

УДК 53:002

НЕЛОКАЛЬНАЯ АНИЗОТРОПНАЯ ОБОЛОЧЕЧНАЯ МОДЕЛЬ ЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ МНОГОСТЕННЫХ УГЛЕРОДНЫХ НАНОТРУБОК

¹ К. В. Аврамов, д-р техн. наукkvavramov@gmail.com

ORCID: 0000-0002-8740-693X

² Б. Н. Кабылбекова, канд. техн. наукbalzhan.kbn@bk.ru

ORCID: 0000-0001-8461-8008

² К. К. Сейтказенова, д-р техн. наук² Д. С. Мырзалиев, канд. техн. наук² В. Н. Печерский, д-р техн. наук

¹ Институт проблем машиностроения
им. А. Н. Подгорного НАН Украины,
61046, Украина, г. Харьков,
ул. Пожарского, 2/10

² Южно-Казахстанский государственный
университет им. М. Ауэзова
160012, Казахстан, г. Шымкент,
пр. Тауке-хана, 5

Рассматривается многостенная шарнирно-опертая углеродистая нанотрубка. Ее колебания будут изучаться в цилиндрической системе координат. Упругие постоянные в законе Гука зависят от диаметра стенки углеродистой нанотрубки, поэтому каждая стенка имеет свои упругие постоянные. Колебания стенок нанотрубок описываются оболочечной теорией Сандерса-Коутера. Для вывода уравнений в частных производных, описывающих автоколебания, применяется вариационный подход. Уравнения колебаний в частных производных выводятся относительно трех проекций перемещений. В модели учитываются силы Ван-дер-Ваальса между стенками нанотрубки. Три проекции перемещений раскладываются по базисным функциям. Выбрать базисные функции, удовлетворяющие одновременно геометрическим и естественным граничным условиям, не удалось. Поэтому выбираются базисные функции, удовлетворяющие только геометрическим граничным условиям. Для получения линейной динамической системы с конечным числом степеней свободы применяется метод взвешенных невязок. Для вывода основных соотношений метода взвешенных невязок применяются методы вариационного исчисления. Проведен анализ собственных частот колебаний одностенных углеродистых нанотрубок в зависимости от числа волн в окружном направлении. При числе волн в окружном направлении от 2 до 4 наблюдаются минимальные собственные частоты колебаний нанотрубок. Эти числа меньше, чем для собственных частот колебаний машиностроительных оболочек. Исследовались трехстенные анизотропные модели нанотрубок. В собственных формах наблюдается взаимодействие между базисными функциями с разным числом волн в продольном направлении. Этого явления не наблюдалось в изотропной модели нанотрубки. Появление таких колебаний является следствием анизотропии конструкции.

Ключевые слова: нанотрубка, оболочечная модель Сандерса-Коутера, силы Ван-дер-Ваальса, нелокальная упругость.

Введение

Колебания углеродистых нанотрубок (УНТ) чрезвычайно важны для многих наномеханических устройств, таких, как детекторы заряда, датчики, прибор для автоэлектронной эмиссии [1]. Колебания УНТ часто наблюдаются во время обработки и получения нанокompозитов. Волновые процессы в наноустройствах, содержащих УНТ, подробно изучаются в статьях [2, 3, 4]. Моделирование УНТ можно условно разделить на две группы подходов. Первая группа – это моделирование на основе молекулярной динамики [5, 6], требующее огромных ресурсов компьютеров. Вторая группа – построение континуальных моделей на основании механики деформируемого твердого тела. Не много работ посвящено построению оболочечных моделей колебаний УНТ. В статье [7] используется линейная оболочечная модель для описания колебаний шарнирно-опертых нанотрубок. В статье [8] получена модель линейных колебаний УНТ на основании теории оболочек Флюгге с учетом нелокальной упругости. При исследовании геометрически нелинейного динамического деформирования УНТ в основном используются стержневые модели. В статье [9] континуальные нелинейные балочные модели применяются для моделирования нелинейных колебаний многостенных УНТ. Нелинейные колебания многостенных УНТ, вложенных в упругую среду, рассматриваются в [10]. Нелинейные колебания с большими амплитудами двустенных УНТ исследуются методом конечных элементов в [11]. Вынужденные колебания двустенных УНТ рассматриваются в статье [12].

© К. В. Аврамов, Б. Н. Кабылбекова, К. К. Сейтказенова, Д. С. Мырзалиев, В. Н. Печерский, 2020

В настоящей статье строится анизотропная оболочечная модель колебаний многостенной нанотрубки. В основе этой модели лежит оболочечная теория Сандерса-Коитера. Взаимодействие между стенками описывается силами Ван-дер-Ваальса. Выведена система уравнений в частных производных, описывающая колебания УНТ. Для получения динамической системы с конечным числом степеней свободы применяется обобщенный метод Галеркина. Исследуются свойства линейных колебаний многостенных УНТ.

Постановка задачи и уравнения линейных колебаний

Рассматривается многостенная УНТ, (рис. 1). Число ее стенок равняется N . Колебания этой многостенной УНТ будут изучаться в цилиндрической системе координат (x, θ, z) , рис. 2. На рисунке показана одна из стенок УНТ, которую обозначим номером i .

Индивидуальные деформации стенок нанотрубки связаны между собой благодаря силам Ван-дер-Ваальса. Такая модель деформирования объясняется тем, что силы Ван-дер-Ваальса значительно меньше ковалентных связей соседних атомов углерода. Колебания каждой стенки углеродистой нанотрубки будут изучаться на основании оболочечной модели [13]. Три проекции перемещений точек срединной поверхности i -й стенки обозначим через $u_i(x, \theta, t), v_i(x, \theta, t), w_i(x, \theta, t)$ (рис. 2). Каждая стенка нанотрубки движется относительно других стенок. Для описания упругости стенок воспользуемся нелокальным анизотропным законом Гука [14, 15]. Упругие постоянные в законе Гука зависят от диаметра стенки [16, 17]. Поэтому каждая стенка имеет свои упругие постоянные. Закон Гука для i -й стенки имеет следующий вид:

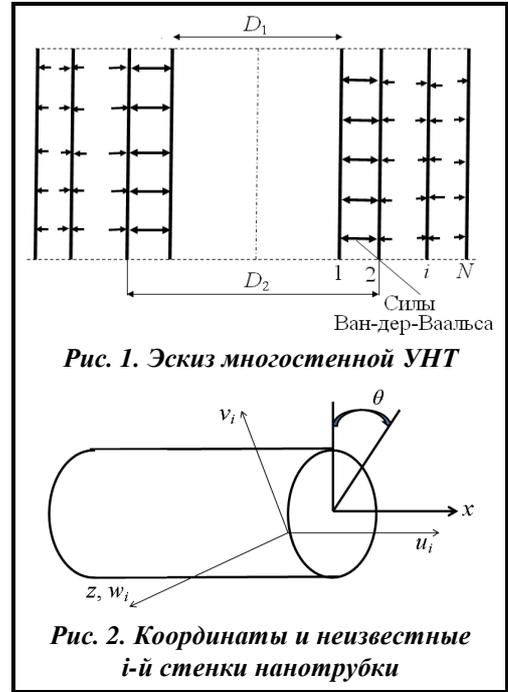


Рис. 1. Эскиз многостенной УНТ

Рис. 2. Координаты и неизвестные i -й стенки нанотрубки

$$\sigma_{xx}^{(i)} - \mu \nabla^2 \sigma_{xx}^{(i)} = \frac{1}{h} (Y_{11}^{(i)} \epsilon_{xx}^{(i)} + Y_{12}^{(i)} \epsilon_{\theta\theta}^{(i)} + Y_{13}^{(i)} \gamma_{x\theta}^{(i)}),$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(i)} - \mu \nabla^2 \sigma_{\theta\theta}^{(i)} = \frac{1}{h} (Y_{12}^{(i)} \epsilon_{xx}^{(i)} + Y_{22}^{(i)} \epsilon_{\theta\theta}^{(i)} + Y_{23}^{(i)} \gamma_{x\theta}^{(i)}),$$

$$\sigma_{x\theta}^{(i)} - \mu \nabla^2 \sigma_{x\theta}^{(i)} = \frac{1}{h} (Y_{13}^{(i)} \epsilon_{xx}^{(i)} + Y_{23}^{(i)} \epsilon_{\theta\theta}^{(i)} + Y_{33}^{(i)} \gamma_{x\theta}^{(i)}), \tag{1}$$

где $\nabla^2(\cdot) = \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\cdot)}{R_i^2 \partial \theta^2}$; $\sigma_{xx}^{(i)}, \sigma_{\theta\theta}^{(i)}, \sigma_{x\theta}^{(i)}$ – элементы тензора напряжений; $\epsilon_{xx}^{(i)}, \epsilon_{\theta\theta}^{(i)}, \epsilon_{x\theta}^{(i)}$ – элементы тензора деформаций; $\mu = e_0 a$ – коэффициент тонкой пленки; R_i – радиус срединной поверхности i -й нанотрубки; h – толщина каждой стенки нанотрубки; $Y_{jk}^{(i)}$ – анизотропные упругие постоянные i -й стенки. Как следует из [16, 17], выполняются следующие соотношения: $Y_{13}^{(i)} = Y_{31}^{(i)} = -Y_{23}^{(i)} = -Y_{32}^{(i)}$.

Деформации $\epsilon_{xx}^{(i)}, \epsilon_{\theta\theta}^{(i)}, \epsilon_{x\theta}^{(i)}$ i -й стенки на расстоянии z от срединной поверхности описываются так:

$$\epsilon_{xx}^{(i)} = \epsilon_{x,0}^{(i)} + z k_x^{(i)}, \quad \epsilon_{\theta\theta}^{(i)} = \epsilon_{\theta,0}^{(i)} + z k_\theta^{(i)}, \quad \gamma_{x\theta}^{(i)} = \gamma_{x\theta,0}^{(i)} + z k_{x\theta}^{(i)},$$

где $\epsilon_{x,0}^{(i)}, \epsilon_{\theta,0}^{(i)}, \gamma_{x\theta,0}^{(i)}$ – деформации срединной поверхности одной из стенок нанотрубки; $k_x^{(i)}, k_\theta^{(i)}, k_{x\theta}^{(i)}$ – изменения кривизны и кручения срединной поверхности.

Как было показано в [13], УНТ хорошо описываются теорией Сандерса-Коитера. Тогда элементы тензора деформаций, величины $k_x^{(i)}, k_\theta^{(i)}, k_{x\theta}^{(i)}$ и проекции перемещений удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x,0}^{(i)} &= \frac{\partial u_i}{\partial x}, \quad \varepsilon_{\theta,0}^{(i)} = \frac{\partial v_i}{R_i \partial \theta} + \frac{w_i}{R_i}, \quad \gamma_{x\theta,0}^{(i)} = \frac{\partial u_i}{R_i \partial \theta} + \frac{\partial v_i}{\partial x}, \\ k_x^{(i)} &= \frac{-\partial^2 w_i}{\partial x^2}, \quad k_\theta^{(i)} = \frac{\partial v_i}{R_i^2 \partial \theta} - \frac{\partial^2 w_i}{R_i^2 \partial \theta^2}, \quad k_{x\theta}^{(i)} = -2 \frac{\partial^2 w_i}{R_i \partial x \partial \theta} + \frac{1}{2R_i} \left(3 \frac{\partial v_i}{\partial x} - \frac{\partial u_i}{R_i \partial \theta} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Вариацию потенциальной энергии i -й стенки нанотрубки представим в следующем виде:

$$\delta \Pi = \iint_A [N_{xx}^{(i)} \delta \varepsilon_{x,0}^{(i)} + N_{\theta\theta}^{(i)} \delta \varepsilon_{\theta,0}^{(i)} + N_{x\theta}^{(i)} \delta \gamma_{x\theta,0}^{(i)} + M_{xx}^{(i)} \delta k_x^{(i)} + M_{\theta\theta}^{(i)} \delta k_\theta^{(i)} + M_{x\theta}^{(i)} \delta k_{x\theta}^{(i)}] R_i dx d\theta, \quad (3)$$

где A – область срединной поверхности оболочки; $N_{xx}^{(i)}, N_{\theta\theta}^{(i)}, N_{x\theta}^{(i)}, M_{xx}^{(i)}, M_{\theta\theta}^{(i)}, M_{x\theta}^{(i)}$ – удельные силовые факторы и моменты, которые определяются так:

$$\begin{aligned} N_{xx}^{(i)} &= \int_{-0.5h}^{0.5h} \sigma_{xx}^{(i)} dz = \mu^2 \nabla^2 N_{xx}^{(i)} + Y_{11}^{(i)} \varepsilon_{x,0}^{(i)} + Y_{12}^{(i)} \varepsilon_{\theta,0}^{(i)} + Y_{13}^{(i)} \gamma_{x\theta,0}^{(i)}, \\ N_{\theta\theta}^{(i)} &= \int_{-0.5h}^{0.5h} \sigma_{\theta\theta}^{(i)} dz = \mu^2 \nabla^2 N_{\theta\theta}^{(i)} + Y_{22}^{(i)} \varepsilon_{\theta,0}^{(i)} + Y_{23}^{(i)} \gamma_{x\theta,0}^{(i)}, \\ N_{x\theta}^{(i)} &= \int_{-0.5h}^{0.5h} \sigma_{x\theta}^{(i)} dz = \mu^2 \nabla^2 N_{x\theta}^{(i)} + Y_{33}^{(i)} \gamma_{x\theta,0}^{(i)}, \\ M_{xx}^{(i)} &= \int_{-0.5h}^{0.5h} z \sigma_{xx}^{(i)} dz = \mu^2 \nabla^2 M_{xx}^{(i)} + X_{11}^{(i)} k_x^{(i)} + X_{12}^{(i)} k_\theta^{(i)} + X_{13}^{(i)} k_{x\theta}^{(i)}, \\ M_{\theta\theta}^{(i)} &= \int_{-0.5h}^{0.5h} z \sigma_{\theta\theta}^{(i)} dz = \mu^2 \nabla^2 M_{\theta\theta}^{(i)} + X_{22}^{(i)} k_\theta^{(i)} + X_{23}^{(i)} k_{x\theta}^{(i)}, \\ M_{x\theta}^{(i)} &= \int_{-0.5h}^{0.5h} z \sigma_{x\theta}^{(i)} dz = \mu^2 \nabla^2 M_{x\theta}^{(i)} + X_{33}^{(i)} k_{x\theta}^{(i)}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $X_{kj}^{(i)} = \frac{Y_{kj}^{(i)} h^2}{12}$.

В уравнение (3) введем (2) и проведем интегрирование по частям. Тогда в результате получим следующее выражение для вариации потенциальной энергии:

$$\begin{aligned} \delta \Pi &= \iint_A [\Gamma_w^{(i)}(u_i, v_i, w_i) \delta w_i + \Gamma_v^{(i)}(u_i, v_i, w_i) \delta v_i + \Gamma_u^{(i)}(u_i, v_i, w_i) \delta u_i] R_i dx d\theta + \\ &+ \int_0^L \left[N_{xx}^{(i)} \delta u_i + B_v^{(i)}(u_i, v_i, w_i) \delta v_i + B_w^{(i)}(u_i, v_i, w_i) \delta w_i - M_{xx}^{(i)} \frac{\partial \delta w_i}{\partial x} \right] R_i d\theta, \end{aligned} \quad (5)$$

где $[\]_0^L = [\]_{x=0} - [\]_{x=L}$;

$$\begin{aligned} \Gamma_w^{(i)}(u_i, v_i, w_i) &= \frac{-\partial}{\partial x} \left(N_{xx}^{(i)} \frac{\partial w_i}{\partial x} \right) + \frac{N_{\theta\theta}^{(i)}}{R_i} - \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{N_{\theta\theta}^{(i)}}{R_i} \left(\frac{\partial w_i}{R_i \partial \theta} - \frac{v_i}{R_i} \right) \right] - \\ &- \frac{\partial}{\partial x} \left[N_{x\theta}^{(i)} \left(\frac{\partial w_i}{R_i \partial \theta} - \frac{v_i}{R_i} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{N_{x\theta}^{(i)}}{R_i} \frac{\partial w_i}{\partial x} \right] - \frac{\partial^2 M_{xx}^{(i)}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(\frac{M_{\theta\theta}^{(i)}}{R_i^2} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} \left(\frac{2M_{x\theta}^{(i)}}{R_i} \right); \\ \Gamma_v^{(i)}(u_i, v_i, w_i) &= \frac{-\partial}{\partial x} \left[\frac{N_{xx}^{(i)}}{4} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x} - \frac{\partial u_i}{R_i \partial \theta} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{N_{\theta\theta}^{(i)}}{R_i} \right) - \frac{N_{\theta\theta}^{(i)}}{R_i^2} \left(\frac{\partial w_i}{\partial \theta} - v_i \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{N_{\theta\theta}^{(i)}}{4} \left(\frac{\partial u_i}{R_i \partial \theta} - \frac{\partial v_i}{\partial x} \right) \right] - \frac{\partial N_{x\theta}^{(i)}}{\partial x} - \frac{N_{x\theta}^{(i)}}{R_i} \frac{\partial w_i}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{M_{\theta\theta}^{(i)}}{R_i^2} \right) - \frac{3}{2R_i} \frac{\partial M_{x\theta}^{(i)}}{\partial x}; \end{aligned}$$

$$\Gamma_u^{(i)}(u_i, v_i, w_i) = \frac{-\partial N_{xx}^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{N_{xx}^{(i)}}{4R_i} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x} - \frac{\partial u_i}{R_i \partial \theta} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{N_{\theta\theta}^{(i)}}{4R_i} \left(\frac{\partial u_i}{R_i \partial \theta} - \frac{\partial v_i}{\partial x} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{N_{x\theta}^{(i)}}{R_i} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{M_{x\theta}^{(i)}}{2R_i^2} \right);$$

$$B_v^{(i)}(u_i, v_i, w_i) = \frac{N_{xx}^{(i)} + N_{\theta\theta}^{(i)}}{4} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x} - \frac{\partial u_i}{R_i \partial \theta} \right) + N_{x\theta}^{(i)} + \frac{3}{2R_i} M_{x\theta}^{(i)};$$

$$B_w^{(i)}(u_i, v_i, w_i) = N_{xx}^{(i)} \frac{\partial w_i}{\partial x} + N_{x\theta}^{(i)} \left(\frac{\partial w_i}{R_i \partial \theta} - \frac{v_i}{R_i} \right) + \frac{\partial M_{xx}^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{2M_{x\theta}^{(i)}}{R_i} \right).$$

Вариация кинетической энергии i -й стенки нанотрубки принимает следующий вид:

$$\delta K = -\rho h \iint_A \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \delta u_i + \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} \delta v_i + \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} \delta w_i \right) R_i dx d\theta, \quad (6)$$

где ρ – плотность материала. Виртуальная работа внешних поверхностных сил определяется так:

$$\delta W = \iint_A \left(p_x^{(i)} \delta u_i + p_y^{(i)} \delta v_i + q_i \delta w_i \right) R_i dx d\theta, \quad (7)$$

где $p_x^{(i)}, p_y^{(i)}, q_i$ – проекции внешних сил на оси (x, θ, z) . Для вывода уравнений движения нанотрубки воспользуемся принципом Гамильтона

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta K - \delta \Pi + \delta W) dt = 0 \quad (8)$$

где t_1, t_2 – некоторые значения времени. Введем (5, 6, 7) в уравнение (8) и получим следующие уравнения колебаний i -й стенки нанотрубки:

$$\rho h \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \frac{\partial N_{xx}^{(i)}}{\partial x} - \frac{\partial N_{x\theta}^{(i)}}{R_i \partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{N_{xx}^{(i)} + N_{\theta\theta}^{(i)}}{4R_i} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x} - \frac{\partial u_i}{R_i \partial \theta} \right) \right] + \frac{\partial M_{x\theta}^{(i)}}{2R_i^2 \partial \theta} = p_x^{(i)}, \quad (9)$$

$$\rho h \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} - \frac{\partial N_{\theta\theta}^{(i)}}{R_i \partial \theta} - \frac{\partial N_{x\theta}^{(i)}}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{N_{xx}^{(i)} + N_{\theta\theta}^{(i)}}{4} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x} - \frac{\partial u_i}{R_i \partial \theta} \right) \right] - \frac{N_{\theta\theta}^{(i)}}{R_i^2} \left(\frac{\partial w_i}{\partial \theta} - v_i \right) - \frac{N_{x\theta}^{(i)}}{R_i} \frac{\partial w_i}{\partial x} - \frac{\partial M_{\theta\theta}^{(i)}}{R_i^2 \partial \theta} - \frac{3\partial M_{x\theta}^{(i)}}{2R_i \partial x} = p_y^{(i)}, \quad (10)$$

$$\rho h \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(N_{xx}^{(i)} \frac{\partial w_i}{\partial x} \right) + \frac{N_{\theta\theta}^{(i)}}{R_i} - \frac{\partial}{R_i^2 \partial \theta} \left[N_{\theta\theta}^{(i)} \left(\frac{\partial w_i}{\partial \theta} - v_i \right) \right] - \frac{\partial}{R_i \partial x} \left[N_{x\theta}^{(i)} \left(\frac{\partial w_i}{\partial \theta} - v_i \right) \right] - \frac{\partial}{R_i \partial \theta} \left(N_{x\theta}^{(i)} \frac{\partial w_i}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2 M_{xx}^{(i)}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M_{\theta\theta}^{(i)}}{R_i^2 \partial \theta^2} - \frac{2}{R_i} \frac{\partial^2 M_{x\theta}^{(i)}}{\partial \theta \partial x} = q_i. \quad (11)$$

Соотношения (4) введем в (9, 10, 11) и получим систему уравнений колебаний i -й стенки нанотрубки

$$\rho h \Lambda \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \right) - L_1^{(i)} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right) - L_2^{(i)} \left(\frac{\partial v_i}{R_i \partial \theta} + \frac{w_i}{R_i} \right) - L_3^{(i)} \left(\frac{\partial u_i}{R_i \partial \theta} + \frac{\partial v_i}{\partial x} \right) + L_4^{(i)}(u_i, v_i, w_i) = \Lambda(p_x^{(i)}) + F_u^{(i)}(u_i, v_i, w_i)$$

$$\rho h \Lambda \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} \right) - P_1^{(i)} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right) - P_2^{(i)} \left(\frac{\partial v_i}{R_i \partial \theta} + \frac{w_i}{R_i} \right) - P_3^{(i)} \left(\frac{\partial u_i}{R_i \partial \theta} + \frac{\partial v_i}{\partial x} \right) - P_4^{(i)}(u_i, v_i, w_i) = \Lambda(p_y^{(i)}) + F_v^{(i)}(u_i, v_i, w_i) \quad (13)$$

$$\rho h \Lambda \left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} \right) + Q_1^{(i)} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right) + Q_2^{(i)} \left(\frac{\partial v_i}{R_i \partial \theta} + \frac{w_i}{R_i} \right) + Q_3^{(i)} \left(\frac{\partial u_i}{R_i \partial \theta} + \frac{\partial v_i}{\partial x} \right) - Q_4^{(i)}(u_i, v_i, w_i) = \Lambda(q_i) + F_w^{(i)}(u_i, v_i, w_i) \quad (14)$$

где $\Lambda, L_1^{(i)}, L_2^{(i)}, L_3^{(i)}, L_4^{(i)}, P_1^{(i)}, P_2^{(i)}, P_3^{(i)}, P_4^{(i)}, Q_1^{(i)}, Q_2^{(i)}, Q_3^{(i)}, Q_4^{(i)}$ являются линейными дифференциальными операторами, которые имеют следующий вид:

$$\Lambda(\cdot) = (\cdot) - \mu^2 \nabla^2(\cdot), \quad L_j^{(i)}(\cdot) = \frac{\partial}{\partial x} [Y_{1j}^{(i)}(\cdot)] + \frac{1}{R_i} \frac{\partial}{\partial \theta} [Y_{j3}^{(i)}(\cdot)],$$

$$P_j^{(i)}(\cdot) = \frac{\partial}{R_i \partial \theta} [Y_{2j}^{(i)}(\cdot)] + \frac{\partial}{\partial x} [Y_{j3}^{(i)}(\cdot)], \quad Q_j^{(i)}(\cdot) = \frac{Y_{j2}^{(i)}}{R}(\cdot), \quad j = 1, 2, 3,$$

$$L_4^{(i)}(u_i, v_i, w_i) = \frac{1}{2R_i^2} \frac{\partial}{\partial \theta} (X_{13}^{(i)} k_x^{(i)} + X_{23}^{(i)} k_\theta^{(i)} + X_{33}^{(i)} k_{x\theta}^{(i)}),$$

$$P_4^{(i)}(u_i, v_i, w_i) = \frac{\partial}{R_i^2 \partial \theta} (X_{12}^{(i)} k_x^{(i)} + X_{22}^{(i)} k_\theta^{(i)} + X_{23}^{(i)} k_{x\theta}^{(i)}) + \frac{3}{2R_i} \frac{\partial}{\partial x} (X_{13}^{(i)} k_x^{(i)} + X_{23}^{(i)} k_\theta^{(i)} + X_{33}^{(i)} k_{x\theta}^{(i)}),$$

$$Q_4^{(i)}(u_i, v_i, w_i) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (X_{11}^{(i)} k_x^{(i)} + X_{12}^{(i)} k_\theta^{(i)} + X_{13}^{(i)} k_{x\theta}^{(i)}) + \frac{\partial^2}{R_i^2 \partial \theta^2} (X_{12}^{(i)} k_x^{(i)} + X_{22}^{(i)} k_\theta^{(i)} + X_{23}^{(i)} k_{x\theta}^{(i)}) +$$

$$+ \frac{2}{R_i} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial x} (X_{13}^{(i)} k_x^{(i)} + X_{23}^{(i)} k_\theta^{(i)} + X_{33}^{(i)} k_{x\theta}^{(i)}).$$

Рассматриваемая нанотрубка состоит из N стенок, которые связаны между собой силами Ван-дер-Ваальса. Следуя работе [18], проекции сил Ван-дер-Ваальса, действующие на i -ю стенку нанотрубки q_i , определяется так:

$$q_i = \sum_{j=1}^N c_{ij} (w_i - w_j) \quad (15)$$

$$\text{где } c_{ij} = \frac{-\varepsilon R_j \pi}{a^4} \left\{ \frac{1001 \sigma^{12}}{3} E_{ij}^{(13)} - \frac{1120 \sigma^6}{9} E_{ij}^{(7)} \right\}, \quad E_{ij}^{(m)} = (R_i + R_j)^{-m} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(1 - K_{ij} \cos^2 \theta)^{m/2}}, \quad K_{ij} = \frac{4R_i R_j}{(R_j + R_i)^2},$$

ε – глубина потенциала; σ – параметр, определяющий равновесие; a – длина С-С связи; m – целое положительное число.

Теперь запишем систему уравнений в частных производных, описывающую геометрически нелинейное деформирование многостенных нанотрубок. Уравнения движения (12–14) должны применяться к каждой вложенной стенке нанотрубки. Тогда уравнения движения многостенной УНТ запишем как

$$\rho h \Lambda \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \right) - L_1^{(i)} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right) - L_2^{(i)} \left(\frac{\partial v_i}{R_i \partial \theta} + \frac{w_i}{R_i} \right) - L_3^{(i)} \left(\frac{\partial u_i}{R_i \partial \theta} + \frac{\partial v_i}{\partial x} \right) + L_4^{(i)}(u_i, v_i, w_i) = F_u^{(i)}(u_i, v_i, w_i),$$

$$\rho h \Lambda \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} \right) - P_1^{(i)} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right) - P_2^{(i)} \left(\frac{\partial v_i}{R_i \partial \theta} + \frac{w_i}{R_i} \right) - P_3^{(i)} \left(\frac{\partial u_i}{R_i \partial \theta} + \frac{\partial v_i}{\partial x} \right) - P_4^{(i)}(u_i, v_i, w_i) = F_v^{(i)}(u_i, v_i, w_i),$$

$$\rho h \Lambda \left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} \right) + Q_1^{(i)} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right) + Q_2^{(i)} \left(\frac{\partial v_i}{R_i \partial \theta} + \frac{w_i}{R_i} \right) + Q_3^{(i)} \left(\frac{\partial u_i}{R_i \partial \theta} + \frac{\partial v_i}{\partial x} \right) - Q_4^{(i)}(u_i, v_i, w_i) = \Lambda(q_i) + F_w^{(i)}(u_i, v_i, w_i)$$

$$i=1, \dots, N. \quad (16)$$

Подчеркнем, что связь между стенками нанотрубки при колебаниях осуществляется через силы Ван-дер-Ваальса (15).

Уравнения колебаний (16) запишем относительно безразмерных переменных и параметров

$$\tilde{u}_i = \frac{u_i}{R_i}, \quad \tilde{v}_i = \frac{v_i}{R_i}, \quad \tilde{w}_i = \frac{w_i}{R_i}, \quad \eta = \frac{x}{L}, \quad \tau = \omega_0 t, \quad \delta_i = \frac{R_i}{R_1}; \quad \alpha_i = \frac{R_i}{L}; \quad i = 1, \dots, N,$$

$$\text{где } \omega_0^2 = \frac{Y_{11}^{(1)}}{h R_1^2 \rho}.$$

Соотношения (4) в безразмерной форме примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}(\tilde{N}_{xx}^{(i)}) &= \tilde{Y}_{11}^{(i)} \tilde{\varepsilon}_{x,0}^{(i)} + \tilde{Y}_{12}^{(i)} \tilde{\varepsilon}_{\theta,0}^{(i)} + \tilde{Y}_{13}^{(i)} \tilde{\gamma}_{x\theta,0}^{(i)}, & \tilde{\Lambda}(\tilde{N}_{\theta\theta}^{(i)}) &= \tilde{Y}_{12}^{(i)} \tilde{\varepsilon}_{x,0}^{(i)} + \tilde{Y}_{22}^{(i)} \tilde{\varepsilon}_{\theta,0}^{(i)} + \tilde{Y}_{23}^{(i)} \tilde{\gamma}_{x\theta,0}^{(i)}, \\ \tilde{\Lambda}(\tilde{N}_{x\theta}^{(i)}) &= \tilde{Y}_{13}^{(i)} \tilde{\varepsilon}_{x,0}^{(i)} + \tilde{Y}_{23}^{(i)} \tilde{\varepsilon}_{\theta,0}^{(i)} + \tilde{Y}_{33}^{(i)} \tilde{\gamma}_{x\theta,0}^{(i)}, & \tilde{\Lambda}(\tilde{M}_{xx}^{(i)}) &= \tilde{X}_{11}^{(i)} \tilde{k}_x^{(i)} + \tilde{X}_{12}^{(i)} \tilde{k}_\theta^{(i)} + \tilde{X}_{13}^{(i)} \tilde{k}_{x\theta}^{(i)}, \\ \tilde{\varepsilon}_{x,0}^{(i)} &= \varepsilon_{x,0}^{(i)} = \alpha_i \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \eta}, & \tilde{\varepsilon}_{\theta,0}^{(i)} &= \varepsilon_{\theta,0}^{(i)} = \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial \theta} + \tilde{w}_i, & \tilde{\gamma}_{x\theta,0}^{(i)} &= \gamma_{x\theta,0}^{(i)} = \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \theta} + \alpha_i \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial \eta}, \end{aligned}$$

где $(\tilde{N}_{xx}^{(i)}, \tilde{N}_{\theta\theta}^{(i)}, \tilde{N}_{x\theta}^{(i)}) = \frac{1}{Y_{11}^{(i)}} (N_{xx}^{(i)}, N_{\theta\theta}^{(i)}, N_{x\theta}^{(i)})$; $\tilde{\Lambda}(\cdot) = (\cdot) - \vartheta \tilde{\nabla}^2(\cdot)$; $\tilde{\nabla}^2(\cdot) = \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\alpha_i^2} \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial \theta^2}$; $\vartheta = \frac{\mu^2}{L^2}$;

$$\tilde{Y}_{1j}^{(i)} = \frac{Y_{1j}^{(i)}}{Y_{11}^{(i)}}; \quad \tilde{Y}_{j3}^{(i)} = \frac{Y_{j3}^{(i)}}{Y_{11}^{(i)}}; \quad i = 1, \dots, N; \quad j = 1, 2, 3; \quad \tilde{Y}_{2j_1}^{(i)} = \frac{Y_{2j_1}^{(i)}}{Y_{11}^{(i)}}; \quad i = 1, \dots, N; \quad j_1 = 2, 3.$$

Динамическая система (16) в безразмерной форме выглядит так:

$$\tilde{\Lambda} \left(\delta_i \frac{\partial^2 \tilde{w}_i}{\partial \tau^2} \right) + \tilde{Q}_1^{(i)} \left(\alpha_i \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \eta} \right) + \tilde{Q}_2^{(i)} \left(\frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial \theta} + \tilde{w}_i \right) + \tilde{Q}_3^{(i)} \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \theta} + \alpha_i \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial \eta} \right) - \tilde{Q}_4^{(i)}(\tilde{u}_i, \tilde{v}_i, \tilde{w}_i) = \tilde{\Lambda}(\tilde{q}_i) + \tilde{F}_w^{(i)}(\tilde{u}_i, \tilde{v}_i, \tilde{w}_i), \quad (17)$$

$$\tilde{\Lambda} \left(\delta_i \frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial \tau^2} \right) - \tilde{L}_1^{(i)} \left(\alpha_i \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \eta} \right) - \tilde{L}_2^{(i)} \left(\frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial \theta} + \tilde{w}_i \right) - \tilde{L}_3^{(i)} \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \theta} + \alpha_i \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial \eta} \right) - \tilde{L}_4^{(i)}(\tilde{u}_i, \tilde{v}_i, \tilde{w}_i) = \tilde{F}_u^{(i)}(\tilde{u}_i, \tilde{v}_i, \tilde{w}_i), \quad (18)$$

$$\tilde{\Lambda} \left(\delta_i \frac{\partial^2 \tilde{v}_i}{\partial \tau^2} \right) - \tilde{P}_1^{(i)} \left(\alpha_i \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \eta} \right) - \tilde{P}_2^{(i)} \left(\frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial \theta} + \tilde{w}_i \right) - \tilde{P}_3^{(i)} \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \theta} + \alpha_i \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial \eta} \right) - \tilde{P}_4^{(i)}(\tilde{u}_i, \tilde{v}_i, \tilde{w}_i) = \tilde{F}_v^{(i)}(\tilde{u}_i, \tilde{v}_i, \tilde{w}_i). \quad (19)$$

Эти три уравнения в частных производных представим в следующем операторном виде:

$$G_1(\tilde{u}_i, \tilde{v}_i, \tilde{w}_i, \tilde{\Lambda}(\tilde{q}_i), \tilde{F}_w^{(i)}) = 0, \quad G_2(\tilde{u}_i, \tilde{v}_i, \tilde{w}_i, \tilde{F}_u^{(i)}) = 0, \quad G_3(\tilde{u}_i, \tilde{v}_i, \tilde{w}_i, \tilde{F}_v^{(i)}) = 0.$$

Безразмерное изменение кривизны и кручение срединной поверхности определяется так:

$$\tilde{k}_x^{(i)} = R_i k_x^{(i)} = -\alpha_i^2 \frac{\partial^2 \tilde{w}_i}{\partial \eta^2}, \quad \tilde{k}_\theta^{(i)} = R_i k_\theta^{(i)} = \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 \tilde{w}_i}{\partial \theta^2}, \quad \tilde{k}_{x\theta}^{(i)} = R_i k_{x\theta}^{(i)} = -2\alpha_i \frac{\partial^2 \tilde{w}_i}{\partial \eta \partial \theta} + \frac{1}{2} \left(3\alpha_i \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial \eta} - \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \theta} \right).$$

Безразмерные силы Ван-дер-Ваальса, действующие на стенки нанотрубки, принимают следующий вид:

$$\tilde{q}_i = \sum_{j=1}^N \tilde{c}_{ij} (\delta_i \tilde{w}_i - \delta_j \tilde{w}_j),$$

где $\tilde{c}_{ij} = \tilde{\varepsilon} \delta_j \left[\frac{210\pi\tilde{\sigma}^6}{(\delta_i + \delta_j)^7} \tilde{E}_{ij}^{(7)} - \frac{9009\pi\tilde{\sigma}^{12}}{16(\delta_i + \delta_j)^{13}} \tilde{E}_{ij}^{(13)} \right]$; $\tilde{E}_{ij}^{(m)} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{[1 - \tilde{k}_{ij} \cos^2 \theta]^{m/2}}$; $\tilde{\varepsilon} = \frac{16R_1^2 \varepsilon}{27a^4 Y_{11}^{(1)}}$; $\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{R_1}$;

$$\tilde{k}_{ij} = \frac{4\delta_i \delta_j}{(\delta_i + \delta_j)^2}.$$

В дальнейшем рассмотрим шарнирно-опертую с двух сторон многостенную УНТ, которая удовлетворяет геометрическим граничным условиям

$$\tilde{w}_i|_{\eta=0} = \tilde{w}_i|_{\eta=1} = \tilde{v}_i|_{\eta=0} = \tilde{v}_i|_{\eta=1} = 0 \quad (20)$$

и естественным граничным условиям

$$\tilde{M}_{xx}^{(i)}|_{\eta=0} = \tilde{M}_{xx}^{(i)}|_{\eta=1} = \tilde{N}_{xx}^{(i)}|_{\eta=0} = \tilde{N}_{xx}^{(i)}|_{\eta=1} = 0. \quad (21)$$

Уравнения движения с конечным числом степеней свободы

Для исследования колебаний применяется метод Галеркина [19]. Тогда необходимо удовлетворять как геометрическим (20), так и естественным граничным условиям (21). С учетом соотношений (1) удовлетворить естественным граничным условиям (21) не представляется возможным. Поэтому применяется обобщенный метод Галеркина [19], который часто называется методом взвешенных невязок [20]. Выберем разложения перемещений $\tilde{u}_i, \tilde{v}_i, \tilde{w}_i$, удовлетворяя только геометрическим граничным условиям (20)

$$\begin{aligned}\tilde{u}_i &= \sum_{m=1}^{J_1} \cos(m\pi\eta) [q_{i,m}^{(u,c)}(\tau) \cos(n\theta) + q_{i,m}^{(u,s)}(\tau) \sin(n\theta)], \\ v_i &= \sum_{m=1}^{J_2} \sin(m\pi\eta) [q_{i,m}^{(v,c)}(\tau) \cos(n\theta) + q_{i,m}^{(v,s)}(\tau) \sin(n\theta)], \\ w_i &= \sum_{m=1}^{J_3} \sin(m\pi\eta) [q_{i,m}^{(w,c)}(\tau) \cos(n\theta) + q_{i,m}^{(w,s)}(\tau) \sin(n\theta)]\end{aligned}\quad (22)$$

где $q = [q^{(u,c)}, q^{(u,s)}, q^{(v,c)}, q^{(v,s)}, q^{(w,c)}, q^{(w,s)}]$ – вектор обобщенных координат размерности N .

В разложении (22) обязательно должны присутствовать сопряженные формы колебаний. Если их не учитывать в (22) и такие соотношения ввести в уравнения в частных производных (17–19), то сопряженные формы обязательно возникнут, что обусловлено присутствием слагаемых с $Y_{13}^{(i)}$ и $Y_{23}^{(i)}$ в законе Гука (1).

В вариации потенциальной энергии (5) учитываются естественные граничные условия, которые представлены вторым интегралом. Эти соотношения используются в обобщенном методе Галеркина [19]. Соотношения (5, 6, 7) введем в (8). В полученном уравнении перейдем к безразмерным переменным и параметрам. Тогда получим следующее соотношение:

$$\begin{aligned}\iint_{A_i} \{G_1(\tilde{u}_i, \tilde{v}_i, \tilde{w}_i, \tilde{\Lambda}(\tilde{q}_i), \tilde{F}_w^{(i)}) \delta \tilde{u}_i + G_2(\tilde{u}_i, \tilde{v}_i, \tilde{w}_i, \tilde{F}_u^{(i)}) \delta \tilde{v}_i + G_3(\tilde{u}_i, \tilde{v}_i, \tilde{w}_i, \tilde{F}_v^{(i)}) \delta \tilde{w}_i\} d\eta d\theta + \\ + \int_0^{2\pi} \left[\alpha_1 \tilde{N}_{xx}^{(i)} \delta \tilde{u}_i - \alpha_1 \alpha_i \tilde{M}_{xx}^{(i)} \frac{\partial \delta \tilde{w}_i}{\partial \eta} \right]_0^1 d\theta = 0,\end{aligned}\quad (23)$$

где A_i – безразмерная область срединной поверхности i -й стенки нанотрубки; $[]_0^1 = []_{\eta=1} - []_{\eta=0}$.

Из вариационного уравнения (23) следует система уравнений

$$\begin{aligned}\iint_{A_i} G_1(\tilde{u}_i, \tilde{v}_i, \tilde{w}_i, \tilde{\Lambda}(\tilde{q}_i), \tilde{F}_w^{(i)}) \sin(m_1\pi\eta) \begin{bmatrix} \cos(n\theta) \\ \sin(n\theta) \end{bmatrix} d\theta d\eta - \alpha_1 \alpha_i m_1 \pi \int_0^{2\pi} \left\{ \tilde{M}_{xx}^{(i)} \cos(m_1\pi\eta) \begin{bmatrix} \cos(n\theta) \\ \sin(n\theta) \end{bmatrix} \right\}_0^1 d\theta = 0, \quad m_1 = 1, \dots, J_3, \\ \iint_{A_i} G_2(\tilde{u}_i, \tilde{v}_i, \tilde{w}_i, \tilde{F}_u^{(i)}) \cos(m_1\pi\eta) \begin{bmatrix} \cos(n\theta) \\ \sin(n\theta) \end{bmatrix} d\theta d\eta + \alpha_1 \int_0^{2\pi} \left\{ \tilde{N}_{xx}^{(i)} \cos(m_1\pi\eta) \begin{bmatrix} \cos(n\theta) \\ \sin(n\theta) \end{bmatrix} \right\}_0^1 d\theta = 0, \quad m_1 = 1, \dots, J_1, \\ \iint_{A_i} G_3(\tilde{u}_i, \tilde{v}_i, \tilde{w}_i, \tilde{F}_v^{(i)}) \sin(m_1\pi\eta) \begin{bmatrix} \cos(n\theta) \\ \sin(n\theta) \end{bmatrix} d\theta d\eta = 0, \quad m_1 = 1, \dots, J_2\end{aligned}\quad (24)$$

Тогда из соотношений (24) получаем линейную динамическую систему с конечным числом степеней свободы, которая имеет следующий матричный вид:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} + \mathbf{K}_B\mathbf{q} = 0, \quad (25)$$

где \mathbf{M} – матрица масс; $\mathbf{K}\mathbf{q}$ – произведение матрицы жесткости и вектора обобщенных координат, которое описывает линейные слагаемые в уравнениях (24). Подчеркнем, что эти слагаемые получаются в результате взятия двойных интегралов в (24). Линейные слагаемые $\mathbf{K}_B\mathbf{q}$ получаются вследствие взя-

тия одинарных интегралов, входящих в (24). Из системы (25) легко выводится проблема собственных значений для расчета собственных частот и форм колебаний.

Система (25) описывает линейные колебания нанотрубок с произвольным числом стенок.

Численный анализ колебаний одностенных нанотрубок

Для проверки представленной выше теории проводилось численное моделирование собственных частот линейных колебаний изотропной УНТ. Рассматривалась одностенная УНТ с параметрами [13]: $Eh=360$ Н/м, $D=0,85$ эВ, $\nu=0,2$, $\rho h=0,7718 \cdot 10^{-6}$ кг/м², $R_1=0,65$ нм, где D – цилиндрическая жесткость, Eh – продольная жесткость, ν – коэффициент Пуассона, ρh – масса единицы длины. Для расчета собственных частот колебаний решается проблема собственных значений, которая выводится из системы (25).

Результаты расчетов собственных частот приводятся в табл. 1. В первом столбце таблицы показана величина L/R_1 . Расчеты проводились для разных длин УНТ. Во втором столбце представлена первая собственная частота, опубликованная в статье [13]. В этой статье исследовались колебания континуальных оболочечных моделей УНТ с помощью теории Сандерса-Коитера. В третьем столбце представлена первая собственная частота в Гц, полученная на основании подхода, рассмотренного в разделе 3. Итак, первые собственные частоты, полученные двумя методами, близки.

Таблица 1. Собственные частоты одностенной изотропной УНТ

L/R_1	ω_1 , Гц [1]	ω_1 , Гц
0,5	$8,189 \cdot 10^{12}$	$8,193 \cdot 10^{12}$
1,0	$4,968 \cdot 10^{12}$	$4,972 \cdot 10^{12}$
5,0	$1,042 \cdot 10^{12}$	$1,043 \cdot 10^{12}$
10,0	$3,288 \cdot 10^{11}$	$3,290 \cdot 10^{11}$
50,0	$1,468 \cdot 10^{10}$	$1,469 \cdot 10^{10}$

Исследуются собственные частоты колебаний одностенной анизотропной шарнирно-опертой УНТ. Одностенная УНТ описывается индексами хиральности $(n, m)=(15, 15)$. Параметры нанотрубки принимались следующими:

$$K_p=742 \text{ Н/м}, K_\theta=1,42 \text{ нН}\cdot\text{нм}, r_0=0,142 \text{ нм}, \rho h=0,7718 \cdot 10^{-6} \text{ кг/м}^2, \quad (26)$$

где K_p , K_θ – постоянные сил, связанные с растяжением связи углерод–углерод и углового искривления связей; r_0 – длина связи углерод–углерод. Параметры закона Гука (1) $Y_{ij}^{(1)}$ рассчитывались с помощью метода, предложенного в работах [16, 17].

Результаты расчета собственных частот анизотропной шарнирно-опертой одностенной нанотрубки представлены на рис. 3. Здесь показаны собственные частоты для $n=1$ и $n=2$ разложений (22) в зависимости от параметра $\pi R_1/L$. Сплошной линией изображены собственные частоты, полученные с помощью подхода, представленного в разделе 3. Ромбами на рис. 3 показаны собственные частоты, опубликованные в статье [14]. Близость собственных частот, полученных двумя различными методами, свидетельствуют, что посчитанные нами собственные частоты являются верными. При увеличении параметра $\pi R_1/L$ собственные частоты растут.

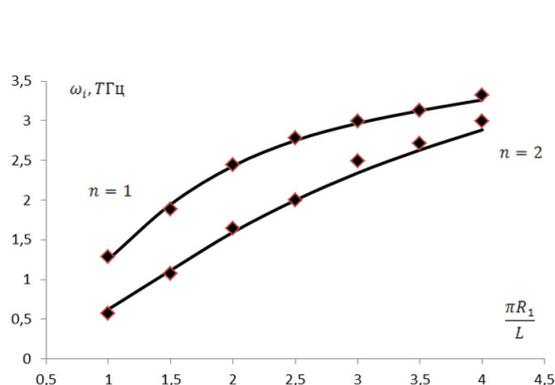


Рис. 3. Первые собственные частоты при $n=1$ и $n=2$

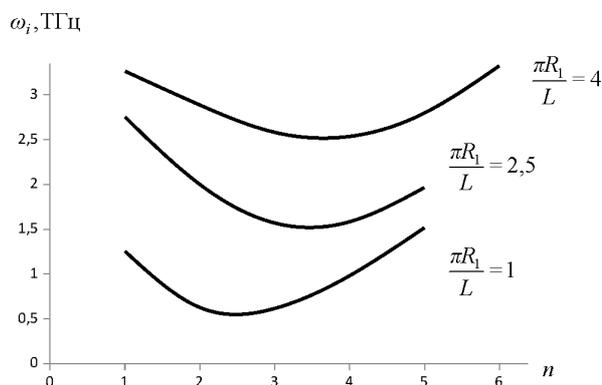


Рис. 4. Зависимость собственных частот колебаний от числа волн в окружном направлении n

Исследуем зависимость собственных частот колебаний одностенной анизотропной шарнирно-опертой УНТ с параметрами (26) от числа волн в окружном направлении n разложения (22). Результаты такого анализа приводятся на рис. 4. Здесь показывается зависимость собственных частот ω_i от числа волн в окружном направлении. Расчеты представлены для трех значений параметра $\pi R_1/L$: 1; 2,5; 4. Для этих значений параметра минимальные частоты наблюдаются при $n=3$; $n=3$; $n=4$ соответственно.

Как следует из работы [13], в изотропных оболочечных моделях нанотрубок минимальные собственные частоты наблюдаются при $n=1$ или $n=2$. В рассмотренной здесь оболочке минимальные собственные частоты наблюдаются при несколько больших n .

Численный анализ колебаний многостенных нанотрубок

Рассмотрим результаты расчета собственных частот линейных колебаний изотропных трехстенных УНТ. Параметры этих нанотрубок таковы: $E=5,5$ ТПа; $h=0,066$ нм; $\nu=0,19$; $\rho h=0,772 \cdot 10^{-6}$ кг/м²; $R_1=5$ нм; $R_2=5,34$ нм; $R_3=5,68$ нм; $L=10R_3$; $a=0,142$ нм; $\sigma=0,3407$ нм; $\varepsilon=2,968$ мЭВ, где E – модуль Юнга.

Результаты расчета собственных частот линейных колебаний на основании анизотропной модели приведены во втором столбце табл. 2. В первых двух столбцах таблицы представлены число волн в окружном направлении n и номер m_g единственной ненулевой гармоники в разложении (22) соответственно. Результаты расчетов собственных частот колебаний этой изотропной трехстенной нанотрубки (см. третий столбец таблицы) опубликованы в [21, 22]. Итак, результаты расчетов, проведенные по разным методикам, близки.

Исследуем колебания трехстенной УНТ с индексами хиральности (5, 5); (10, 10); (15, 15), которая рассматривалась в статье [23]. Параметры этой нанотрубки имеют следующие значения: $R_1=0,339$ нм; $R_2=0,678$ нм; $R_3=1,016$ нм; $L=9R_3$; $a=0,142$ нм; $\sigma=0,3407$ нм; $\varepsilon=2,968$ мЭВ.

Матрица Y закона Гука (1) рассчитывается на основании молекулярного подхода, представленного в статьях [16, 17]. Для каждой стенки УНТ матрица Y имеет свои значения. Для расчета собственных частот используется подход, предложенный в разделе 3. Результаты расчета собственных частот представлены в табл. 3. В первом столбце таблицы показано число волн в окружном направлении n в разложении (22). Во втором столбце представлены номера стоячих волн в продольном направлении m ,

которые вносят существенный вклад в разложение собственных форм колебаний (22). В третьем столбце показаны первые три собственные частоты, полученные при следующих параметрах разложения (22): $J_1=J_2=J_3=3$.

Для анализа сходимости полученных собственных частот [12, 13] проводился их расчет при большем числе слагаемых в разложении (22). Результаты расчета собственных частот показаны в четвертом столбце таблицы при $J_1=J_2=J_3=4$. Итак, результаты расчета, представленные в третьем и четвертом столбце, близки, что свидетельствует об их сходимости.

Как следует из результатов, приведенных в табл. 3, только одна продольная полуволна с номером m_g преобладает в собственной форме колебаний (22). Итак, не наблюдается взаимодействия между модами колебаний, которые представлены в разложении (22). Это обусловлено тем, что параметры, входящие в закон Гука (1), удовлетворяют уравнению $Y_{13}^{(i)} = Y_{23}^{(i)} = Y_{31}^{(i)} = Y_{32}^{(i)} = 0$. Как следует из дальнейшего численного анализа, при $Y_{13}^{(i)}, Y_{23}^{(i)}$, отличном от нуля, в разложении (22) наблюдается взаимодействие между модами колебаний.

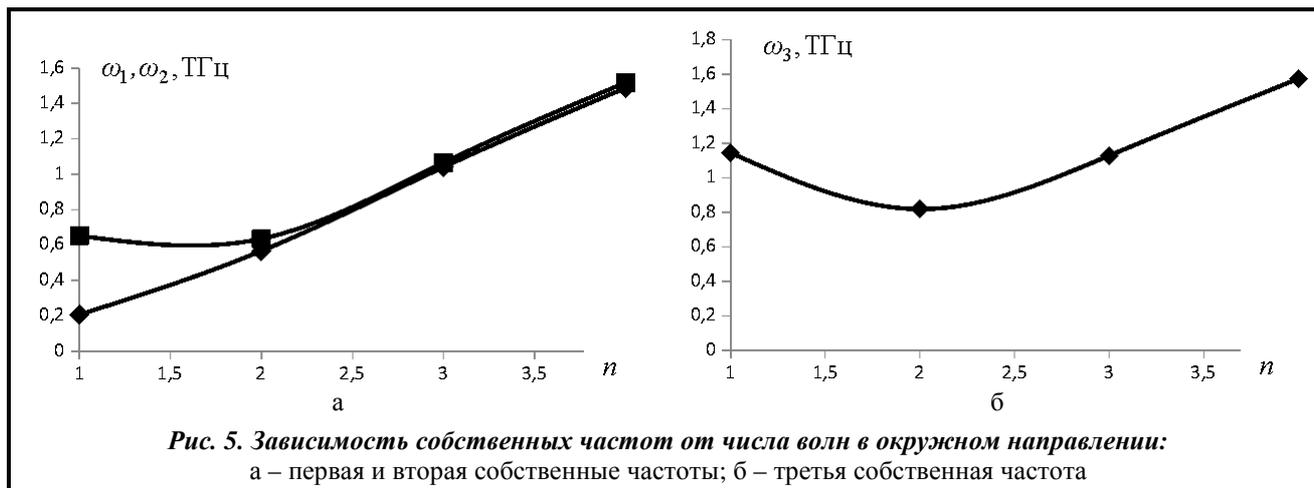
Отметим, что на всех собственных формах, представленных в табл. 3, все три стенки нанотрубки колеблются синфазно, т. е. они не движутся в противоположных радиальных направлениях.

Таблица 2. Собственные частоты трехстенной УНТ

n	m_g	ω_i , ТГц	ω_i , ТГц [15]
1	1	0,0360	0,0360
1	2	0,1161	0,1161
1	3	0,2069	0,2069
2	1	0,0139	0,0149
2	2	0,0467	0,0466
2	3	0,0944	0,0944

Таблица 3. Собственные частоты трехстенной анизотропной УНТ

n	m_g	ω_i , ТГц	ω_i , ТГц
		при $J_1=J_2=J_3=3$	при $J_1=J_2=J_3=4$
1	1	0,21180	0,21180
	2	0,66310	0,66310
	3	1,14900	1,14900
2	1	0,57870	0,57870
	2	0,64830	0,64830
	3	0,83260	0,83250
3	1	1,06100	1,06100
	2	1,08173	1,08173
	3	1,13830	1,13830
4	1	1,53050	1,53050
	2	1,54750	1,54750
	3	1,58270	1,58270



Результаты расчета первых трех собственных частот трехстенной УНТ представлены на рис. 5. Как следует из рис. 5, а, при увеличении n от 1 первая собственная частота непрерывно растет. Минимальное значение второй и третьей собственной частоты наблюдается при $n=2$.

Рассмотрим полихиральную двустенную нанотрубку, электронная структура которой обсуждается в статье [24]. Ее индексы хиральности таковы: (9, 6) (15, 10). Эта нанотрубка имеет следующие радиусы стенок: $R_1=0,5119$ нм; $R_2=0,8532$ нм; $R_2-R_1=0,34$ нм. Матрица Y закона Гука (1) рассчитывалась на основании молекулярного подхода, который предложен в статьях [16, 17]. Результаты расчета матрицы Y для двух стенок представлены в табл. 4. Остальные параметры нанотрубки принимались следующими: $L=9R_2$; $a=0,142$ нм; $\sigma=0,3407$ нм; $\epsilon=2,968$ мЭВ.

Для расчета собственных частот применялся подход, представленный в разделе 3. Производился анализ сходимости собственных частот. Тогда в разложениях (22) величина $J_1=J_2=J_3$ меняется. Исследовалось влияние величины J_1 на значения собственных частот. Результаты такого анализа приведены в табл. 5. В первом столбце этой таблицы показано число слагаемых в разложении (22). Во втором столбце представлены числа волн в окружном направлении n , а в третьем, четвертом и пятом столбцах – первые три собственные частоты колебаний в ТГц. Как следует из этой таблицы, при $J_1=J_2=J_3=3$ и $J_1=J_2=J_3=4$ собственные частоты совпадают, что свидетельствует о сходимости результатов.

Таблица 4. Анизотропные упругие постоянные полихиральной двустенной нанотрубки

Индексы хиральности	Y_{1x}	Y_{2x}	Y_{3x}	x
(9, 6)	368,150	60,240	-0,387	1
	60,240	368,150	0,387	2
	-0,387	0,387	152,000	3
(15, 10)	369,090	59,300	-0,139	1
	59,300	369,090	0,139	2
	-0,139	0,139	154,190	3

Таблица 5. Анализ сходимости собственных частот

$J_1=J_2=J_3$	n	ω_1 , ТГц	ω_2 , ТГц	ω_3 , ТГц
2	1	0,2679	0,8396	-
		0,2679	0,8396	1,4750
		0,2679	0,8396	1,4750
3	2	0,4650	0,5874	-
		0,4650	0,5874	0,8637
		0,4650	0,5874	0,8637
4	3	1,1670	1,2010	-
		1,1670	1,2010	1,2840
		1,1670	1,2010	1,2840
3	4	1,8700	1,8950	1,9460
		1,8700	1,8950	1,9460

Таблица 6. Моды колебаний (22), участвующие в собственных формах

n	\bar{N}	m_g
1	1	1
	2	2
	3	3
2	1	1
	2	2
	3	3
3	1	1; 2
	2	1; 2; 3
	3	2; 3
4	1	1; 2
	2	1; 2; 3
	3	2; 3

Теперь рассмотрим свойства полученных собственных частот. Первая собственная частота ω_1 с ростом числа волн в окружном направлении n растет. Минимальное значение второй и третьей собственной частоты наблюдается при $n=2$. При увеличении n спектр собственных частот ($\omega_1, \omega_2, \omega_3$) становится плотным. При $n=1$ и $n=2$ спектр собственных частот неплотный, а при $n=3$ и $n=4$ становится плотнее.

Результаты анализа собственных форм, которые отвечают собственным частотам (табл. 5), систематизированы в табл. 6. В первом столбце таблицы показано число волн в окружном направлении n . Во втором – представлены номера собственных форм колебаний \bar{N} . В третьем – номера ненулевых мод колебаний m_g , которые присутствуют в разложении (22). При числе волн в окружном направлении $n=1$ и $n=2$ собственные формы колебаний (22) представляются в виде одномодовых разложений. Подчеркнем, что номер ненулевой моды равняется номеру собственной формы колебаний. При $n=3$ и $n=4$ в разложении собственных форм колебаний (22) присутствуют несколько мод колебаний, что представлено в табл. 6. Такое взаимодействие между модами колебаний объясняется ненулевыми значениями параметров $Y_{13}^{(i)}, Y_{23}^{(i)}$ в законе Гука (1).

Итак, если все элементы матрицы \mathbf{Y} закона Гука (1) ненулевые, то в разложении (22) наблюдается взаимодействие между модами при линейных колебаниях.

Заключение

В статье получена модель свободных колебаний углеродистых нанотрубок, которая выражается системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Для вывода этой динамической системы используется система уравнений в частных производных, описывающая деформирование многостенных нанотрубок и метод взвешенных невязок. Благодаря использованию этого метода базисные функции, по которым раскладываются колебания, не должны удовлетворять всем граничным условиям задачи. Именно такие базисные функции используются в этой работе. В математической модели учтена хиральность нанотрубок, которая описывается анизотропными упругими постоянными модели. Более того, в полученной модели учитывается нелокальная упругость и силы Ван-дер-Ваальса между стенками нанотрубки.

Проведен анализ собственных частот колебаний одностенных углеродистых нанотрубок в зависимости от числа волн в окружном направлении. При числе волн в окружном направлении от 2 до 4 наблюдаются минимальные собственные частоты колебаний нанотрубок. Эти числа меньше, чем для собственных частот колебаний машиностроительных оболочек.

Литература

1. Gibson R. F., Ayorinde E. O., Wen Y.-F. Vibrations of carbon nanotubes and their composites: A review. *Composites Sci. and Technology*. 2007. Vol. 67. Iss. 1. P. 1–28. <https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2006.03.031>.
2. Sirtori C. Applied physics: bridge for the terahertz gap. *Nature*. 2002. No. 417. P. 132–133. <https://doi.org/10.1038/417132b>.
3. Jeon T., Kim K. Terahertz conductivity of anisotropic single walled carbon nanotube films. *Appl. Physics Letters*. 2002. No. 80. P. 3403–3405. <https://doi.org/10.1063/1.1476713>.
4. Yoon J., Ru C. Q., Mioduchowski A. Sound wave propagation in multiwall carbon nanotubes. *J. Appl. Physics*. 2003. No. 93. P. 4801–4806. <https://doi.org/10.1063/1.1559932>.
5. Iijima S., Brabec C., Maiti A., Bernholc J. Structural flexibility of carbon nanotubes. *J. Chemical Physics*. 1996. No. 104. P. 2089–2092. <https://doi.org/10.1063/1.470966>.
6. Yakobson B. I., Campbell M. P., Brabec C. J., Bernholc J. High strain rate fracture and C-chain unraveling in carbon nanotubes. *Computer Material Sci*. 1997. Vol. 8. Iss. 4. P. 241–248. [https://doi.org/10.1016/S0927-0256\(97\)00047-5](https://doi.org/10.1016/S0927-0256(97)00047-5).
7. Wang C. Y., Zhang L. C. An elastic shell model for characterizing single-walled carbon nanotubes. *Nanotechnology*. 2008. No. 19. 195704. <https://doi.org/10.1088/0957-4484/19/19/195704>.
8. Wang Q., Varadan V. K. Application of nonlocal elastic shell theory in wave propagation analysis of carbon nanotubes. *Smart Material Structure*. 2007. No. 16. P. 178–190. <https://doi.org/10.1088/0964-1726/16/1/022>.
9. Fu Y. M., Hong J. W., Wang X. Q. Analysis of nonlinear vibration for embedded carbon nanotubes. *J. Sound and Vibration*. 2006. Vol. 296. Iss. 4–5. P. 746–756. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2006.02.024>.
10. Ansari R., Hemmatnezhad M. Nonlinear vibrations of embedded multi-walled carbon nanotubes using a variational approach. *Mathematical and Computer Modeling*. 2011. Vol. 53. Iss. 5–6. P. 927–938. <https://doi.org/10.1016/j.mcm.2010.10.029>.

11. Ansari R., Hemmatnezhad M. Nonlinear finite element analysis for vibrations of double-walled carbon nanotubes. *Nonlinear Dynamics*. 2012. No. 67. P. 373–383. <https://doi.org/10.1007/s11071-011-9985-6>.
12. Hajnayeb A., Khadem S. E. Analysis of nonlinear vibrations of double-walled carbon nanotubes conveying fluid. *J. Sound and Vibration*. 2012. Vol. 331. Iss. 10. P. 2443–2456. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2012.01.008>.
13. Avramov K. V. Nonlinear vibrations characteristics of single-walled carbon nanotubes via nonlocal elasticity. *Intern. J. Nonlinear Mech.* 2018. Vol. 107. P. 149–160. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2018.08.017>.
14. Fazelzadeh S. A., Ghavanloo E. Nonlocal anisotropic elastic shell model for vibrations of single-walled carbon nanotubes with arbitrary chirality. *Composite Structures*. 2012. Vol. 94. Iss. 3. P. 1016–1022. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2011.10.014>.
15. Ghavanloo E., Fazelzadeh S. A. Vibration characteristics of single-walled carbon nanotubes based on an anisotropic elastic shell model including chirality effect. *Appl. Math. Modelling*. 2012. Vol. 36. Iss. 10. P. 4988–5000. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2011.12.036>.
16. Chang T. A molecular based anisotropic shell model for single-walled carbon nanotubes. *J. Mech. and Physics Solids*. 2010. Vol. 58. Iss. 9. P. 1422–1433. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2010.05.004>.
17. Chang T., Geng J., Guo X. Prediction of chirality- and size-dependent elastic properties of single-walled carbon nanotubes via a molecular mechanics model. *Proc. Royal Society A*. 2006. Vol. 462. Iss. 2072. P. 2523–2540. <https://doi.org/10.1098/rspa.2006.1682>.
18. He X. Q., Kitipornchai S., Wang C. M., Xiang Y., Zhou Q. A nonlinear Van Der Waals force model for multi-walled carbon nanotubes modeled by a nested system of cylindrical shells. *ASME J. Appl. Mech.* 2010. Vol. 77. Iss. 6. 061006 (6 p.). <https://doi.org/10.1115/1.4001859>.
19. Washizu K. Variational methods in elasticity and plasticity. Oxford, United Kingdom: Pergamon Press, 1975. 420 p.
20. Zienkiewicz O. Finite elements and approximation. New York: John Wiley & Sons, 1983. 350 p.
21. He X. Q., Kitipornchai S., Liew K. M. Buckling analysis of multi-walled carbon nanotubes: a continuum model accounting for Van der Waals interaction. *J Mech. Phys. Solids*. 2005. Vol. 53. Iss. 2. P. 303–326. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2004.08.003>.
22. Strozzi M., Pellicano F. Linear vibrations of triple-walled carbon nanotubes. *Mathematics and Mechanics of Solids*. 2017. Vol. 23. Iss. 11. P. 1456–1481. <https://doi.org/10.1177/1081286517727331>.
23. Liew K. M., He X. Q., Wong C. H. On the study of elastic and plastic properties of multi-walled carbon nanotubes under axial tension using molecular dynamics simulation. *Acta Materialia*. 2004. Vol. 52. Iss. 9. P. 2521–2527. <https://doi.org/10.1016/j.actamat.2004.01.043>.
24. Lambin Ph., Meunier V., Rubio A. Electronic structure of polychiral carbon nanotubes. *Physical review B*. 2000. Vol. 62. Iss. 8. P. 5129–5135. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.62.5129>.

Поступила в редакцію 13.02.2020

Нелокальна анізотропна оболонкова модель лінійних коливань багатостінних вуглецевих нанотрубок

¹ К. В. Аврамов, ² Б. Н. Кабилбекова, ² К. К. Сейтказенова, ² Д. С. Мирзалієв, ² В. Н. Печерський

¹ Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України,
61046, Україна, м. Харків, вул. Пожарського, 2/10

² Південно-Казахстанський державний університет імені Мухтара Ауезова
160012, Казахстан, м. Шимкент, пр. Тауке хана, 5

Розглядається багатостінна шарнірно-обперта вуглецева нанотрубка. Її коливання будуть вивчатися в циліндричній системі координат. Пружні сталі в законі Гука залежать від діаметра стінки вуглецевої нанотрубки. Тому кожна стінка має свої пружні сталі. Коливання стінок нанотрубок описуються оболонковою теорією Сандерса-Коітера. Для виведення рівнянь в частинних похідних, що описують автоколивання, застосовується варіаційний підхід. Рівняння коливань в частинних похідних виводяться щодо трьох проєкцій переміщень. У моделі враховуються сили Ван-дер-Ваальса між стінками нанотрубки. Три проєкції переміщень розкладаються за базисними функціями. Вибрати базисні функції, що задовольняють одночасно геометричні і природні граничні умови, не вдалося. Тому вибираються базисні функції, що задовольняють тільки геометричні граничні умови. Для одержання лінійної динамічної системи зі скінченним числом ступенів свободи застосовується метод зважених нев'язок. Для виведення основних співвідношень методу зважених нев'язок застосовуються методи варіаційного числення. Проведено аналіз власних частот коливань одностінних вуглецевих на-

нотрубок в залежності від числа хвиль в обводовому напрямку. За числа хвиль в обводовому напрямку від 2 до 4 спостерігаються мінімальні власні частоти коливань нанотрубок. Ці числа менші, ніж для власних частот коливань машинобудівних оболонок. Досліджувалися трьохстінні анізотропні моделі нанотрубок. У власних формах спостерігається взаємодія між базисними функціями з різним числом хвиль в поздовжньому напрямку. Цього явища не спостерігалось в ізотропній моделі нанотрубки. Поява таких коливань є наслідком анізотропії конструкції.

Ключові слова: нанотрубка, оболонкова теорія Сандерса–Коітера, сили Ван-дер-Ваальса, нелокальна пружність.