

УДК 539.3

ХАОТИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ КИНЕМАТИЧЕСКИ ВОЗБУЖДАЕМОЙ ПОЛОГОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ

К. В. Аврамов, д-р техн. наук
kvavramov@gmail.com
 ORCID: 0000-0002-8740-693X

К. Ф. Чешко
cheshko.ks@gmail.com
 ORCID: 0000-0001-8662-4209

О. Ф. Полищук,
 канд. техн. наук
PolischukOleg@nas.gov.ua
 ORCID: 0000-0003-1266-9847

Институт проблем
 машиностроения
 им. А. Н. Подгорного
 НАН Украины,
 61046, Украина, г. Харьков,
 ул. Пожарского, 2/10

Исследуются вынужденные колебания консольной пологой оболочки постоянной кривизны. Эти движения возбуждаются кинематическим периодическим движением заделки. Для описания геометрически нелинейного деформирования используется нелинейная теория оболочек Донелла. Для построения нелинейной динамической системы с конечным числом степеней свободы применяется метод заданных форм. Так как собственные частоты продольных и крутильных колебаний значительно выше изгибных, то инерционные силы в продольном и крутильном направлениях не учитываются. Поэтому обобщенные координаты продольных и крутильных колебаний выражаются через изгибные. В результате, получена нелинейная динамическая система относительно изгибных обобщенных координат. Для расчета собственных форм линейных колебаний, по которым раскладывается нелинейная динамическая задача, используется метод Релея-Ритца. Тогда удовлетворяются только кинематические граничные условия. При сходимости решения силовые граничные условия выполняются автоматически. Для исследования сходимости собственных частот проводились расчеты с различным числом базисных функций. В качестве базисных функций используются В-сплайны. Проводится сравнение с экспериментальными данными анализа собственных частот, опубликованными авторами ранее. Для численного анализа нелинейных периодических колебаний решается двухточечная краевая задача для обыкновенных дифференциальных уравнений методом пристрелки. Устойчивость периодических движений и их бифуркации оцениваются по величинам мультипликаторов. Для исследования бифуркаций периодических колебаний применяется метод продолжения решения по параметру. В области основного резонанса обнаружены седло-узловые бифуркации, бифуркации удвоения периода и бифуркации Неймарка-Сакера. Для исследования установившихся почти периодических и хаотических уравнений рассчитываются сечения Пуанкаре, спектры характеристических показателей Ляпунова и спектральные плотности. В качестве сечений Пуанкаре используется стробоскопический фазовый портрет. Исследованы свойства установившихся колебаний при квазистатическом изменении частоты возмущающего воздействия.

Ключевые слова: нелинейные периодические колебания пологой оболочки, устойчивость колебаний, почти периодические колебания, хаотические колебания.

Введение

Оболочечные конструкции широко используются в аэрокосмической технике, энергомашиностроении, машиностроении, строительстве и нанотехнологиях. Эти конструкции обладают высокой жесткостью при относительно малой массе. Подробный обзор работ, проведенных в этой области, представлен в [1–3].

В данной статье построена нелинейная модель вынужденных колебаний кинематически возбуждаемой пологой оболочки при геометрически нелинейном деформировании. Для исследования резонансных вынужденных колебаний разработан численный подход, включающий решение двухточечной краевой задачи для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений и метод продолжения решений. С помощью этого подхода исследовано бифуркационное поведение резонансных колебаний и обнаружены седло-узловые бифуркации, бифуркации удвоения периода и бифуркации Неймарка-Сакера. Показано, что в результате некоторых из этих бифуркаций образуются хаотические колебания, которые исследованы численно. Обнаружены переходы порядок – хаос.

Постановка задачи и основные уравнения

Исследуем вынужденные колебания консольной цилиндрической панели (пологой оболочки)

© К. В. Аврамов, К. Ф. Чешко, О. Ф. Полищук, 2019

(рис. 1). Радіус кривизни середньої поверхні оболочкі постійний. Св'язем з оболочкою криволінійну систему координат x, θ, z . Ось x направим вздовж образуючої оболочкі перпендикулярно її заделки; ось θ направлена в окружном напрямленні оболочкі; ось z перпендикулярна середній поверхні оболочкі. Сторона $x=0$ зашкреплена, а все інші сторони свободні. Вынужденные колебания оболочкі возбуждаются кинематическим движением заделки. Зашкрепленная сторона движется так:

$$\eta(t) = \eta_0 \cos \omega t, \quad (1)$$

где η_0 – амплитуда колебаний заделки, ω – частота этих колебаний. Проекции перемещений средней поверхности вдоль осей x, θ, z обозначим через $u(x, \theta, t), v(x, \theta, t), w(x, \theta, t)$. Эти проекции перемещений являются основными неизвестными задачи. Если амплитуда кинематического возбуждения заделки η_0 мала, то колебания оболочкі будут линейными. Если увеличивать η_0 , можно достичь такого значения этого параметра, что радиальные перемещения $w(x, \theta, t)$ будут соизмеримы с толщиной оболочкі h . Тогда будет наблюдаться геометрически нелинейное деформирование. В этом случае деформации являются малыми, а перемещения умеренными. Так как деформации малы, то компоненты тензоров напряжений и деформаций удовлетворяют закону Гука.

Для описания геометрически нелинейного деформирования воспользуемся нелинейной теорией оболочек Донелла [3]

$$\epsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2; \quad \epsilon_{22} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2; \quad \epsilon_{12} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\partial w}{\partial x}; \quad (2)$$

$$k_1 = \frac{-\partial^2 w}{\partial \theta^2}; \quad k_2 = \frac{-\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad k_3 = \frac{-\partial^2 w}{\partial \theta \partial x},$$

где $\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{12}$ – элементы тензора деформаций средней поверхности оболочкі; k_1, k_2, k_3 – изменения кривизны средней поверхности. Потенциальную энергию оболочкі представим так [3]:

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{Eh}{2(1-\mu^2)} \int_0^a \int_0^b \left\{ \epsilon_{11}^2 + \epsilon_{22}^2 + 2\mu\epsilon_{11}\epsilon_{22} + \frac{1-\mu}{2}\epsilon_{12}^2 \right\} d\theta dx + \frac{D}{2} \int_0^a \int_0^b \left\{ k_1^2 + k_2^2 + 2\mu k_1 k_2 + \frac{1-\mu}{2}k_3^2 \right\} d\theta dx + \\ & + \frac{D}{R} \int_0^a \int_0^b \left\{ \epsilon_{11}k_1 + \epsilon_{22}k_2 + \mu\epsilon_{11}k_2 + \mu\epsilon_{22}k_1 + \frac{1-\mu}{2}\epsilon_{12}k_3 \right\} d\theta dx, \end{aligned} \quad (3)$$

где $D = \frac{Eh}{2(1-\mu^2)}$; E, μ – модуль Юнга и коэффициент Пуассона; a, b – длины сторон пологой оболочкі.

Кинетическую энергию оболочкі запишем в виде

$$T = \frac{\rho h}{2} \int_0^a \int_0^b \left((\dot{w} + \dot{\eta})^2 + \dot{u}^2 + \dot{v}^2 \right) d\theta dx, \quad (4)$$

где ρ – плотность материала оболочкі.

Для нахождения собственных частот и форм линейных колебаний оболочкі будем использовать метод Релея-Ритца, который требует удовлетворения только кинематическим граничным условиям. В этом случае при сходимости решения силовые граничные условия выполняются автоматически [2]. При использовании метода Релея-Ритца по трем свободным сторонам задаются только силовые граничные условия, которые можно не учитывать. Геометрические граничные условия на зашкрепленной стороне оболочкі принимают следующий вид:

$$w|_{x=0} = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial x}|_{x=0} = 0; \quad u|_{x=0} = 0; \quad v|_{x=0} = 0. \quad (5)$$

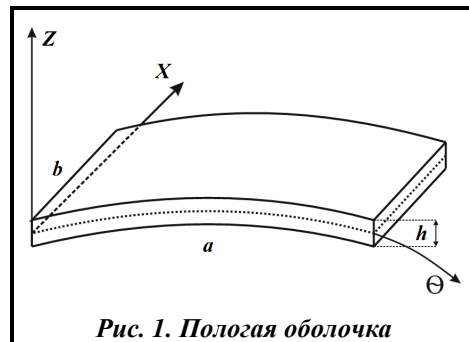


Рис. 1. Пологая оболочка

Модель нелинейных колебаний

Рассмотрим колебания оболочки при геометрически нелинейном деформировании. Тогда проекции перемещений представим в виде разложений по собственным формам колебаний так:

$$w(x, \theta, t) = \sum_{k=1}^{N_1} \xi_k(t) W_k(x, \theta); \quad u(x, \theta, t) = \sum_{k=1}^{N_2} \xi_{k+N_1}(t) U_k(x, \theta); \quad v(x, \theta, t) = \sum_{k=1}^{N_3} \xi_{k+N_1+N_2}(t) V_k(x, \theta), \quad (6)$$

где $N_* = N_1 + N_2 + N_3$ – число степеней свободы конструкции; $\xi = [\xi_1, \dots, \xi_{N_*}]$ – вектор обобщенных координат конструкции; (W_k, U_k, V_k) – собственная форма линейных колебаний. Для расчета собственных форм линейных колебаний применяется метод Релея-Ритца. Поэтому при хорошей аппроксимации решения собственные формы, входящие в разложение (6), удовлетворяют как геометрическим, так и силовым граничным условиям. Разложения (6) вводятся в кинетическую энергию (4). В результате кинетическая энергия, с учетом (2), приобретает вид квадратичной формы относительно обобщенных скоростей и $\dot{\eta}$ в виде (1): $T = T(\dot{\xi}_1, \dots, \dot{\xi}_{N_*}, \dot{\eta})$. Разложения (6) введем в потенциальную энергию (3). Тогда потенциальная энергия будет содержать квадратичные, кубические слагаемые и слагаемые четвертой степени относительно обобщенных координат. Потенциальную энергию представим так: $\Pi = \Pi(\xi_1, \dots, \xi_{N_*})$. Теперь составим уравнения Лагранжа движения конструкции. Эти уравнения в матричной форме примут следующий вид:

$$\begin{aligned} & \mathbf{M}^{(1)} \ddot{\mathbf{q}}^{(w)} + \mathbf{C}^{(1,1)} \dot{\mathbf{q}}^{(w)} + \mathbf{C}^{(1,2)} \dot{\mathbf{q}}^{(u)} + \mathbf{C}^{(1,3)} \dot{\mathbf{q}}^{(v)} + \mathbf{C}^{(1,4)}(\mathbf{q}^{(w)}) \dot{\mathbf{q}}^{(w)} + \mathbf{C}^{(1,5)}(\mathbf{q}^{(u)}) \dot{\mathbf{q}}^{(w)} + \mathbf{C}^{(1,6)}(\mathbf{q}^{(v)}) \dot{\mathbf{q}}^{(w)} + \\ & \quad + \mathbf{C}^{(1,7)}(\mathbf{q}^{(w)}, \mathbf{q}^{(w)}) \dot{\mathbf{q}}^{(w)} + \mathbf{F}^{(1)} \ddot{\eta} = \mathbf{0}, \\ & \mathbf{M}^{(2)} \ddot{\mathbf{q}}^{(u)} + \mathbf{C}^{(2,1)} \dot{\mathbf{q}}^{(w)} + \mathbf{C}^{(2,2)} \dot{\mathbf{q}}^{(u)} + \mathbf{C}^{(2,3)} \dot{\mathbf{q}}^{(v)} + \mathbf{C}^{(2,4)}(\mathbf{q}^{(w)}) \dot{\mathbf{q}}^{(u)} = \mathbf{0}, \\ & \mathbf{M}^{(3)} \ddot{\mathbf{q}}^{(v)} + \mathbf{C}^{(3,1)} \dot{\mathbf{q}}^{(w)} + \mathbf{C}^{(3,2)} \dot{\mathbf{q}}^{(u)} + \mathbf{C}^{(3,3)} \dot{\mathbf{q}}^{(v)} + \mathbf{C}^{(3,4)}(\mathbf{q}^{(w)}) \dot{\mathbf{q}}^{(v)} = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\mathbf{q}^{(w)} = (\xi_1, \dots, \xi_{N_1})^T$, $\mathbf{q}^{(u)} = (\xi_{N_1+1}, \dots, \xi_{N_1+N_2})^T$, $\mathbf{q}^{(v)} = (\xi_{N_1+N_2+1}, \dots, \xi_{N_*})^T$, $\mathbf{C}^{(1,1)}, \mathbf{C}^{(1,2)}, \mathbf{C}^{(1,3)}, \mathbf{C}^{(2,1)}, \mathbf{C}^{(2,2)}, \mathbf{C}^{(2,3)}, \mathbf{C}^{(3,1)}, \mathbf{C}^{(3,2)}, \mathbf{C}^{(3,3)}$ – подматрицы жесткости конструкции; $\mathbf{M}^{(1)}, \mathbf{M}^{(2)}, \mathbf{M}^{(3)}$ – подматрицы масс конструкции; $\mathbf{C}^{(1,4)}(\mathbf{q}^{(w)}), \mathbf{C}^{(1,5)}(\mathbf{q}^{(u)}), \mathbf{C}^{(1,6)}(\mathbf{q}^{(v)}), \mathbf{C}^{(2,4)}(\mathbf{q}^{(w)}), \mathbf{C}^{(3,4)}(\mathbf{q}^{(w)})$ – матрицы-функции, элементы которых являются линейными функциями соответствующих обобщенных координат; $\mathbf{C}^{(1,7)}(\mathbf{q}^{(w)}, \mathbf{q}^{(w)})$ – матрица-функция, элементы которой являются квадратичной формой обобщенных координат.

Для тонких оболочек частоты продольных и крутильных колебаний значительно выше изгибных. Поэтому во втором и третьем матричных уравнениях системы (7) пренебрежем инерционными слагаемыми. Тогда второе и третье матричные уравнения системы (7) можно переписать так:

$$\mathbf{q}^{(u)} = \boldsymbol{\alpha}^{(1)} \mathbf{q}^{(w)} + \boldsymbol{\beta}^{(1)}(\mathbf{q}^{(w)}) \dot{\mathbf{q}}^{(w)}; \quad \mathbf{q}^{(v)} = \boldsymbol{\alpha}^{(2)} \mathbf{q}^{(w)} + \boldsymbol{\beta}^{(2)}(\mathbf{q}^{(w)}) \dot{\mathbf{q}}^{(w)}, \quad (8)$$

где $\boldsymbol{\alpha}^{(1)}, \boldsymbol{\alpha}^{(2)}$ – постоянные матрицы; $\boldsymbol{\beta}^{(1)}(\mathbf{q}^{(w)}), \boldsymbol{\beta}^{(2)}(\mathbf{q}^{(w)})$ – матрицы, элементы которых являются линейными функциями обобщенных координат. Уравнение (8) введем в первое матричное уравнение системы (7). Тогда в результате получим

$$\mathbf{M}^{(1)} \ddot{\mathbf{q}}^{(w)} + \mathbf{R} \dot{\mathbf{q}}^{(w)} + \mathbf{K}^{(1)} \mathbf{q}^{(w)} + \mathbf{K}^{(2)}(\mathbf{q}^{(w)}) \dot{\mathbf{q}}^{(w)} + \mathbf{K}^{(3)}(\mathbf{q}^{(w)}, \mathbf{q}^{(w)}) \dot{\mathbf{q}}^{(w)} + \mathbf{F}^{(1)} \ddot{\eta} = \mathbf{0}, \quad (9)$$

где $\mathbf{M}^{(1)}, \mathbf{R}, \mathbf{K}^{(1)}$ – постоянные матрицы; $\mathbf{K}^{(2)}(\mathbf{q}^{(w)})$ – матрица, элементы которой являются линейными функциями обобщенных координат.

В дальнейшем введем вектор безразмерных переменных и параметров

$$\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_{N_1}); \quad y_i = \frac{\xi_i}{h}; \quad i = 1, \dots, N_1; \quad \tau = \omega_1 t, \quad (10)$$

где ω_1 – первая собственная частота линейных колебаний. Динамическая система (9) относительно безразмерных переменных и параметров (10) примет следующий вид:

$$\hat{\mathbf{M}}^{(1)} \mathbf{y}'' + \hat{\mathbf{R}} \mathbf{y}' + \hat{\mathbf{K}}^{(1)} \mathbf{y} + \hat{\mathbf{K}}^{(2)}(\mathbf{y}) \mathbf{y}' + \hat{\mathbf{K}}^{(3)}(\mathbf{y}, \mathbf{y}) \mathbf{y}' = \hat{\mathbf{F}}^{(1)} \hat{\eta}_0 \hat{\omega}^2 \cos(\hat{\omega} \tau), \quad (11)$$

где $\mathbf{M}^{(1)} = m\hat{\mathbf{M}}^{(1)}$; $\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{m\omega_1} \mathbf{R}$; $\hat{\mathbf{K}}^{(1)} = \frac{1}{m\omega_1^2} \mathbf{K}^{(1)}$; $\hat{\mathbf{K}}^{(2)}(\mathbf{y}) = \frac{1}{m\omega_1^2} \mathbf{K}^{(2)}(\mathbf{q}^{(w)})$; $\hat{\mathbf{K}}^{(3)}(\mathbf{y}, \mathbf{y}) = \frac{1}{m\omega_1^2} \mathbf{K}^{(3)}(\mathbf{q}^{(w)}, \mathbf{q}^{(w)})$;

$\hat{\mathbf{F}}_1^{(1)} = \frac{1}{m} \mathbf{F}_1^{(1)}$; $\hat{\omega} = \frac{\omega}{\omega_1}$; $\hat{\eta}_0 = \frac{\eta_0}{h}$; m – масса оболочки.

Предположим, что в системе (11) найдены периодические колебания, которые представим так: $\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}(\tau + T)$, где $T = \frac{2\pi}{\omega}$ – период колебаний. Исследуем устойчивость найденных периодических движений. Для анализа устойчивости периодических колебаний динамическую систему (9) перепишем относительно фазовых координат $\mathbf{p} = (\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}})$ в векторной форме так:

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{f}(\mathbf{p}, t). \tag{12}$$

Теперь около периодического движения $\mathbf{p}_*(t) = (\mathbf{p}_*; \dot{\mathbf{p}}_*)$ введем вектор малых возмущений $\xi(t)$. Тогда вектор $\xi(t)$ удовлетворяет следующей системе уравнений в вариациях [4]:

$$\dot{\xi} = \mathbf{Df}(\mathbf{p}_*(t), t)\xi, \tag{13}$$

где $\mathbf{Df}(\mathbf{p}_*(t), t)$ – матрица Якоби векторной функции $\mathbf{f}(\mathbf{p}_*(t), t)$. Из решений уравнений (13) строится квадратная фундаментальная матрица $\Phi(t)$, которая удовлетворяет следующему матричному начальному условию: $\Phi(t) = \mathbf{E}$, где \mathbf{E} – единичная матрица. Матрица $\Phi(T)$ называется матрицей монодромии, а ее собственные значения – мультипликаторами ρ [4]

$$\text{Det}[\Phi(T) - \rho\mathbf{E}] = 0.$$

По величинам мультипликаторов оценим устойчивость периодического движения и его бифуркации.

При построении нелинейной динамической системы (9) используются собственные формы линейных колебаний, которые представлены в разложении (6). Для их расчета применяется метод Релея-Ритца [5]. Линейные колебания оболочки представим в виде

$$u = U(x, \theta)\cos(\omega t); \quad v = V(x, \theta)\cos(\omega t); \quad w = W(x, \theta)\cos(\omega t), \tag{14}$$

где $U(x, \theta), V(x, \theta), W(x, \theta)$ – функции, подлежащие определению. Они раскладываются по базисным функциям так:

$$W(x, \theta) = \sum_{k=1}^{N_1} A_k w_k(x, \theta); \quad U(x, \theta) = \sum_{k=1}^{N_2} A_{k+N_1} u_k(x, \theta); \quad V(x, \theta) = \sum_{k=1}^{N_3} A_{k+N_1+N_2} v_k(x, \theta), \tag{15}$$

где $u_k(x, \theta), v_k(x, \theta), w_k(x, \theta)$ – базисные функции, удовлетворяющие геометрическим граничным условиям (5); A_1, \dots, A_N – подлежащие расчету константы; $N = N_1 + N_2 + N_3$. Разложения (15) вводятся в (14). В качестве базисных функций используются В-сплайны [6, 7]. В работе [6] показана эффективность этого подхода. Тогда разложение (15) можно представить в виде

$$W(x, \theta) = \sum_{k_1=1}^{M_1+3} \sum_{k_2=1}^{M_2+3} a_{k_1 k_2}^{(w)} \bar{w}_{k_1 k_2}(x, \theta); \quad U(x, \theta) = \sum_{k_1=1}^{M_1+3} \sum_{k_2=1}^{M_2+3} a_{k_1 k_2}^{(u)} \bar{u}_{k_1 k_2}(x, \theta); \quad V(x, \theta) = \sum_{k_1=1}^{M_1+3} \sum_{k_2=1}^{M_2+3} a_{k_1 k_2}^{(v)} \bar{v}_{k_1 k_2}(x, \theta). \tag{16}$$

где $\bar{w}_{k_1 k_2}(x, \theta) = x^2 B_3\left(\frac{M_1 \theta}{a} + k_1 - 2\right) B_3\left(\frac{M_2 x}{b} + k_2 - 2\right)$; $\bar{u}_{k_1 k_2}(x, \theta) = \bar{v}_{k_1 k_2}(x, \theta) = x B_3\left(\frac{M_1 \theta}{a} + k_1 - 2\right) B_3\left(\frac{M_2 x}{b} + k_2 - 2\right)$;

$$B_3(\phi) = \begin{cases} 0, & |-\infty < \phi \leq -2 \\ 0.25(\phi + 2)^3, & | -2 < \phi \leq -1 \\ -0.75\phi^3 - 1.5\phi^2 + 1, & | -1 < \phi \leq 0 \\ 0.75\phi^3 - 1.5\phi^2 + 1, & | 0 < \phi \leq 1 \\ -0.25\phi^3 + 1.5\phi^2 - 3\phi + 2, & | 1 < \phi \leq 2 \\ 0, & | 2 < \phi \leq \infty \end{cases}, \quad M_1+3 - \text{число сплайнов в направлении } \theta;$$

M_2+3 – число сплайнов в направлении x ; $B_3(\phi)$ – сплайн Шенберга третьего порядка. Неизвестные параметры разложения (16) представим как $a = \left(a_{1,1}^{(w)}, \dots, a_{M_1+3, M_2+3}^{(w)}, a_{1,1}^{(u)}, \dots, a_{1,1}^{(v)}, \dots \right) = (a_1, \dots, a_N)$. Эти параметры описывают формы собственных колебаний, которые находятся из проблемы собственных значений $(K - \omega^2 M)a^T = 0$, где K, M – матрицы масс и жесткости.

Численный анализ вынужденных периодических колебаний

Исследуется оболочка, изготовленная из стали 10. Параметры оболочки принимались следующими: $E=2,06 \cdot 10^{11}$ Па; $\rho=7,856 \cdot 10^3$ кг/м³; $a=0,2$ м; $b=0,24$ м; $\mu=0,3$; $h=3 \cdot 10^{-3}$ м; $R=0,26$ м.

Линейные колебания этой оболочки исследовались экспериментально. Методика проведения эксперимента и результаты анализа линейных колебаний представлены в статье [8].

Для исследования колебаний пологой оболочки воспользуемся методом Релея-Ритца. Рассмотрим сходимости собственных частот. Для этого произведем расчеты для разного числа базисных функций в разложении (15). Результаты анализа собственных частот представлены в табл. 1. В таблице указано число слагаемых в разложении (15), при которых производились расчеты собственных частот. Номера первых десяти собственных частот даны в первом столбце. Во втором, третьем и четвертом столбцах показаны собственные частоты при $N_1 = N_2 = N_3 = 5$; $N_1 = N_2 = N_3 = 7$ и $N_1 = N_2 = N_3 = 8$ соответственно. Результаты расчетов, полученные с помощью программного комплекса ANSYS, представлены в пятом столбце таблицы. Итак, наблюдается сходимость полученных результатов, то есть результаты, полученные методом Релея-Ритца и данные, полученные с помощью ANSYS, близки. В шестом столбце таблицы – первые пять собственных частот, полученные экспериментально, в седьмом – относительная разница собственных частот δ , полученных экспериментально и с помощью программного комплекса ANSYS. Относительная разница собственных частот δ является допустимой.

Как следует из табл. 1, рассматриваемая оболочка чрезвычайно богата внутренними резонансами, которые удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\frac{3\omega_1}{\omega_3} = 0,91; \frac{2\omega_2}{\omega_3} = 0,97; \frac{3\omega_2}{\omega_5} = 1,01; \frac{2\omega_4}{\omega_6} = 1,01; \frac{2\omega_4}{\omega_7} = 0,93; \frac{2\omega_5}{\omega_9} = 1,006; \frac{\omega_6}{\omega_7} = 0,91; \frac{\omega_7}{\omega_8} = 0,98; \frac{\omega_8}{\omega_9} = 0,91$$

Внутренние резонансы существенно влияют на нелинейное деформирование конструкции [9].

Рассмотрим нелинейные колебания пологой консольной оболочки в условиях кинематического возбуждения заделки. В численных расчетах нелинейных колебаний амплитуды возмущающего воздействия принимались следующими: $\hat{\eta}_0 = 0,01$. Матрица \hat{R} в (11) приводилась к виду: $\hat{R} = \text{diag}(\alpha, \alpha, \dots, \alpha)$; $\alpha = 0,01$. В дальнейшем численно исследовались вынужденные нелинейные установившиеся колебания около второго основного резонанса $\omega = \omega_2 + \alpha$, где α – параметр расстройки, которая является малой величиной. В разложении (6) учтем первые пять собственных форм колебаний.

Таблица 1. Собственные частоты колебаний оболочки

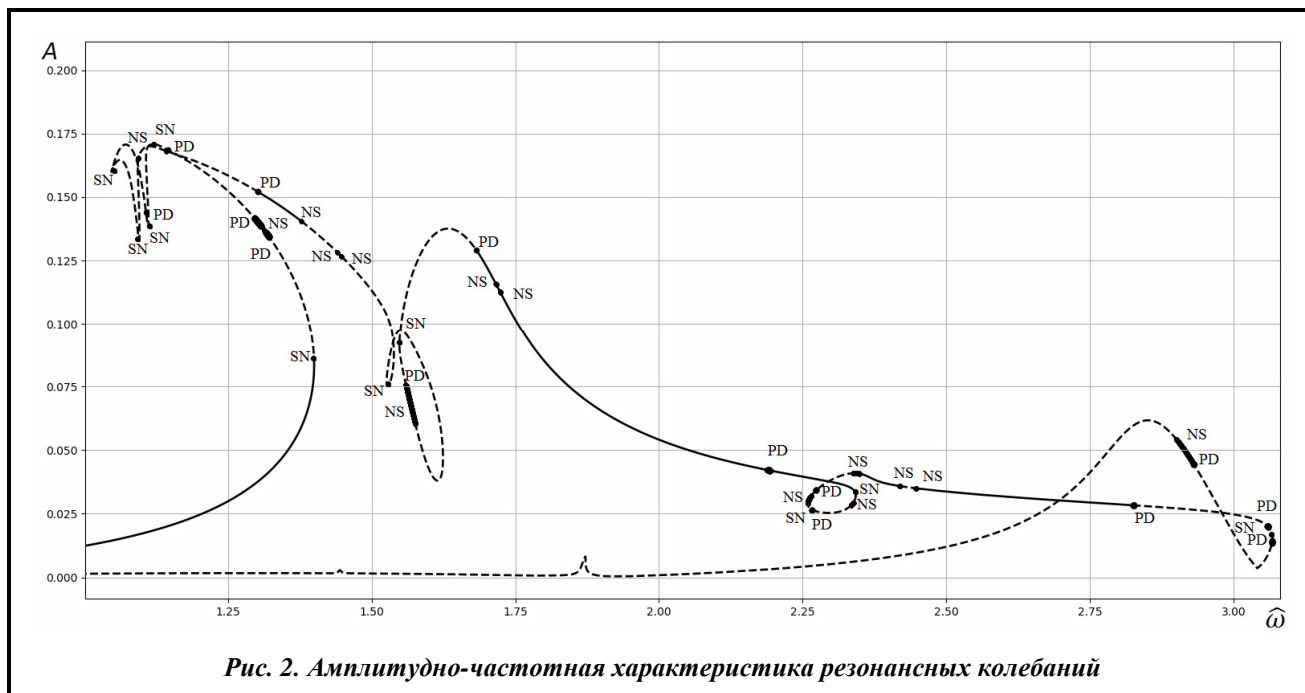
Собственные частоты	$N_1=N_2=N_3=5$	$N_1=N_2=N_3=7$	$N_1=N_2=N_3=8$	ANSYS	Эксперимент	δ
ω_1 , Гц	154,76	152,83	152,76	152,38	140,00	0.08
ω_2 , Гц	246,47	242,67	242,56	246,49	231,00	0.06
ω_3 , Гц	528,60	499,24	498,82	487,61	445,00	0.09
ω_4 , Гц	624,48	602,42	600,93	600,76	545,00	0.1
ω_5 , Гц	750,96	719,35	718,80	714,15	714,00	$2,1 \cdot 10^{-4}$
ω_6 , Гц	1345,94	1209,47	1178,90	1153,30	–	–
ω_7 , Гц	1386,65	1298,25	1287,23	1281,90	–	–
ω_8 , Гц	1457,81	1303,60	1303,03	1295,60	–	–
ω_9 , Гц	1728,89	1429,28	1428,60	1419,80	–	–
ω_{10} , Гц	2047,07	1659,62	1616,69	1584,30	–	–

Для исследования резонансных периодических колебаний решалась двухточечная краевая задача (12) для системы обыкновенных дифференциальных уравнений методом пристрелки. Для расчета периодических колебаний в широком диапазоне частоты возмущающего воздействия $\hat{\omega}$ использовался метод продолжения решения по параметру. Совместное применение метода пристрелки и алгоритма продолжения решения по параметру для исследования периодических нелинейных колебаний обсуждалось в монографии [9]. Для анализа устойчивости периодических колебаний рассчитывались мультипликаторы.

В процессе численного анализа установившихся колебаний около второго основного резонанса было установлено, что обобщенные координаты y_1 и y_4 являются пассивными координатами и практически не влияют на динамику системы. Под пассивными координатами понимаются обобщенные координаты с малыми амплитудами, которые мало влияют на динамику системы [9]. Поэтому в дальнейшем будет исследоваться нелинейная динамика системы с тремя степенями свободы y_2, y_3, y_5 . Амплитудно-частотная характеристика резонансных периодических колебаний приводится на рис. 2. Здесь по оси ординат откладывается размах обобщенной координаты y_2 , который обозначается A , а по оси абсцисс – частота возмущающего воздействия $\hat{\omega}$. Сплошной линией показываются устойчивые колебания, а пунктирной – неустойчивые.

Теперь рассмотрим бифуркационное поведение периодических колебаний, которое представлено на рис. 2. Здесь наблюдаются седло-узловые бифуркации, бифуркации удвоения периода и бифуркации Неймарка-Сакера, которые обозначаются через SN, PD и NS. Значение этих бифуркаций для возникновения субгармонических, почти периодических и хаотических колебаний рассмотрено в монографии [9].

В точках бифуркаций удвоения периода (PD) возникают субгармонические колебания второго порядка. Такие колебания представлены на рис. 3 жирными линиями. Устойчивые субгармонические колебания обозначены сплошной линией, а неустойчивые – пунктирной.



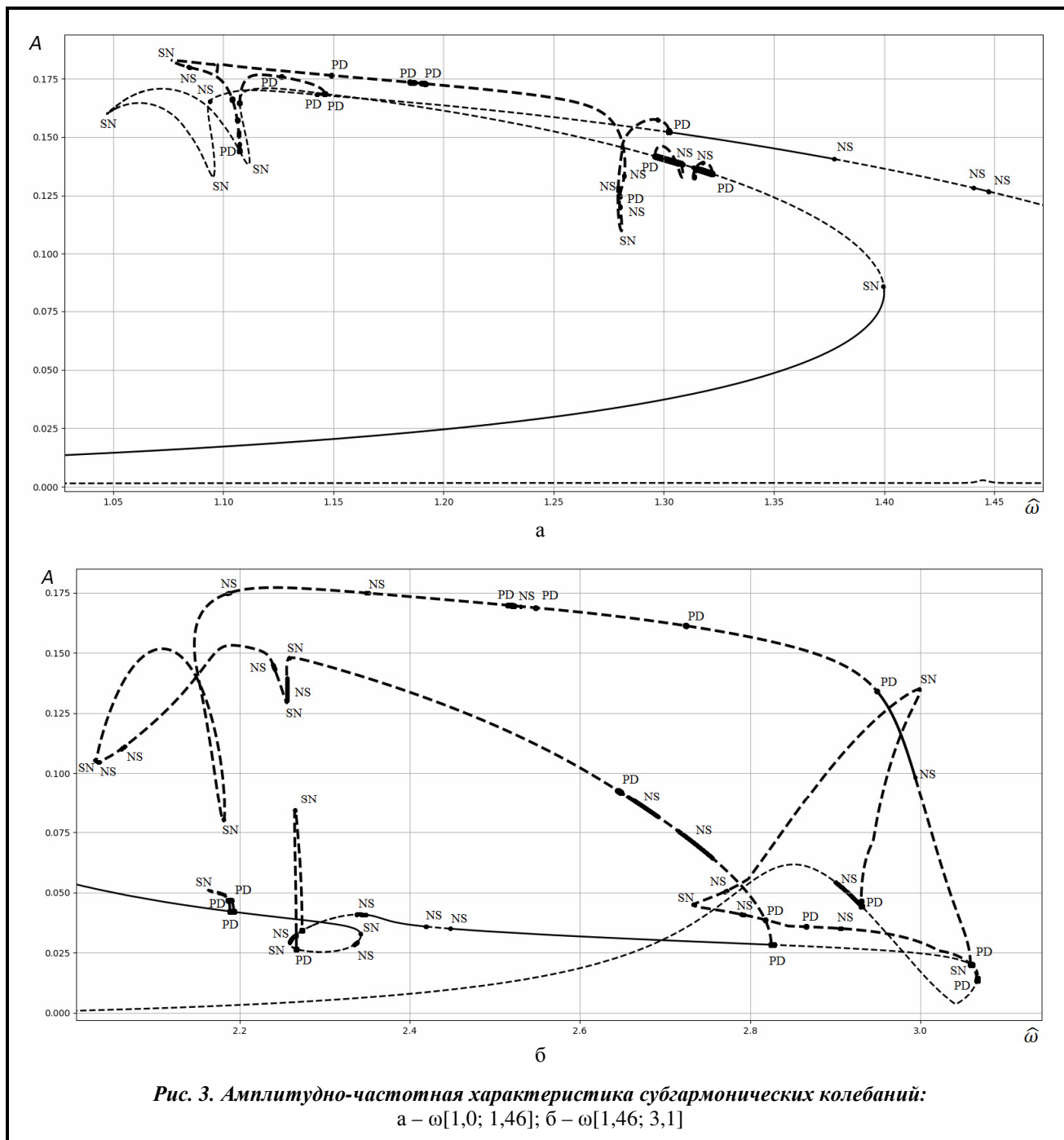


Рис. 3. Амплитудно-частотная характеристика субгармонических колебаний:
 а – $\omega \in [1,0; 1,46]$; б – $\omega \in [1,46; 3,1]$

Численное моделирование хаотических колебаний

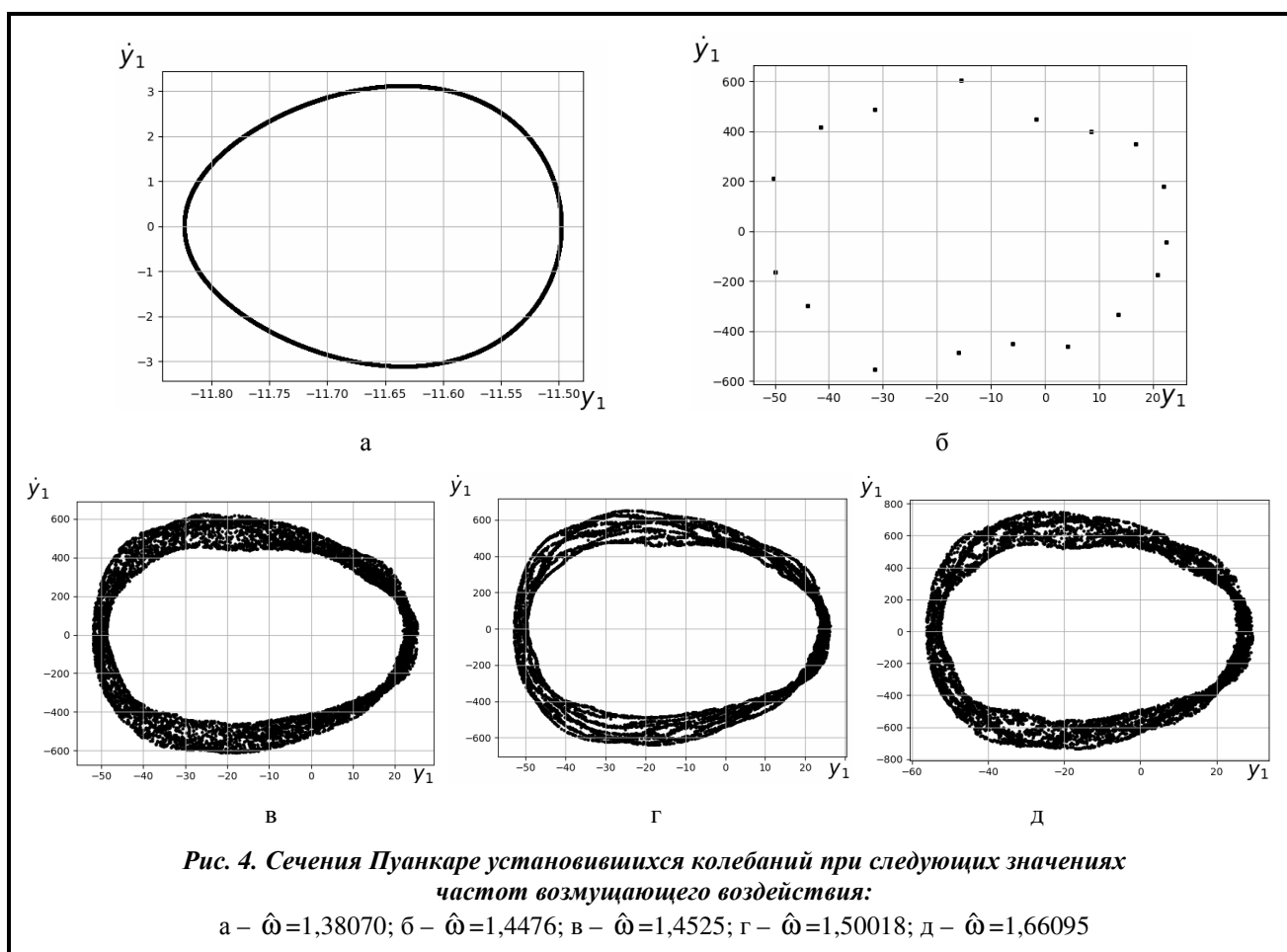
Как следует из рис. 2, в области основного резонанса $\hat{\omega} \in [1,41; 1,72]$ не существует устойчивых периодических колебаний. Поэтому в данном частотном диапазоне будем исследовать другие виды установившихся движений. Для этого проинтегрируем систему уравнений (12) при разных значениях частоты возмущающего воздействия $\hat{\omega}$ методом Рунге-Кутты с переменным шагом. В качестве начальных условий для численного интегрирования используем начальные условия неустойчивых периодических колебаний, которые приведены на рис. 2. Результаты численного интегрирования на временном интервале $\tau \in [0; 1000T]$ рассматриваются как переходной процесс и в анализе не учитываются. Анализуются результаты численного интегрирования при $\tau > 1000T$.

Для исследования установившихся колебаний анализу подвергались сечения Пуанкаре, спектр характеристических показателей Ляпунова и спектральные плотности. В качестве сечений Пуанкаре использовался стробоскопический фазовый портрет. Численные методы для расчета отмеченных выше трех характеристик обсуждаются в монографии [7].

Результаты расчета спектра характеристических показателей Ляпунова $\lambda_i; i = 1, 2, \dots$ при разных значениях частот возмущающей нагрузки представлены в табл. 2. Теперь исследуем свойства установившихся колебаний при квазистатическом изменении частоты возмущающего воздействия $\hat{\omega}$.

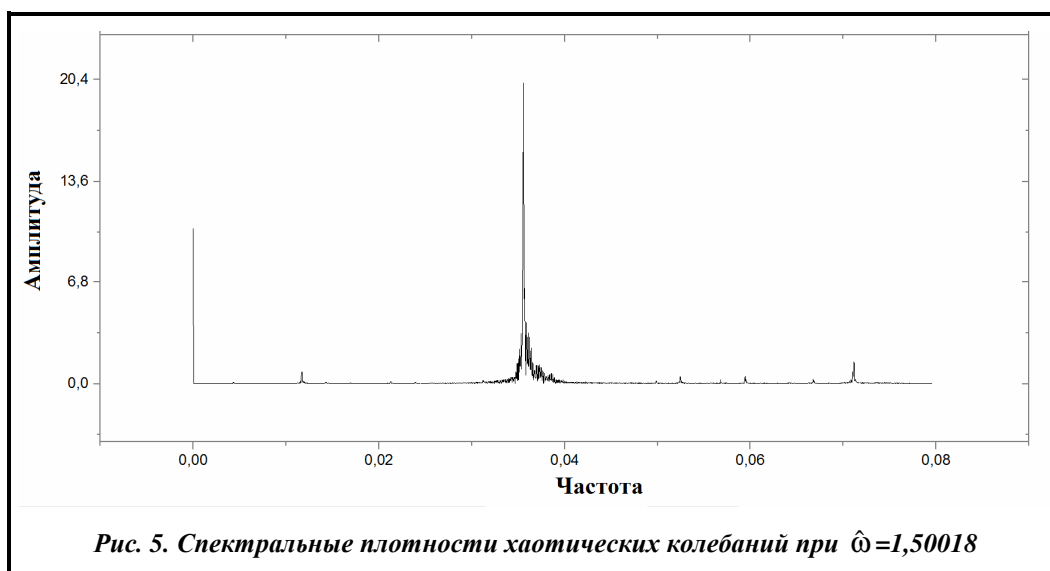
Таблица 2. Спектр характеристических показателей Ляпунова

ω	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
1,4476	$-4,1095 \cdot 10^{-2}$	$-5,916 \cdot 10^{-2}$	$-5,918 \cdot 10^{-2}$	-0,211
1,4525	$1,028 \cdot 10^{-2}$	$-5,800 \cdot 10^{-2}$	$-3,275 \cdot 10^{-2}$	-0,156
1,4727	$2,859 \cdot 10^{-2}$	$-7,0614 \cdot 10^{-2}$	$-7,5651 \cdot 10^{-2}$	-0,1299
1,500	$2,327 \cdot 10^{-2}$	$-1,624 \cdot 10^{-3}$	$-2,205 \cdot 10^{-2}$	-0,1622
1,560	$2,624 \cdot 10^{-2}$	$1,580 \cdot 10^{-3}$	$-2,747 \cdot 10^{-2}$	-0,1512
1,660	$1,028 \cdot 10^{-4}$	$-3,186 \cdot 10^{-3}$	$-3,235 \cdot 10^{-3}$	$-3,328 \cdot 10^{-3}$



Как следует из результатов численного моделирования, при $\hat{\omega}=1,38070$ в динамической системе наблюдаются почти периодические колебания. Сечения Пуанкаре этих движений приводятся на рис. 4. На этих и последующих рисунках будут показываться по 4000 точек на сечениях Пуанкаре. На рис. 4, а представлено сечение инвариантного тора. При увеличении частоты возмущающего воздействия в системе наблюдается явление синхронизации на инвариантном торе, то есть на этом торе в фазовом пространстве находятся субгармонические колебания высокого порядка. На рис. 4, б показаны сечения Пуанкаре субгармонических колебаний 17-го порядка. В этом случае максимальный ха-

ракетрический показатель отрицательный (табл. 2). При дальнейшем увеличении частоты возмущающего воздействия наблюдаются хаотические колебания. Образование хаотических колебаний после синхронизации на инвариантном торе называют переход порядок – хаос, что описано в монографии [9]. Сечения Пуанкаре хаотических колебаний при $\hat{\omega}=1,4525$; $\hat{\omega}=1,50018$; $\hat{\omega}=1,66095$ приводятся на рис. 4, в, г, д. Результаты расчета спектра характеристических показателей Ляпунова таких колебаний показаны в табл. 2. Как следует из этой таблицы, максимальные характеристические показатели являются положительными, что свидетельствует о хаотическом характере колебаний. На рис. 5 представлены спектральные плотности хаотических колебаний при $\hat{\omega}=1,50018$. Как следует из результатов расчета, спектральные плотности содержат три дельта-амплитуды. Около одной из этих амплитуд (мажорантной) наблюдается непрерывный спектр, что говорит о хаотическом характере установившихся колебаний.



Выводы

Получена модель вынужденных нелинейных колебаний кинематически возбуждаемых пологих оболочек при геометрически нелинейном деформировании. В работе методом заданных форм получена нелинейная динамическая система с тремя степенями свободы, описывающая второй основной резонанс вынужденных колебаний. В области основного второго резонанса наблюдаются седло-узловые бифуркации, бифуркации удвоения периода и бифуркации Неймарка-Сакера, которые приводят к образованию почти периодических и хаотических колебаний. Исследуются почти периодические и хаотические колебания, которые наблюдаются в области второго основного резонанса. Обнаружен переход порядок – хаос при квазистатическом изменении частоты возмущающего воздействия.

Литература

1. Аврамов К. В., Михлин Ю. В. Нелинейная динамика упругих систем: в 2-х т. Т. 2: Приложения. М.: Инт компьютер. исследований, 2015. 700 с.
2. Amabili M., Paidoussis M. P. Review of studies on geometrically nonlinear vibrations and dynamics of circular cylindrical shells and panels, with and without fluid structure interaction. *Appl. Mech. Reviews*. 2003. Vol. 56. Iss. 4. P. 349–381. <https://doi.org/10.1115/1.1565084>
3. Amabili M. Nonlinear vibrations and stability of shells and plates. Cambridge: Cambridge University Press, 2008. 374 p. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511619694>
4. Parker T. S., Chua L. O. Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems. New York: Springer, 1989. 348 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-3486-9>
5. Meirovitch L. Elements of vibration analysis. New York: McGraw-Hill Publishing Company, 1986. 495 p.
6. Awrejcewicz J., Kurpa L., Osetrov A. Investigation of the stress-strain state of the laminated shallow shells by R-functions method combined with spline-approximation. *J. Appl. Math. and Mech.* 2001. Vol. 6. P. 458–467. <https://doi.org/10.1002/zamm.201000164>

7. Hollig K., Reif U., Wipper J. Weighted extended B-spline approximation of Dirichlet problems. *J. on Numerical Analysis*. 2001. Vol. 39. No. 2. P. 442–462. <https://doi.org/10.1137/S0036142900373208>
8. Чешко К. Ф., Полищук О. Ф., Аврамов К. В. Экспериментальный и численный анализ свободных колебаний пологой оболочки. *Вісн. НТУ «ХПИ»*. 2017. № 40. С. 81–85. <https://doi.org/10.20998/2078-9130.2017.40.119720>
9. Аврамов К. В., Михлин Ю. В. Нелинейная динамика упругих систем: в 2-х т. Т. 1. Модели, методы, явления. М.: Ин-т компьютер. исследований, 2015. 716 с.

Поступила в редакцию 14.03.2019

Хаотичні коливання кінематично збуреної пологої оболонки при геометрично нелінійному деформуванні

К. В. Аврамов, К. Ф. Чешко, О. Ф. Поліщук

Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України,
61046, Україна, м. Харків, вул. Пожарського, 2/10

Досліджуються вимушені коливання консольної пологої оболонки постійної кривизни. Ці рухи збуджуються кінематичним періодичним рухом зацементування. Для опису геометрично нелінійного деформування використовується нелінійна теорія оболонок Донелла. Для побудови нелінійної динамічної системи зі скінченним числом ступенів свободи застосовується метод заданих форм. Оскільки власні частоти позовжніх і крутильних коливань значно вище згинальних, то інерційні сили в позовжньому і крутильному напрямках не враховуються. Тому узагальнені координати позовжніх і крутильних коливань виражаються через згинальні. Отже, отримана нелінійна динамічна система щодо згинальних узагальнених координат. Для розрахунку власних форм лінійних коливань, за якими розкладається нелінійна динамічна задача, використовується метод Релея-Рітца. Тоді задовольняються лише кінематичні граничні умови. За збіжності розв'язку силові граничні умови виконуються автоматично. Для дослідження збіжності власних частот проводилися розрахунки з різним числом базисних функцій. Як базисні функції використані B-сплайни. Проведено порівняння з експериментальними даними аналізу власних частот, опублікованими авторами раніше. Для числового аналізу нелінійних періодичних коливань розв'язана двоточкова крайова задача для звичайних диференціальних рівнянь методом пристрілки. Стійкість періодичних рухів і їх біфуркації оцінено за величинами мультиплікаторів. Для дослідження біфуркацій періодичних коливань застосовано метод продовження розв'язку по параметру. В області основного резонансу виявлено сідло-вузлові біфуркації, біфуркації подвоєння періоду та біфуркації Неймарка-Сакера. Для дослідження сталих майже періодичних і хаотичних коливань розраховано перетини Пуанкаре, спектри характеристичних показників Ляпунова і спектральні щільності. Як перетини Пуанкаре використано стробоскопічний фазовий портрет. Досліджено властивості сталих коливань за квазістатичної зміни частоти збуджуючої дії.

Ключові слова: нелінійні періодичні коливання пологої оболонки, стійкість коливань, майже періодичні коливання, хаотичні коливання.