труби.

З наближенням труби до верхньої межі шару або зі зменшенням товщини труби напруження σ_ϕ на зовнішній поверхні труби (рис. 3, а) зростають.

Напруження σ_z в верхній частині труби (рис. 3, б, $\phi=0.. \pi$) змінюються за таким самим принципом, як і напруження σ_ϕ . В нижній частині труби зі зменшенням її товщини напруження σ_z зменшуються (лінія 1 переходить в лінію 3, лінія 2 – в лінію 4).

На рис. 4 наведені напруження σ_ϕ і σ_z (в Н/мм²) на внутрішній поверхні труби в площині $z=0$.

Напруження σ_ϕ (рис. 4, а) по всьому радіусу, в порівнянні з напруженнями на зовнішній поверхні труби, мають протилежні по знаку значення. Напруження σ_z (рис. 4, б), в порівнянні з напруженнями на зовнішній поверхні, в верхній частині труби мають протилежні за знаком значення, а в нижній частині труби збільшуються зі зменшенням товщини труби або наближенням труби до верхньої межі.

З наближенням труби до верхньої межі або зі зменшенням товщини труби напруження σ_ϕ і σ_z зростають.

На рис. 5 наведені напруження σ_r , σ_ϕ , та τ_{rz} (в Н/мм²) вздовж осі z на межі труби та шару (в тілі шару) при $\phi=\pi/2$. Графік напружень σ_z має такий же вигляд, як і графік напружень σ_ϕ та мало відрізняється в значеннях.

Із рис. 5, а і 5, б видно що з наближенням труби до верхньої межі шару напруження σ_r та σ_ϕ вздовж осі z , крім від'ємних значень, мають також додатні величини. Напруження τ_{rz} на межі труби та шару (рис. 5, в) не залежать від товщини труби (лінія 3 співпадає з лінією 1, лінія 4 – з лінією 2).

На рис. 6 наведені напруження σ_ϕ та σ_z (в Н/мм²) вздовж осі z на межі труби та шару (в тілі труби) при $\phi=\pi/2$.

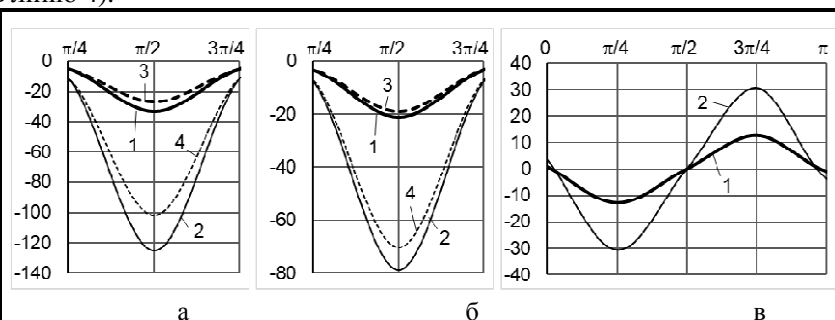


Рис. 2. Напруження на межі труби та шару (в тілі шару):

а – σ_r ; б – σ_ϕ ; в – τ_{rz} ;

1 – при $h=30$ мм, $R_2=6$ мм; 2 – при $h=20$ мм, $R_2=6$ мм;
3 – при $h=30$ мм, $R_2=8$ мм; 4 – при $h=20$ мм, $R_2=8$ мм

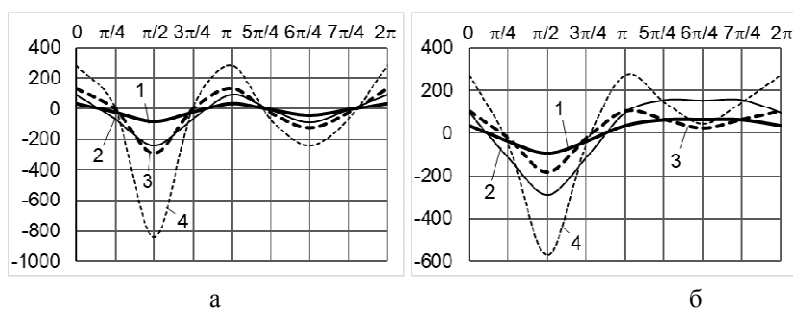


Рис. 3. Напруження на межі труби та шару (в тілі труби):

а – σ_ϕ ; б – σ_z ;

1 – при $h=30$ мм, $R_2=6$ мм; 2 – при $h=20$ мм, $R_2=6$ мм;
3 – при $h=30$ мм, $R_2=8$ мм; 4 – при $h=20$ мм, $R_2=8$ мм

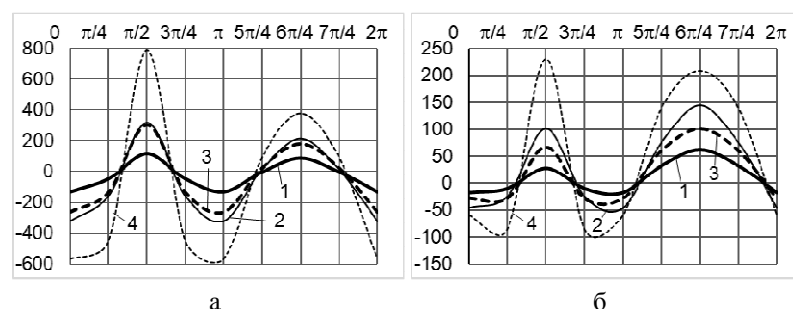


Рис. 4. Напруження на внутрішній поверхні труби:

а – σ_ϕ ; б – σ_z ;

1 – при $h=30$ мм, $R_2=6$ мм; 2 – при $h=20$ мм, $R_2=6$ мм;
3 – при $h=30$ мм, $R_2=8$ мм; 4 – при $h=20$ мм, $R_2=8$ мм

Із рис. 6, а видно, що напруження σ_ϕ на межі труби та шару в тілі труби, незалежно від відстані труби до верхньої межі шару, мають постійно від'ємні значення. Напруження σ_z вздовж осі z (рис. 6, б), незалежно від відстані труби до верхньої межі шару та товщини труби, крім від'ємних значень, мають також додатні величини, які повільно зменшуються вздовж осі z .

На рис. 7 наведені напруження σ_ϕ та σ_z (в Н/мм²) вздовж осі z на внутрішній поверхні труби при $\phi=\pi/2$.

Напруження σ_ϕ на внутрішній поверхні труби вздовж осі z (рис. 7, а), незалежно від товщини труби та відстані від труби до верхньої межі шару, мають постійно додатні значення. Напруження σ_z на тій же поверхні (рис. 7, б), зі зменшенням товщини труби, не тільки збільшують значення і мають виражені від'ємні значення, але і повільно зменшуються вздовж осі z .

Висновки

За допомогою узагальненого методу Фур'є розроблений аналітико-числовий метод розрахунку просторової змішаної задачі теорії пружності (з умовами першої і другої основних задач на границях) для шару з розташованою в ньому повздовжньою товстостінною трубою. Задача зведена до сукупності нескінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Рівняння розв'язується методом редукції до скінченної системи.

Наведені графіки дають картину розподілу напружень на поверхнях шару та труби в залежності від товщини труби та відстані між верхньою межею шару та центром труби. В результаті проаналізовано вплив цих геометричних умов на напружено-деформований стан шару та труби за незмінних пружних констант матеріалів.

Напруження σ_ρ , $\tau_{\rho z}$, знайдені на межі труби та шару, можуть використовуватись для розрахунку міцності з'єднання.

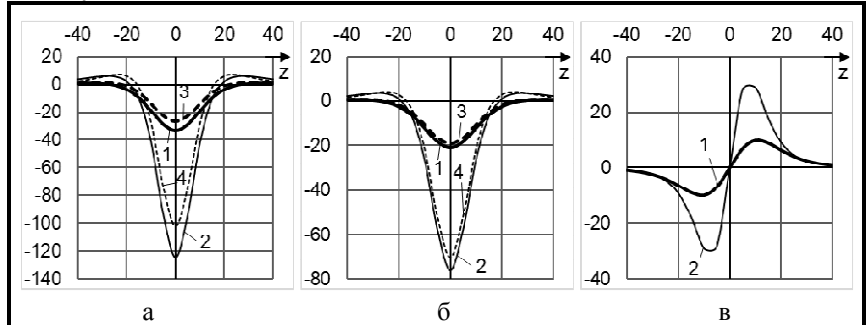


Рис. 5. Напруження вздовж осі z на межі труби та шару (в тілі шару):

а – σ_ρ ; б – σ_ϕ ; в – $\tau_{\rho z}$;

1 – при $h=30$ мм, $R_2=6$ мм; 2 – при $h=20$ мм, $R_2=6$ мм;
3 – при $h=30$ мм, $R_2=8$ мм; 4 – при $h=20$ мм, $R_2=8$ мм

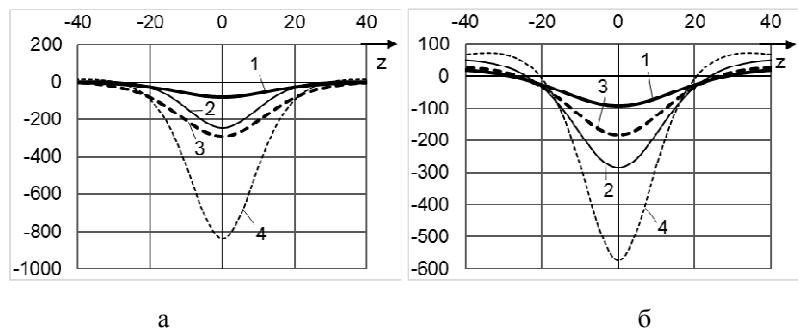


Рис. 6. Напруження вздовж осі z на межі труби та шару (в тілі труби):

а – σ_ϕ ; б – σ_z ;

1 – при $h=30$ мм, $R_2=6$ мм; 2 – при $h=20$ мм, $R_2=6$ мм;
3 – при $h=30$ мм, $R_2=8$ мм; 4 – при $h=20$ мм, $R_2=8$ мм

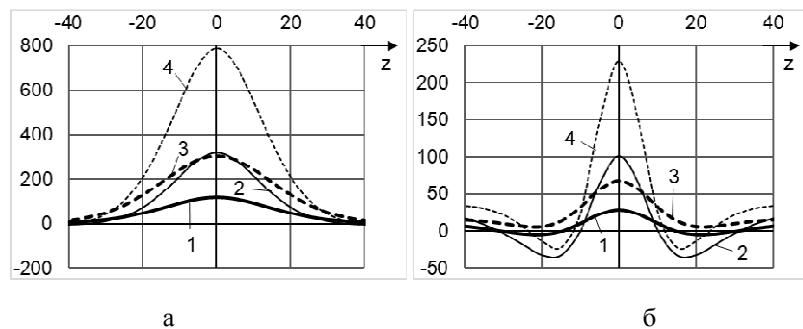


Рис. 7. Напруження вздовж осі z на внутрішній поверхні труби:

а – σ_ϕ ; б – σ_z ;

1 – при $h=30$ мм, $R_2=6$ мм; 2 – при $h=20$ мм, $R_2=6$ мм;
3 – при $h=30$ мм, $R_2=8$ мм; 4 – при $h=20$ мм, $R_2=8$ мм

В порівнянні з роботами [3–7] запропонований метод дозволяє отримати точний розв’язок задачі в просторовому варіанті, а в порівнянні з [9–15] урахувати нові граничні поверхні, додавши до граничних умов умови сполучення труби та шару.

Числовий аналіз напружено-деформованого стану шару та розташованої в ньому труби показує:

– з наближенням труби до верхньої межі шару напруження в тілі шару та в тілі труби збільшуються;

– зі зменшенням товщини труби напруження в тілі шару зменшуються, а тілі труби зростають;

– зі зменшенням товщини труби нормальні напруження вздовж осі z на межі труби та шару (в тілі шару), крім від’ємних значень, мають також додатні величини.

Числові дослідження алгебраїчної системи для шару з повздовжньою трубою дають можливість стверджувати, що її розв’язок може бути з будь-яким ступенем точності знайдено методом редукції. Це підтверджується високою точністю виконання граничних умов. Для геометричних параметрів розв’язаної задачі при $m=10$ граничні умови виконуються з точністю 10^{-3} . Зі збільшенням порядку системи m точність розрахунків буде зростати.

Для перевірки достовірності методу труба була замінена на порожнину, нижня межа шару відсутня на велику відстань (що моделює порожнину в півпросторі) і в такій постановці результати було порівняно з роботою [15]. Після цього верхня межа шару була відсунута на велику відстань, що змодельовало порожнину в просторі та співпало з постановкою задачі [16]. Збіжність з відомими результатами та висока точність виконання граничних умов свідчать про достовірність методу та отриманих результатів.

Отримані графіки можуть бути використані для оцінки напруженого стану в конструкціях з подібними умовами.

Серед недоліків слід зазначити, що метод не дає можливості розв’язати задачі, коли границі тіл дотикаються або перетинаються.

Подальший розвиток цього напрямку можливий в збільшенні кількості циліндричних порожнин і труб або в розрахунку задачі з іншими крайовими умовами.

Література

1. Vaysfel'd N., Popov G., Reut V. The axisymmetric contact interaction of an infinite elastic plate with an absolutely rigid inclusion. *Acta Mech.* 2015. Vol. 226. P. 797–810. <https://doi.org/10.1007/s00707-014-1229-7>
2. Попов Г. Я., Вайсфельд Н. Д. Осесимметричная задача теории упругости для бесконечной плиты с цилиндрическим включением при учете ее удельного веса. *Прикл. механика.* 2014. Т. 50. № 6. С. 27–38.
3. Гузь А. Н., Кубенко В. Д., Черевко М. А. Дифракция упругих волн. Киев: Наук. думка, 1978. 307 с.
4. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наук. думка, 1981. 284 с.
5. Grinchenko V. T., Ulitko A. F. An exact solution of the problem of stress distribution close to a circular hole in an elastic layer. *Soviet Appl. Mechs.* 1968. No. 10. P. 31–37. <https://doi.org/10.1007/BF00886618>
6. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф. Пространственные задачи теории упругости и пластичности. Равновесие упругих тел канонической формы. Киев: Наук. думка, 1985. 280 с.
7. Волчков В. В., Вуколов Д. С., Сторожев В. И. Дифракция волн сдвига на внутренних туннельных цилиндрических неоднородностях в виде полости и включения в упругом слое со свободными гранями. *Механика твердого тела.* 2016. Вып. 46. С. 119–133.
8. Николаев А. Г., Проценко В. С. Обобщенный метод Фурье в пространственных задачах теории упругости. Харьков: Нац. аэрокосм. ун-т им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», 2011. 344 с.
9. Николаев А. Г., Орлов Е. М. Решение первой осесимметричной термоупругой краевой задачи для трансверсально-изотропного полупространства со сфероидальной полостью. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій.* 2012. Вип.20. С. 253–259.
10. Miroshnikov V. Yu. First basic elasticity theory problem in a half-space with several parallel round cylindrical cavities. *J. Mech. Eng.* 2018. Vol. 21. No. 2. P. 12–18.
11. Protsenko V., Miroshnikov V. Investigating a problem from the theory of elasticity for a half-space with cylindrical cavities for which boundary conditions of contact type are assigned. *Eastern-European J. Enterprise Techn. Appl. Mech.* 2018. Vol. 4. No. 7. P. 43–50. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2018.139567>
12. Николаев А. Г., Щербакова А. Ю., Юхно А. И. Действие сосредоточенной силы на трансверсально-изотропное полупространство с параболидальным включением. *Вопр. проектирования и пр-ва конструкций летат. аппаратов. Сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н. Е. Жуковского «ХАИ».* 2006. Вып. 2. С. 47–51.
13. Miroshnikov V. Yu. Evaluation of the stress-strain state of half-space with cylindrical cavities. *Visnyk Dniprovskoho universytetu. Ser. Mekhanika – Bulletin of the Dnipro University.* 2018. Vol. 26. No. 5. P. 109–118.

14. Николаев А. Г., Танчик Е. А. Распределение напряжений в ячейке однонаправленного композиционного материала, образованного четырьмя цилиндрическими волокнами. *Вісн. Одес. нац. ун-ту. Математика. Механіка*. 2013. Т. 18. Вип. 4(20). С. 101–111.
15. Проценко В. С., Українець Н. А. Применение обобщенного метода Фурье к решению первой основной задачи теории упругости в полупространстве с цилиндрической полостью. *Вісн. Запоріж. нац. ун-ту*. 2015. Вип. 2. С. 193–202.
16. Соляник-Краса К. В. Осесимметричная задача теории упругости. М.: Стройиздат, 1987. 336с.

Поступила в редакцию 21.03.2019

Исследование напряженно-деформированного состояния слоя с продольной цилиндрической толстостенной трубой и заданными на границах слоя перемещениями

Мирошников В. Ю.

Харьковский национальный университет строительства и архитектуры,
61002, Украина, г. Харьков, ул. Сумская, 40

Предложен аналитико-численный подход к решению пространственной задачи теории упругости для слоя с круговой цилиндрической трубой. Цилиндрическая пустая толстостенная труба расположена внутри слоя параллельно его поверхностям и жестко с ним скреплена. Необходимо исследовать напряженно-деформированное состояние упругих тел слоя и трубы. На внутренней поверхности трубы заданы напряжения, на границах слоя – перемещения. Решение пространственной задачи теории упругости получено обобщенным методом Фурье относительно системы уравнений Ламе в цилиндрических координатах, связанных с трубой, и декартовых координатах, связанных с границами слоя. Бесконечные системы линейных алгебраических уравнений, полученных в результате удовлетворения граничных условий и условий сопряжения, решено методом усечения. В результате получены перемещения и напряжения в различных точках упругого слоя и упругой трубы. Благодаря подобранному параметру усечения для заданных геометрических характеристик выполнение граничных условий доведено до 10^{-3} . Проведен анализ напряженно-деформированного состояния тела при различных толщинах трубы, а также при различных расстояниях от трубы до границ слоя. Представлены графики нормальных и касательных напряжений на границе трубы и слоя, а также нормальные напряжения на внутренней поверхности трубы. Указанные графики напряжений свидетельствуют о том, что при приближении трубы к верхней границе слоя напряжения в теле слоя и в теле трубы растут, при уменьшении толщины трубы напряжения в теле слоя уменьшаются, а в теле трубы растут. Предложенный метод может использоваться для расчета конструкций и деталей, расчетные схемы которых совпадают с постановкой задачи данной работы. Приведенный анализ напряженного состояния может быть использован для подбора геометрических параметров проектируемой конструкции, а график напряжений на границе трубы и слоя – для анализа прочности соединения.

Ключевые слова: толстостенная труба в слое, уравнения Ламе, обобщенный метод Фурье.