

УДК 536.24

РЕШЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ МНОГОСЛОЙНЫХ ТЕЛ НА ОСНОВЕ ЭФФЕКТИВНОГО ПОИСКА РЕГУЛЯРИЗУЮЩЕГО ПАРАМЕТРА

¹ **Ю. М. Мацевитый**,
академик НАН Украины
matsevit@ipmach.kharkov.ua
ORCID: 0000-0002-6127-0341

² **В. Н. Сиренко**, канд. техн. наук
v.n.sirenko@i.ua

¹ **А. О. Костиков**,
член-корр. НАН Украины
kostikov@ipmach.kharkov.ua
ORCID: 0000-0001-6076-1942

¹ **Н. А. Сафонов**, канд. физ.-мат. наук
nicksaf@meta.ua
ORCID: 0000-0002-3951-4805

¹ **В. В. Ганчин**
valeragw@gmail.com
ORCID: 0000-0001-9242-6460

¹ Институт проблем машиностроения
им. А. Н. Подгорного НАН Украины,
61046, Украина, г. Харьков,
ул. Пожарского, 2/10

² Государственное предприятие
«Конструкторское бюро «Южное»
им. М. К. Янгеля»,
49008, Украина, г. Днепр,
ул. Криворожская, 3

Введение

Решение обратных задач теплопроводности для идентификации параметров математических моделей имеет особое значение для обеспечения адекватности этих моделей при наличии экспериментальной информации об исследуемом тепловом процессе. Эффективность принятых решений при проектировании различного энергетического оборудования зависит как от глубины и достоверности знаний явлений теплообмена, так и от адекватности моделирования различных теплофизических процессов. С целью создания эффективных методов диагностики и идентификации таких процессов

В статье для получения устойчивого решения обратной задачи теплопроводности (ОЗТ) применяется метод А. Н. Тихонова с эффективным алгоритмом поиска регуляризирующего параметра. Искомые тепловой поток на границе и термическое контактное сопротивление по временной координате аппроксимируются сплайнами Шёнберга третьей степени. В качестве стабилизирующего функционала используется сумма квадратов искомой величины, её первой и второй производных. В качестве объекта исследования рассматриваются многослойные пластины или оболочки, к которым можно отнести и корпуса твердотопливных ракетных двигателей. В первом приближении задача рассматривается в одномерной нестационарной линейной постановке. Соотношение толщины оболочки к её радиусу будем считать таким, что в уравнении теплопроводности кривизной оболочки можно пренебречь и рассматривать её как плоскую пластину. Такое допущение выбрано для упрощения изложения материала и не ограничивает применимость излагаемой методики в случае осевой симметрии оболочки, а также при переводе математической модели из прямоугольной в цилиндрическую систему координат. Рассматриваются три обратные задачи. В первых двух определяются тепловые потоки в составном теле с идеальным и реальным тепловым контактом. В третьей ОЗТ при реальном тепловом контакте определяется термическое контактное сопротивление. Тепловые потоки в многослойных телах представляются в виде линейных комбинаций сплайнов Шёнберга третьей степени с неизвестными коэффициентами, которые вычисляются путём решения системы линейных алгебраических уравнений. Эта система является следствием необходимого условия минимума функционала, в основу которого положен принцип наименьших квадратов отклонения моделируемой температуры от температуры, полученной в результате теплофизического эксперимента. Для регуляризации решений ОЗТ в этом функционале в качестве слагаемого к сумме квадратов используется стабилизирующий функционал с параметром регуляризации в качестве мультипликативного множителя. Он представляет собой сумму квадратов тепловых потоков, их первых и вторых производных с соответствующими множителями. Эти множители выбираются согласно заранее известным свойствам искомого решения. Поиск регуляризирующего параметра осуществляется с помощью алгоритма, аналогичного алгоритму поиска корня нелинейного уравнения.

Ключевые слова: обратная задача теплопроводности, тепловой поток, термическое контактное сопротивление, метод регуляризации А. Н. Тихонова, функционал, стабилизатор, параметр регуляризации, идентификация, аппроксимация, сплайн Шёнберга третьей степени.

© Ю. М. Мацевитый, В. Н. Сиренко, А. О. Костиков, Н. А. Сафонов, В. В. Ганчин, 2019

проводятся экспериментальные исследования и обработка их результатов. В основу этих методов могут быть положены решения обратных задач теплопроводности как для однородных, так и для композитных сред. Практически в некоторых случаях методы решения обратных задач являются единственным средством получения необходимой информации об исследуемом объекте. В данной работе граничная обратная задача теплопроводности (ОЗТ) сводится к определению тепловых потоков на поверхности тела по данным измерений температур в одной или нескольких внутренних точках.

ОЗТ может быть формализована следующим образом:

$$A[f(T, M, \tau)] = T^{\text{экс}},$$

где $f(T, M, \tau)$ – искомая или искомые зависимости, которые в общем случае могут зависеть от температуры T , пространственных координат точки M и временной координаты τ ; $T^{\text{экс}}$ – заданная температура, которая имеет вид $T^{\text{экс}} = T(M, \tau)$ и в большинстве случаев известна из эксперимента (исходные данные); A – оператор, который связывает искомые зависимости с исходными данными $T^{\text{экс}}$. Такая задача, как и любая ОЗТ, ввиду нарушения причинно-следственной связи является некорректной по Адамару, что может служить причиной неустойчивости получаемого решения.

Для решения такой некорректной задачи ее либо сводят к условно-корректной, и регуляризация не проводится, либо оставляют некорректной, но применяют один из методов регуляризации [1–6]. Если нет теплофизического эксперимента, то $T^{\text{экс}}$ получают из решения соответствующей прямой задачи с добавлением некоторой случайной величины.

Постановка задачи

Тепловой процесс в двухслойной пластине с реальным контактом между слоями был описан следующей системой уравнений:

$$C_1 \frac{\partial T}{\partial \tau} = \lambda_1 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L_1, \quad C_2 \frac{\partial T}{\partial \tau} = \lambda_2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad L_1 < x < L, \quad \tau > 0, \quad (1)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad x = 0, \quad \lambda_2 \frac{\partial T}{\partial x} = Q(\tau), \quad x = L, \quad \tau > 0, \quad (2)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L_1-0} = \lambda_2 \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L_1+0}, \quad \left(\lambda_1 \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{1}{R(\tau)} T \right) \Big|_{x=L_1-0} = \frac{1}{R(\tau)} T \Big|_{x=L_1+0}, \quad \tau > 0, \quad (3)$$

$$T(x, 0) = T_0, \quad (4)$$

$$T(x_j, \tau_k) = T_{j,k}^{\text{экс}}, \quad \tau_k = k\Delta\tau, \quad j = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, m}, \quad (5)$$

где $Q(\tau)$ – искомый тепловой поток; x – пространственная координата; τ – время; $\lambda_i, C_i, i = 1, 2$ – теплопроводность и массовая теплоёмкость для каждого слоя соответственно; L – толщина двухслойной пластины; L_1 – толщина первого слоя; T – температура; T_0 – начальная температура; $x_j, j = \overline{1, n}$ – пространственные координаты точек термометрирования; $R(\tau) > 0$ – термическое контактное сопротивление (при идеальном тепловом контакте $R = 0$); $\Delta\tau$ – интервал времени между измерениями; m – количество измерений; n – количество точек измерений; $T_{j,k}^{\text{экс}}, j = \overline{1, n}, k = \overline{1, m}$ – температуры, полученные в результате теплофизического эксперимента с погрешностью, которая характеризуется случайной величиной, распределённой по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ^2 .

В связи с отсутствием теплофизического эксперимента данные (5) были получены из решения модельной прямой задачи (1)–(4) при известном тепловом потоке $Q(\tau)$.

Регуляризирующий алгоритм решения ОЗТ и метод функций влияния

Регуляризирующий алгоритм А. Н. Тихонова [5] для решения линейной обратной задачи (1)–(5) сводится к минимизации функционала

$$J = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m [T(x_i, \tau_k) - T_{i,k}^{\text{эк}}]^2 + \alpha \Omega[Q], \quad (6)$$

где α – параметр регуляризации; $\Omega[Q]$ – стабилизирующий функционал; $T(x_i, \tau_k)$ и $T_{i,k}^{\text{эк}}$ – моделируемая температура и температура из теплофизического эксперимента в точках термометрирования x_j в моменты времени τ_k .

Если искомую функцию $Q(\tau)$ представить в виде

$$Q(\tau) = \sum_{j=1}^{n_Q} q_{Q,j} \varphi_{Q,j}(\tau), \quad (7)$$

где $\varphi_{Q,j}(\tau)$, $j = \overline{1, n_Q}$ – некоторый финитный базис на всем интервале измерения температур, а $q_{Q,j}$ – искомые коэффициенты, то тогда, используя принцип суперпозиции, решение $T(x, \tau)$ можно записать как

$$T(x, \tau) = \bar{T}(x, \tau) + \sum_{j=1}^{n_Q} q_{Q,j} T_j(x, \tau), \quad (8)$$

где $\bar{T}(x, \tau)$ – решение краевой задачи (1)–(4) с неоднородным начальным условием (4) и однородными граничными условиями (2), а $T_j(x, \tau)$ – решение краевой задачи (1)–(4) с однородным начальным условием и граничными условиями вида

$$\lambda_2 \frac{\partial T_j}{\partial x} = 0, \quad x = 0, \quad \lambda_2 \frac{\partial T_j}{\partial x} = \varphi_{Q,j}(\tau), \quad x = L, \quad \tau > 0.$$

Подставляя выражение (8) в функционал (6) и взяв в качестве стабилизирующего функционала

$$\Omega[Q] = \omega_{Q,0} \int_0^{\tau_0} \left[\sum_{j=1}^{n_Q} q_{Q,j} \varphi_{Q,j}(\tau) \right]^2 d\tau + \omega_{Q,1} \int_0^{\tau_0} \left[\sum_{j=1}^{n_Q} q_{Q,j} \varphi'_{Q,j}(\tau) \right]^2 d\tau + \omega_{Q,2} \int_0^{\tau_0} \left[\sum_{j=1}^{n_Q} q_{Q,j} \varphi''_{Q,j}(\tau) \right]^2 d\tau, \quad (9)$$

можно, продифференцировав (9) по искомым коэффициентам $q_{Q,j}$, получить систему линейных уравнений

$$(\mathbf{A} + \alpha \mathbf{B}) \mathbf{q} = \mathbf{C}, \quad (10)$$

где \mathbf{A} – симметричная матрица с элементами

$$a_{ij} = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^m T_l(x_l, \tau_k) T_j(x_l, \tau_k); \quad (11)$$

\mathbf{B} – симметричная матрица с элементами

$$b_{ij} = \omega_{Q,0} \int_0^{\tau_0} \varphi_{Q,i}(\tau) \varphi_{Q,j}(\tau) d\tau + \omega_{Q,1} \int_0^{\tau_0} \varphi'_{Q,i}(\tau) \varphi'_{Q,j}(\tau) d\tau + \omega_{Q,2} \int_0^{\tau_0} \varphi''_{Q,i}(\tau) \varphi''_{Q,j}(\tau) d\tau;$$

\mathbf{C} – вектор правой части системы линейных уравнений (10)

$$c_i = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^m T_l(x_l, \tau_k) (T_{l,k}^{\text{эк}} - \bar{T}(x_l, \tau_k)). \quad (12)$$

В качестве $\varphi_{Q,j}(\tau)$, $j = \overline{1, n_Q}$ берутся сплайны Шёнберга третьей степени $B_3(\tau)$.

В систему линейных уравнений (10) входит параметр регуляризации α , который определяется так же, как и в работах [1, 7–10]. Считается, что параметр регуляризации выбран правильно, если

для полученного решения по предложенной выше итерационной схеме выполняется такое двухстороннее неравенство:

$$(1 - \sqrt{2/N})\sigma^2 \leq \delta^2 \leq (1 + \sqrt{2/N})\sigma^2, \quad (13)$$

где N – общее количество термометрических измерений; δ^2 – среднеквадратичное отклонение модельного решения от точного решения. Алгоритм поиска параметра регуляризации α основан на каком-либо итерационном процессе поиска корня нелинейного уравнения.

На рис. 1 и 2 представлены графики температур в точке L_1 (контакт слоёв пластины) и на границе L при идеальном тепловом контакте между слоями, а на рис. 3 – идентифицированный тепловой поток на границе L .

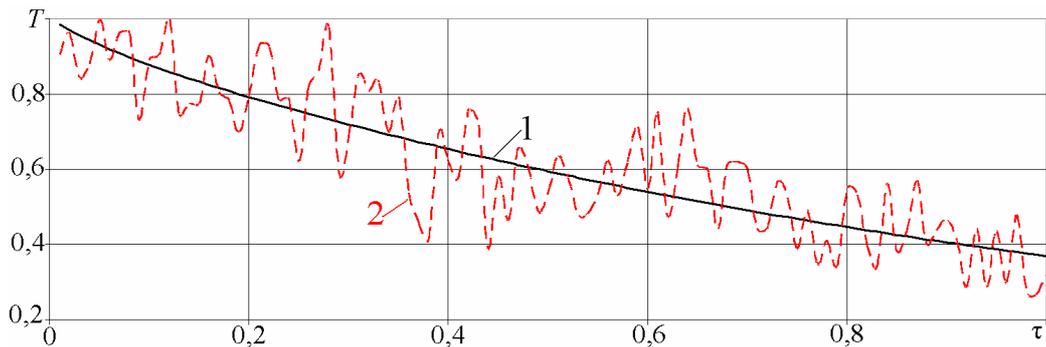


Рис. 1. Температура в точке идеального теплового контакта:

1 – из решения модельной задачи, 2 – в результате теплофизического эксперимента с зашумлением

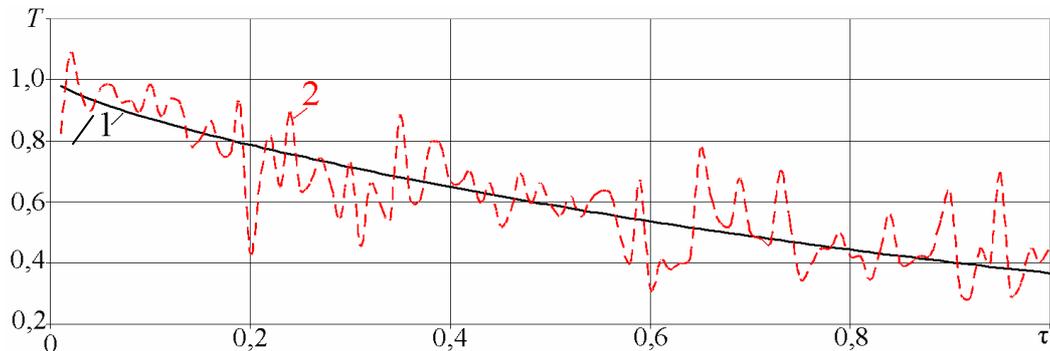


Рис. 2. Температура на границе пластины с искомым тепловым потоком:

1 – из решения модельной задачи, 2 – в результате теплофизического эксперимента с зашумлением

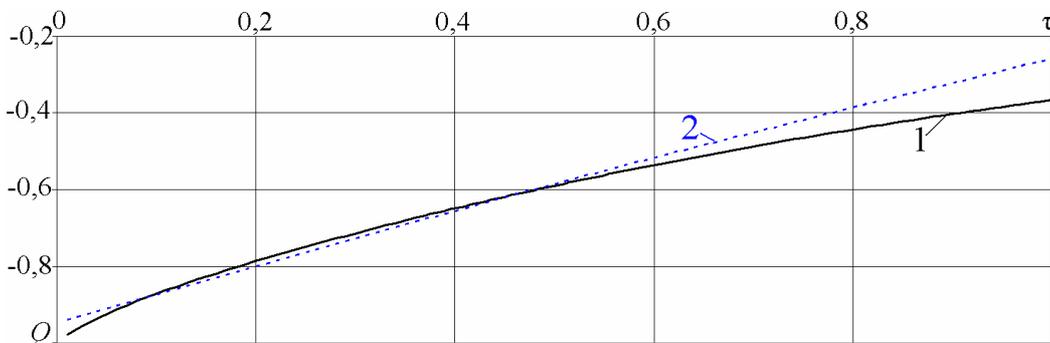


Рис. 3. Графики теплового потока в задаче с идеальным тепловым контактом:

1 – заданный при решении модельной задачи, 2 – идентифицированный

Приведенные результаты получены для следующих значений безразмерных параметров задачи: $m = 100$, $\Delta\tau = 0,01$, $n = 2$, $x_1 = L_1$, $x_2 = L$, $C_1 = 1$, $C_2 = 1$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 50$, $L = 1$, $L_1 = 0,5$, $T_0 = 1$, $n_Q = 23$, $\sigma = 0,1$, $\omega_{Q,0} = 1$, $\omega_{Q,1} = 0$, $\omega_{Q,2} = 10$.

Для теплового процесса с реальным тепловым контактом графики температур в точке реального контакта и на границе пластины представлены на рис. 4 и 5, а идентифицированный тепловой поток, полученный по вышеизложенному подходу, на границе L – на рис. 6.

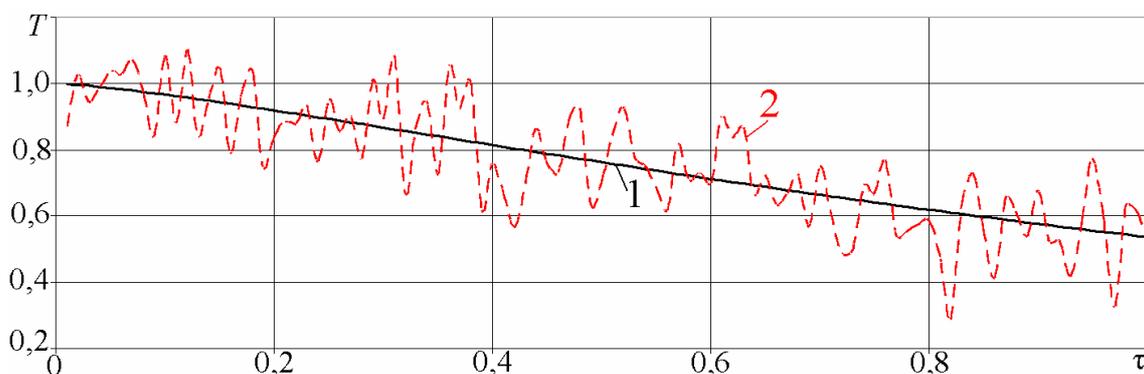


Рис. 4. Температура в точке реального теплового контакта:

1 – из решения модельной задачи, 2 – в результате теплофизического эксперимента с зашумлением

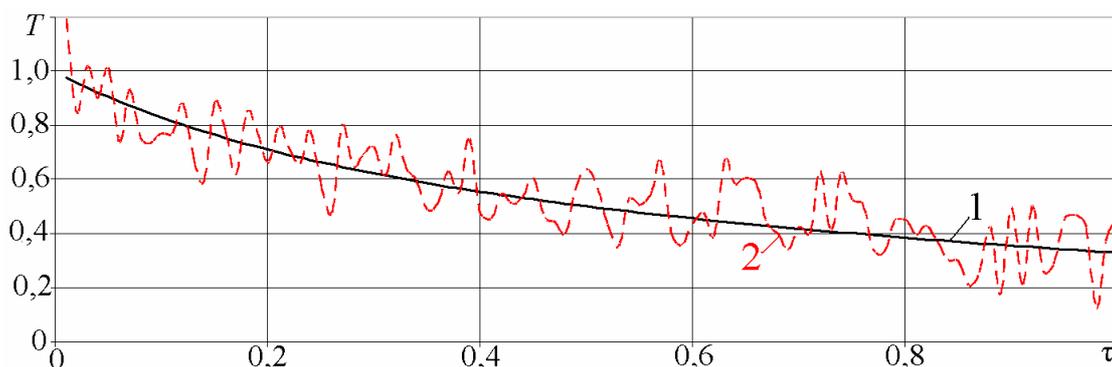


Рис. 5. Температура на границе пластины с искомым тепловым потоком в задаче с реальным тепловым контактом:

1 – из решения модельной задачи, 2 – в результате теплофизического эксперимента с зашумлением

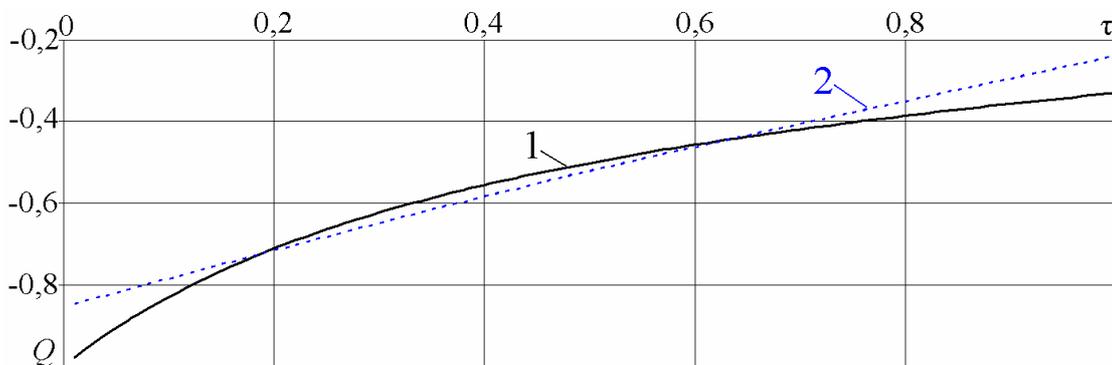


Рис. 6. Графики теплового потока на границе пластины в задаче с реальным тепловым контактом:

1 – заданный при решении модельной задачи, 2 – идентифицированный

Графики, представленные на рис. 6, получены при тех же безразмерных параметрах, что и для идеального контакта. При этом термометрирование производилось в точках пространства $x_1 = L_1$ (точка в первом слое) и $x_2 = L$.

В качестве третьей ОЗТ рассматривалась обратная нестационарная краевая задача теплопроводности (1–5), в которой по данным теплофизического эксперимента необходимо определить тепловой поток $Q(\tau)$ и термическое контактное сопротивление $R(\tau)$. Поскольку точки термометрирования присутствуют в обоих слоях, эта задача была разбита на две связанные внешние обратные краевые задачи для первого и второго слоёв.

Тепловой поток $Q(\tau)$ на внешней границе (L) был представлен в виде (7), а тепловой поток на границе контакта $Q_R(\tau)$ – в виде

$$\lambda_1 \frac{\partial T}{\partial x} = Q_R(\tau) = \sum_{j=1}^{n_R} q_{R,j} \varphi_{R,j}(\tau), \quad x = L_1,$$

где $\varphi_{R,j}(\tau)$, $j = \overline{1, n_R}$ – некоторый финитный базис на всем интервале измерения температур, $q_{R,j}$, $j = \overline{1, n_R}$ – искомые коэффициенты.

Если вектор \mathbf{q} размерности $n_Q + n_R$ записать в виде $\mathbf{q} = (q_{Q,1}, \dots, q_{Q,n_Q}, q_{R,1}, \dots, q_{R,n_R})$, то в силу линейности задачи, используя принцип суперпозиции, температурное поле для первого слоя можно представить как

$$T(x, \tau) = \bar{T}(x, \tau) + \sum_{j=n_Q+1}^{n_Q+n_R} q_j T_j(x, \tau),$$

где $\bar{T}(x, \tau)$ – решение краевой задачи (1–4) с неоднородным начальным условием (4) и однородными граничными условиями, а $\{T_j(x, \tau)\}_{j=n_Q+1}^{n_Q+n_R}$, – решение краевой задачи (1–4) с однородным начальным условием и неоднородным граничным условием второго рода

$$\lambda_1 \frac{\partial T_j}{\partial x} \Big|_{x=L_1-0} = \varphi_{R,j-n_Q}(\tau), \quad \lambda_1 \frac{\partial T_j}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad j = \overline{n_Q+1, n_Q+n_R}, \quad \tau > 0.$$

Температурное поле для второго слоя можно записать так:

$$T(x, \tau) = \bar{T}(x, \tau) + \sum_{j=1}^{n_Q+n_R} q_j T_j(x, \tau),$$

где $\bar{T}(x, \tau)$ – то же решение краевой задачи (1–4), что и для первого слоя, а $T_j(x, \tau)$, $j = \overline{1, n_Q+n_R}$ – решение краевой задачи (1–4) с однородным начальным условием и неоднородными граничными условиями второго рода

$$\begin{aligned} \lambda_2 \frac{\partial T_j}{\partial x} \Big|_{x=L} &= \varphi_{Q,j}(\tau), \quad \lambda_2 \frac{\partial T_j}{\partial x} \Big|_{x=L_1+0} = 0, \quad j = \overline{1, n_Q}, \quad \tau > 0; \\ \lambda_2 \frac{\partial T_j}{\partial x} \Big|_{x=L_1+0} &= \varphi_{R,j-n_Q}(\tau), \quad \lambda_2 \frac{\partial T_j}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0, \quad j = \overline{n_Q+1, n_Q+n_R}, \quad \tau > 0. \end{aligned}$$

Тогда, следуя рассуждениям, приведенным выше, можно получить систему линейных уравнений (10) с элементами матрицы \mathbf{A} в виде (11), с элементами вектора \mathbf{C} в виде (12) и с элементами матрицы \mathbf{B} в виде

$$b_{ij} = \omega_{Q,0} \int_0^{\tau_0} \varphi_{Q,i}(\tau) \varphi_{Q,j}(\tau) d\tau + \omega_{Q,1} \int_0^{\tau_0} \varphi'_{Q,i}(\tau) \varphi'_{Q,j}(\tau) d\tau + \omega_{Q,2} \int_0^{\tau_0} \varphi''_{Q,i}(\tau) \varphi''_{Q,j}(\tau) d\tau, \quad i, j = \overline{1, n_Q},$$

$$b_{ij} = \omega_{R,0} \int_0^{\tau_0} \varphi_{R,i}(\tau) \varphi_{R,j}(\tau) d\tau + \omega_{R,1} \int_0^{\tau_0} \varphi'_{R,i}(\tau) \varphi'_{R,j}(\tau) d\tau + \omega_{R,2} \int_0^{\tau_0} \varphi''_{R,i}(\tau) \varphi''_{R,j}(\tau) d\tau, \quad i, j = \overline{n_Q + 1, n_Q + n_R}.$$

Подбирая параметр регуляризации α таким образом, чтобы в результате решения системы линейных уравнений (10) удовлетворялось условие (13), можно по восстановленным тепловому потоку и температурам на границе контакта (рис. 7) определить термическое контактное сопротивление на этой границе.

На рис. 7–9 представлены графики температур слева и справа от границы контакта и на внешней границе пластины.

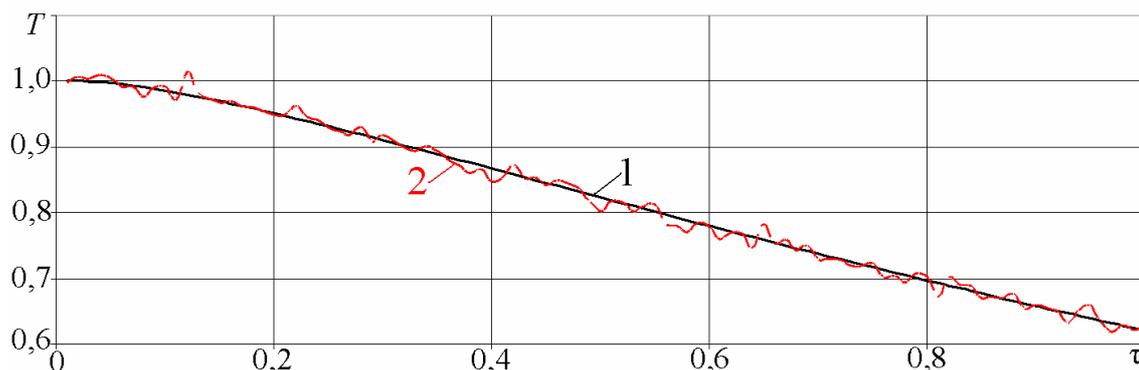


Рис. 7. Температура на границе контакта в первой среде:

1 – из решения модельной задачи, 2 – в результате теплофизического эксперимента с зашумлением

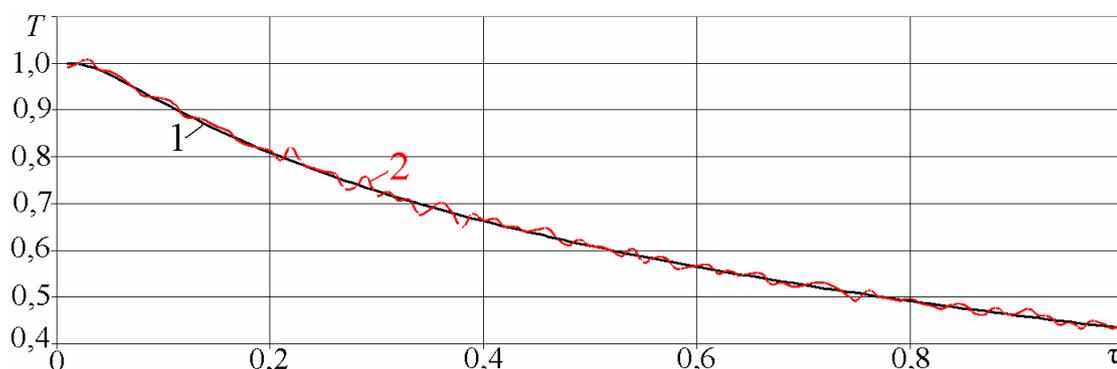


Рис. 8 Температура на границе контакта во второй среде:

1 – из решения модельной задачи, 2 – в результате теплофизического эксперимента с зашумлением

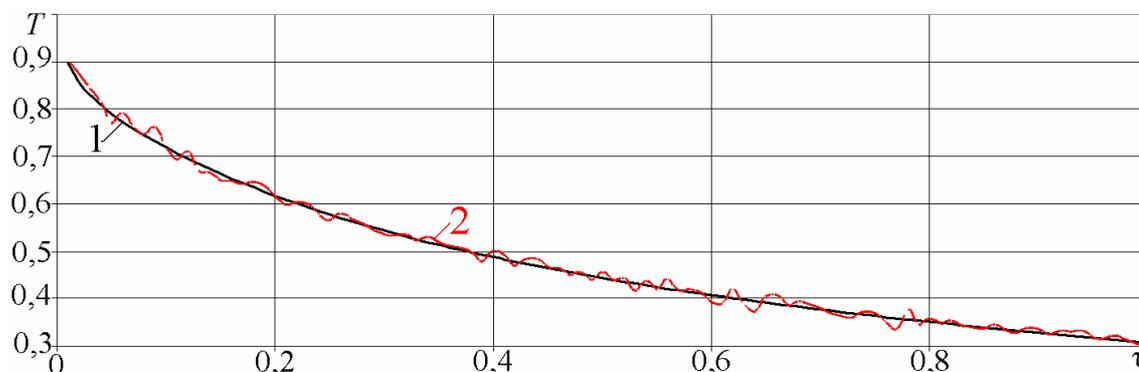


Рис. 9. Температура на границе пластины с искомым тепловым потоком:

1 – из решения модельной задачи, 2 – в результате теплофизического эксперимента с зашумлением

Идентифицированные тепловые потоки поданы на внешней границе пластины (рис. 10) и на границе теплового контакта (рис. 11), а обратная величина термического контактного сопротивления – на рис. 12.

Приведенные результаты получены для следующих значений безразмерных параметров: $n = 3$, $x_1 = L_1 - 0$, $x_2 = L_1 + 0$, $x_3 = L$, $C_1 = 1$, $C_2 = 1$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $L = 1$, $L_1 = 0,5$, $T_0 = 1$, $n_Q = 23$, $n_R = 23$, $m = 100$, $\sigma = 0,01$, $\omega_{Q,0} = 1$, $\omega_{Q,1} = 0$, $\omega_{Q,2} = 10$, $\omega_{R,0} = 1$, $\omega_{R,1} = 0$, $\omega_{R,2} = 10$, $\Delta\tau = 0,01$, $R = 1$.

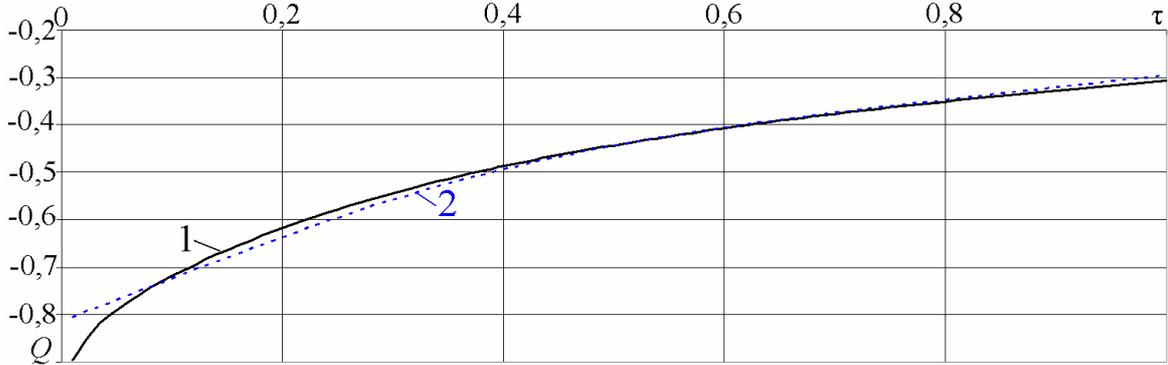


Рис. 10. Графики теплового потока на границе пластины:
1 – заданный при решении модельной задачи, 2 – идентифицированный

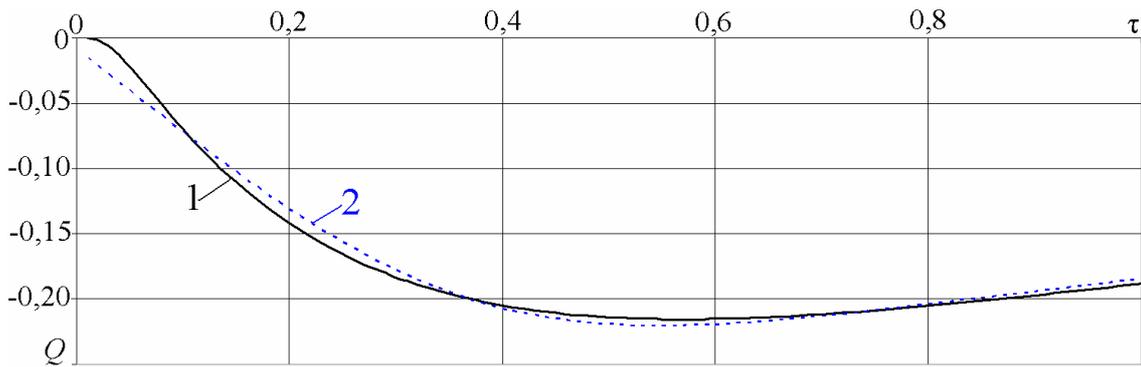


Рис. 11. Графики теплового потока на границе контакта:
1 – заданный при решении модельной задачи, 2 – идентифицированный

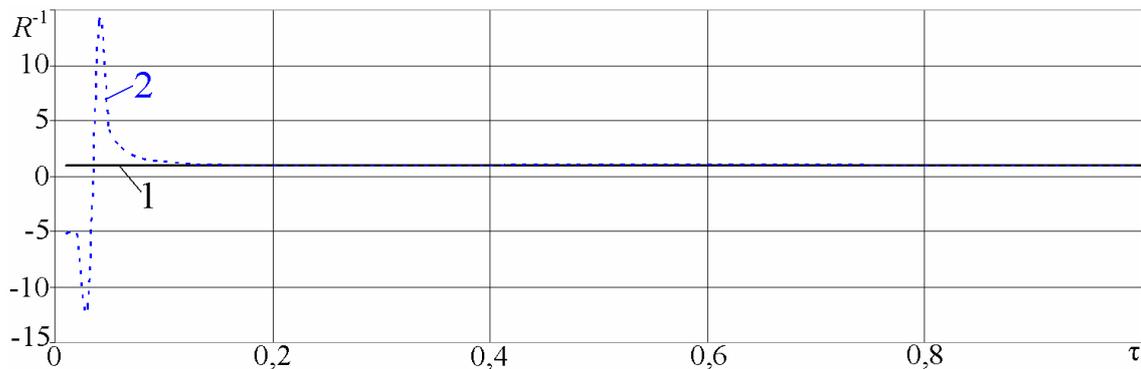


Рис. 12. Графики обратной величины термического контактного сопротивления:
1 – заданное при решении модельной задачи, 2 – идентифицированное

Выводы

Описанный подход совместного применения регуляризирующего алгоритма А. Н. Тихонова с методом функций влияния позволяет идентифицировать сложные зависимости тепловых потоков при определённой погрешности результатов теплофизического эксперимента. К его достоинствам следует отнести: слабую чувствительность к погрешностям измерений; возможность использования экспериментальной информации как от одного, так и от нескольких датчиков; применимость для неоднородных сред; возможность одновременного восстановления теплового потока на разных частях поверхности конструктивного элемента; простоту программирования и возможность распараллеливания вычислительного процесса, что отвечает современным требованиям, предъявляемым к методам и алгоритмам решения прямых и обратных задач.

Приведенные в статье графики демонстрируют устойчивые решения обратных задач теплопроводности для разнородных слоев как с идеальными, так и с реальными тепловыми контактами. Линии, отмеченные цифрой «1» на рис. 1, 2, 4, 5, 7, 8 и 9, представляют одновременно температуру, полученную в результате решения модельной прямой задачи, и температуру, идентифицированную путём решения обратной задачи, так как на графиках эти две кривые практически совпадают.

Анализируя отклонение идентифицированной температуры от температуры, полученной путём решения прямой задачи, можно сделать заключение о хорошем их согласовании. Что касается тепловых потоков, то заметна погрешность их идентификации, причём более существенная на концах временного интервала.

Представленные в статье исследования и результаты выполнены в рамках бюджетной темы Ш-66-15.

Литература

1. Бек Дж., Блакуэлл Б., Сент-Клэр Ч. (мл.) Некорректные обратные задачи теплопроводности. М.: Мир, 1989. 312 с.
2. Мацевитый Ю. М. Обратные задачи теплопроводности: в 2-х т. Киев: Наук. думка. Т. 1: Методология. 2002. 408 с.; Т. 2: Приложения. 2003. 392 с.
3. Коздоба Л. А., Круковский П. Г. Методы решения обратных задач теплопереноса. Киев: Наук. думка, 1982. 360 с.
4. Алифанов О. М., Артюхин Е. А., Румянцев С. В. Экстремальные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1988. 288 с.
5. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 288 с.
6. Мацевитый Ю. М., Слесаренко А. П. Некорректные многопараметрические задачи теплопроводности и регионально-структурная регуляризация их решений. Киев: Наук. думка, 2014. 292 с.
7. Мацевитый Ю. М., Слесаренко А. П., Ганчин В. В. Регионально-аналитическое моделирование и идентификация тепловых потоков с использованием метода регуляризации А. Н. Тихонова. *Пробл. машиностроения*. 1999. Т. 2. № 1–2. С. 34–42.
8. Мацевитый Ю. М., Сафонов Н. А., Ганчин В. В. К решению нелинейных обратных граничных задач теплопроводности. *Пробл. машиностроения*. 2016. Т. 19. № 1. С. 28–36. <https://doi.org/10.15407/pmach2016.01.028>
9. Graham N. Y. Smoothing with Periodic Cubic Splines. *Bell System Techn. J.* 1983. Vol. 62. P. 101–110. <https://doi.org/10.1002/j.1538-7305.1983.tb04381.x>
10. Reinsch C. H. J. Smoothing by Spline Function. *Numerische Mathematik*. 1967. Vol. 10. P. 77–183. <https://doi.org/10.1007/BF02162161>

Поступила в редакцию 29.05.2019

Розв'язання нестационарних обернених задач теплопровідності для багаточарових тіл на основі ефективного пошуку регуляризуючого параметра

¹Ю. М. Мацевитий, ²В. М. Сіренко, ¹А. О. Костіков, ¹М. О. Сафонов, ¹В. В. Ганчин

¹ Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України,
61046, Україна, м. Харків, вул. Пожарського, 2/10

² Державне підприємство «Конструкторське бюро «Південне» ім. М. К. Янгеля»,
49008, Україна, м. Дніпро, вул. Криворізька, 3

У статті для отримання стійкого розв'язання оберненої задачі теплопровідності (ОЗТ) застосовується метод регуляризації А. М. Тихонова з ефективним алгоритмом пошуку регуляризуючого параметра. Шукані тепловий потік на границі та термічний контактний опір за часовою координатою апроксимуються сплайнами Шьонберга третього ступеня. Як стабілізуючий функціонал використовується сума квадратів шуканої величини, її першої та другої похідних. Як об'єкт дослідження розглядаються багатошарові пластини або оболонки, до яких можна віднести і корпус твердопаливних ракетних двигунів. У першому наближенні задача розглядається в одновимірній нестационарній лінійній постановці. Співвідношення товщини оболонки до її радіуса будемо вважати таким, що в рівнянні теплопровідності кривизною оболонки можна знехтувати і розглядати її як плоску пластину. Таке припущення вибрано для спрощення викладення матеріалу і не обмежує застосовності викладеної методики в разі осьової симетрії оболонки, а також під час перекладу математичної моделі з прямокутної в циліндричну систему координат. Розглядаються три обернені задачі. У перших двох визначаються теплові потоки в складеному тілі з ідеальним і реальним тепловим контактом. У третій ОЗТ за реального теплового контакту визначається термічний контактний опір. Теплові потоки в багатошарових тілах розглядаються у вигляді лінійних комбінацій сплайнів Шьонберга третього ступеня з невідомими коефіцієнтами, які обчислюються шляхом розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Ця система є наслідком необхідної умови мінімуму функціонала, в основу якого покладено принцип найменших квадратів відхилення модельованої температури від температури, отриманої в результаті теплофізичного експерименту. Для регуляризації розв'язків ОЗТ використовується стабілізуючий функціонал з параметром регуляризації як мультиплікативним множником. Він являє собою суму квадратів теплових потоків, їх перших і других похідних з відповідними множниками. Ці множники вибираються згідно із задалегідь відомими властивостями шуканого розв'язку. Пошук регуляризуючого параметра здійснюється за допомогою алгоритму, аналогічного алгоритму пошуку кореня нелінійного рівняння.

Ключові слова: обернена задача теплопровідності, тепловий потік, термічний контактний опір, метод регуляризації А. М. Тихонова, функціонал, стабілізатор, параметр регуляризації, ідентифікація, апроксимація, сплайн Шьонберга третього ступеня.