

УДК 539.3

## МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ ФУНКЦИОНАЛЬНО- ГРАДИЕНТНЫХ ТЕЛ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

С. Н. Склепус, д-р техн. наук

[snsklepus@ukr.net](mailto:snsklepus@ukr.net)

ORCID: 0000-0002-4119-4310

Институт проблем машиностроения  
им. А. Н. Подгорного  
НАН Украины,  
61046, Украина, г. Харьков,  
ул. Пожарского, 2/10

Рассмотрена задача ползучести тел вращения сложной формы из функционально-градиентных материалов. Для вариационной постановки задачи используется функционал в форме Лагранжа, заданный на кинематически возможных скоростях перемещений. Разработан численно-аналитический метод решения нелинейной начально-краевой задачи ползучести, который базируется на совместном использовании методов R-функций, Рунге и Рунге-Кутты-Мерсона. К преимуществам предложенного метода можно отнести: точный учет геометрической информации о краевой задаче на аналитическом уровне, без какой-либо ее аппроксимации, представление приближенного решения задачи в аналитическом виде, автоматический выбор временного шага. Решены задачи ползучести полого цилиндра и тела вращения сложной формы – цилиндра с прямоугольным вырезом на наружной поверхности, нагруженных постоянным внутренним давлением, выполненных из функционально-градиентного материала на основе алюминия, армированного частицами карбида кремния SiC. Ползучесть материала описывается законом Нортон. Модуль Юнга и характеристики ползучести зависят от объемной части армирующего материала. Оба конца цилиндра свободны от внешней нагрузки и закреплены таким образом, что радиальные перемещения равны нулю. Построена соответствующая частичная структура решения, удовлетворяющая граничным условиям для скоростей перемещений. Расчеты выполнены для цилиндров из двух различных композиционных материалов – материала с однородным распределением SiC-частиц и функционально-градиентного материала с перепадом объемного содержания армирующих частиц вдоль радиуса. При этом среднее значение объемного содержания армирующих частиц SiC-частиц в двух случаях было одинаковым. Исследовано влияние градиентных свойств материала и геометрической формы на напряженно-деформированное состояние при ползучести. Наличие на внешней поверхности цилиндра прямоугольного выреза приводит во всех случаях к увеличению перемещений и напряжений. При этом степень влияния геометрической формы на напряженно-деформированное состояние при ползучести существенно зависит от градиентных свойств материала. Для цилиндра с вырезом, выполненного из материала с однородным распределением SiC-частиц, наблюдается значительный рост перемещений и напряжений после 100 часов ползучести, по сравнению с прямым цилиндром. Для тел, выполненных из функционально-градиентного материала, влияние выреза на напряженно-деформированное состояние менее выражено.

**Ключевые слова:** функционально-градиентный материал, тело вращения, ползучесть, метод R-функций.

### Введение

В качестве конструктивных элементов осесимметричные тела используются в энергетике, космической технике, химической промышленности и др. отраслях. Это сосуды под давлением (гидроцилиндры, трубы, котлы, топливные резервуары и т.д.), газовые турбины, аккумуляторные оболочки, цилиндры для аэрокосмической промышленности, ядерные реакторы, трубопроводы ядерных реакторов. Они могут быть выполнены как из однородных, так и из композиционных материалов, к которым относятся функционально-градиентные материалы (ФГМ). Состав и структура ФГМ изменяются по некоторому закону, что приводит к соответствующим изменениям механических и физических свойств. Это позволяет использовать их в элементах конструкций, работающих в экстремальных условиях, при значительных термомеханических нагрузках. Теория и методы расчета ползучести элементов конструкций, в частности цилиндров и тел вращения из ФГМ, интенсивно развиваются. Чаще всего рассматривают тела канонической геометрической формы: прямые полые цилиндры, сферы, конусы [1–6]. При этом зачастую вводятся различные допущения, позволяющие упростить

исходную начально-краевую задачу ползучести и получить решение в аналитическом виде. Если тело вращения имеет сложную геометрическую форму, то аналитически решить задачу ползучести не удастся. В этом случае для решения краевой задачи необходимо использовать численные методы, позволяющие находить приближенное решение в областях сложной формы, например метод конечных элементов [7,8], метод R-функций [9,10], метод «погружения» [11,12] и др. В отличие от других методов, метод R-функций позволяет точно учесть геометрическую информацию о краевой задаче и представить приближенное решение в виде формулы – структуры решения, которая точно удовлетворяет всем (общая структура) или части (частичная) граничных условий.

Целью статьи является разработка численно-аналитического метода решения задач ползучести осесимметрично нагруженных функционально-градиентных тел вращения сложной формы, а также изучение влияния градиентных свойств материала и геометрической формы на напряженно-деформированное состояние тел вращения в условиях ползучести.

**Постановка задачи. Метод решения.**

Рассмотрим осесимметрично нагруженное тело вращения из ФГМ с произвольной формой меридианного сечения в цилиндрической системе координат  $O r \varphi z$ . Ось  $Oz$  совпадает с осью вращения. Упругие характеристики и характеристики ползучести монотонно изменяются в радиальном направлении. Компоненты тензора скоростей полных деформаций  $\dot{\epsilon}_{kl}(r, z, t)$  представим в виде суммы скоростей упругих деформаций  $\dot{\epsilon}_{kl}^e(r, z, t)$  и деформаций ползучести  $\dot{p}_{kl}(r, z, t)$

$$\dot{\epsilon}_{rr} = \dot{\epsilon}_{rr}^e + \dot{p}_{rr}; \dot{\epsilon}_{zz} = \dot{\epsilon}_{zz}^e + \dot{p}_{zz}; \dot{\epsilon}_{\varphi\varphi} = \dot{\epsilon}_{\varphi\varphi}^e + \dot{p}_{\varphi\varphi}; \dot{\epsilon}_{rz} = \dot{\epsilon}_{rz}^e + \dot{p}_{rz}.$$

Здесь и далее точка над символами означает полную производную по времени  $t$ .

Основные неизвестные задачи ползучести в произвольной точке тела в моменты времени  $t > 0$  можно найти из решения задачи Коши по времени для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{du_r}{dt} = \dot{u}_r; \quad \frac{du_z}{dt} = \dot{u}_z; \\ \frac{d\epsilon_{rr}}{dt} = \dot{\epsilon}_{r,r}; \quad \frac{d\epsilon_{zz}}{dt} = \dot{\epsilon}_{z,z}; \quad \frac{d\epsilon_{\varphi\varphi}}{dt} = \dot{\epsilon}_{\varphi,r} r^{-1}; \quad \frac{d\gamma_{rz}}{dt} = 2 \frac{d\epsilon_{rz}}{dt} = \dot{\epsilon}_{r,z} + \dot{\epsilon}_{z,r}; \\ \frac{d\sigma_{rr}}{dt} = \lambda_1(r)(\dot{\epsilon}_{rr} - \dot{p}_{rr}) + \lambda(r)(\dot{\epsilon}_{zz} + \dot{\epsilon}_{\varphi\varphi} - \dot{p}_{zz} - \dot{p}_{\varphi\varphi}); \\ \frac{d\sigma_{zz}}{dt} = \lambda_1(r)(\dot{\epsilon}_{zz} - \dot{p}_{zz}) + \lambda(r)(\dot{\epsilon}_{rr} + \dot{\epsilon}_{\varphi\varphi} - \dot{p}_{rr} - \dot{p}_{\varphi\varphi}); \\ \frac{d\sigma_{\varphi\varphi}}{dt} = \lambda_1(r)(\dot{\epsilon}_{\varphi\varphi} - \dot{p}_{\varphi\varphi}) + \lambda(r)(\dot{\epsilon}_{rr} + \dot{\epsilon}_{zz} - \dot{p}_{rr} - \dot{p}_{zz}); \\ \frac{d\sigma_{rz}}{dt} = G(r)(\dot{\gamma}_{rz} - 2\dot{p}_{rz}); \\ \frac{dp_{rr}}{dt} = \dot{p}_{rr}; \quad \frac{dp_{zz}}{dt} = \dot{p}_{zz}; \quad \frac{dp_{\varphi\varphi}}{dt} = \dot{p}_{\varphi\varphi}; \quad \frac{dp_{rz}}{dt} = \dot{p}_{rz}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Здесь  $u_r(r, z, t)$ ,  $u_z(r, z, t)$  – перемещения вдоль осей  $\hat{I}_r$  и  $\hat{I}_z$  соответственно;  $\epsilon_{rr}, \epsilon_{zz}, \epsilon_{\varphi\varphi}, \epsilon_{rz}$  – компоненты тензора полных деформаций;  $p_{rr}, p_{zz}, p_{\varphi\varphi}, p_{rz}$  – компоненты тензора деформаций ползучести;  $\sigma_{rr}, \sigma_{zz}, \sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{rz}$  – компоненты тензора напряжений;  $\lambda(r) = \frac{E(r)\nu(r)}{(1-2\nu(r))(1+\nu(r))}$ ;  $\lambda_1(r) = \lambda(r) + 2G(r)$ ;

$G(r) = \frac{E(r)}{2(1+\nu(r))}$ , где  $E(r), \nu(r)$  – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала.

В начальный момент времени деформации ползучести  $p_{rr} = p_{zz} = p_{\varphi\varphi} = 2p_{rz} = 0$ . Начальные условия для остальных неизвестных функций находятся из решения задачи упругого деформирования.

Правые части уравнений системы (1) зависят от вида определяющих соотношений для скоростей деформаций ползучести. Предположим, что ползучесть материала может быть описана с помощью закона Нортона [5]. В этом случае определяющие соотношения ползучести будут иметь вид

$$\begin{aligned} \dot{p}_{rr} &= \frac{3}{2} A(r) \sigma_i^{n(r)-1} \left( \sigma_{rr} - \frac{1}{3} I_1 \right); \quad \dot{p}_{zz} = \frac{3}{2} A(r) \sigma_i^{n(r)-1} \left( \sigma_{zz} - \frac{1}{3} I_1 \right); \\ \dot{p}_{\varphi\varphi} &= \frac{3}{2} A(r) \sigma_i^{n(r)-1} \left( \sigma_{\varphi\varphi} - \frac{1}{3} I_1 \right); \quad \dot{p}_{rz} = \frac{3}{2} A(r) \sigma_i^{n(r)-1} \sigma_{rz}; \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\sigma_i = \sqrt{\sigma_{rr}^2 + \sigma_{zz}^2 + \sigma_{\varphi\varphi}^2 - \sigma_{rr}\sigma_{zz} - \sigma_{rr}\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{zz}\sigma_{\varphi\varphi} + 3\sigma_{rz}^2}$  – интенсивность напряжений;  $I_1 = \sigma_{rr} + \sigma_{zz} + \sigma_{\varphi\varphi}$ ;  $A(r)$ ,  $n(r)$  – характеристики ползучести ФГМ.

Начальную задачу для системы уравнений (1) будем решать методом Рунге-Кутты-Мерсона (РКМ) с автоматическим выбором шага по времени. Правые части уравнений (1) в моменты времени, соответствующие схеме РКМ, находятся с помощью решения вариационной задачи для функционала в форме Лагранжа [13]

$$\begin{aligned} \Lambda(\dot{\mathbf{U}}) &= 0,5 \iint_{\Omega} \left[ \lambda_1(r) (\dot{u}_{r,r}^2 + \dot{u}_{z,z}^2 + r^{-2} \dot{u}_r^2) + G(r) (\dot{u}_{r,z} + \dot{u}_{z,r})^2 + 2\lambda(r) (\dot{u}_{r,r} \dot{u}_{z,z} + r^{-1} \dot{u}_r (\dot{u}_{r,r} + \dot{u}_{z,z})) \right] r dr dz - \\ &- \iint_{\Omega} \left[ \dot{u}_{r,r} \dot{N}_{rr}^c + \dot{u}_{z,z} \dot{N}_{zz}^c + \dot{u}_r r^{-1} \dot{N}_{\varphi\varphi}^c + \dot{N}_{rz}^c (\dot{u}_{r,z} + \dot{u}_{z,r}) \right] r dr dz - \int_{\partial\Omega_p} (\dot{P}_n \dot{u}_n + \dot{P}_\tau \dot{u}_\tau) d\partial\Omega. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $\dot{\mathbf{U}}$  – вектор кинематически возможных скоростей перемещений:  $\dot{\mathbf{U}} = (\dot{u}_r(r, z, t), \dot{u}_z(r, z, t))$ ;  $\Omega$  – меридианное сечение тела;  $\partial\Omega_p$  – часть контура  $\partial\Omega$ , где приложены внешние силы;  $\dot{P}_n, \dot{P}_\tau$  – скорости нормальной и касательной составляющих внешних сил;  $n, \tau$  – внешняя нормаль и касательная к контуру  $\partial\Omega$ ;  $\dot{u}_n = \dot{u}_r n_r + \dot{u}_z n_z$ ,  $\dot{u}_\tau = \dot{u}_z n_r - \dot{u}_r n_z$ ;  $n_r, n_z$  – направляющие косинусы нормали  $n$ . Скорости «фиктивных» сил, обусловленных деформациями ползучести, вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \dot{N}_{rr}^c &= [\lambda_1(r) \dot{p}_{rr} + \lambda(r) (\dot{p}_{zz} + \dot{p}_{\varphi\varphi})], \quad \dot{N}_{zz}^c = [\lambda_1(r) \dot{p}_{zz} + \lambda(r) (\dot{p}_{rr} + \dot{p}_{\varphi\varphi})], \\ \dot{N}_{\varphi\varphi}^c &= [\lambda_1(r) \dot{p}_{\varphi\varphi} + \lambda(r) (\dot{p}_{rr} + \dot{p}_{zz})], \quad \dot{N}_{rz}^c = 2G(r) \dot{p}_{rz}. \end{aligned}$$

Скорости деформаций ползучести в функционале (3) полагают известными и поэтому они не варьируются.

Вариационные задачи для функционала (3) будем решать методом Ритца в сочетании с методом R-функций [9,10].

К преимуществам предложенного метода можно отнести: точный учет геометрической информации о краевой задаче на аналитическом уровне, без какой-либо ее аппроксимации; представление приближенного решения задачи в аналитическом виде; точное удовлетворение граничных условий; автоматический выбор временного шага.

### Численные исследования

Рассмотрим ползучесть прямого полого цилиндра и тела вращения сложной формы (цилиндр с прямоугольным вырезом на наружной поверхности), образованного вращением плоской фигуры вокруг оси  $Oz$  (рис. 1), выполненных из ФГМ на основе алюминия, армированного частицами карбида кремния SiC. Цилиндр и тело вращения нагружены внутренним давлением интенсивности  $P_{in} = 50$  МПа. Геометрические размеры:  $a=0,01$  м,  $b=0,02$  м,  $c=0,018$ ,  $d=0,02$  м, длина  $l=0,1$  м.

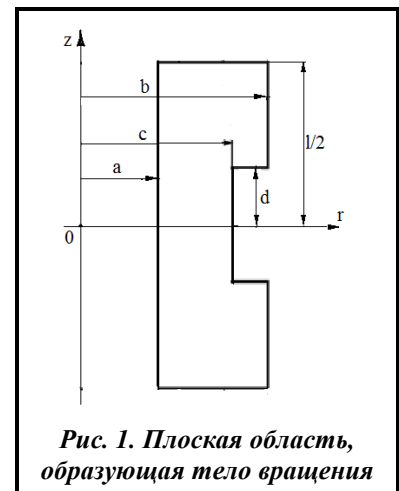


Рис. 1. Плоская область, образующая тело вращения

Содержание керамических SiC-частиц линейно изменяется вдоль радиуса, а объемная доля керамики (%) при заданном радиусе подчиняется закону [14]

$$V(r) = V_{\max} - \left( \frac{r-a}{b-a} \right) (V_{\max} - V_{\min}),$$

где  $V_{\max}$  и  $V_{\min}$  – максимальное и минимальное содержание армирующих SiC-частиц на внутренней и наружной поверхностях соответственно.

Модуль Юнга [МПа] ФГМ зависит от объемной части армирующего материала и приблизительно подчиняется линейному закону [15]

$$E(r) = 6,9 \cdot 10^4 + 1,33 \cdot 10^3 V(r).$$

Коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ .

Характеристики ползучести ФГМ зависят от  $V(r)$  и изменяются вдоль радиальной координаты следующим образом [16]:

$$A(r) = \dot{A}_0 \left[ \frac{V(r)}{V_0} \right]^\phi, \quad n(r) = n_0 \left[ \frac{V(r)}{V_0} \right]^{-\phi},$$

где  $\dot{A}_0 = 9,972 \cdot 10^{-13}$  Па<sup>-1</sup> с<sup>-1</sup>;  $n_0 = 3,75$ ;  $\phi = 0,7$ ;  $V_0$  – среднее объемное содержание керамики в цилиндре.

Оба конца цилиндра  $z = \pm l/2$  свободны от внешней нагрузки и закреплены таким образом, что радиальные перемещения  $u_r$  равны нулю. В этом случае граничные условия задачи ползучести будут иметь вид

$$\dot{u}_r = 0, \quad \dot{\sigma}_{zz} = 0 \quad \text{при } z = \pm l/2;$$

$$\dot{\sigma}_{rr} = -\dot{P}_{in} = 0, \quad \dot{\sigma}_{zr} = 0 \quad \text{для } r = a;$$

$$\dot{\sigma}_n = \dot{\sigma}_\tau = 0 \quad \text{для точек внешней поверхности.}$$

Здесь  $\sigma_n, \sigma_\tau$  – нормальное и касательное напряжения:  $\sigma_n = \sigma_{rr} n_r^2 + 2\sigma_{rz} n_r n_z + \sigma_{zz} n_z^2$ ,  $\dot{\sigma}_\tau = (\sigma_{zz} - \sigma_{rr}) n_r n_z + \sigma_{rz} (n_r^2 - n_z^2)$ .

Соответствующая частичная структура, удовлетворяющая граничным условиям для скоростей перемещений, может быть записана так:

$$\dot{u}_r = \omega_1 \Phi_1, \quad \dot{u}_z = z \Phi_2, \quad (4)$$

где  $\Phi_1, \Phi_2$  – неопределенные компоненты структуры решения;  $\omega_1 = \frac{1}{l} \left( \frac{l^2}{4} - z^2 \right) \geq 0$  – полоса  $\Omega_1$ , заключенная между линиями  $z = -l/2$  и  $z = l/2$  ( $\omega_1 = 0$ ,  $\omega_{1,n} = -1$  на границе  $\partial\Omega_1$ ,  $\omega_1 > 0$  внутри полосы).

При численной реализации неопределенные компоненты  $\Phi_1, \Phi_2$  представляются в виде конечных рядов

$$\Phi_1(r, z, t) = \sum_{n=1}^{N_1} C_n^{(1)}(t) f_n^{(1)}(r, z); \quad \Phi_2(r, z, t) = \sum_{n=1}^{N_2} C_n^{(2)}(t) f_n^{(2)}(r, z),$$

где  $C_n^{(1)}(t), C_n^{(2)}(t)$  – неопределенные коэффициенты, которые на каждом временном шаге находятся методом Рунге;  $t$  – некоторый фиксированный момент временной дискретизации схемы РКМ или дискретизации по времени для выдачи результатов расчета;  $\{f_n^{(1)}\}, \{f_n^{(2)}\}$  – системы линейно независимых функций, в качестве которых используются бикубические сплайны Шенберга. Системы сплайнов строятся на регулярной сетке  $K_r \times K_z$ , где  $K_r, K_z$  – количество отрезков дискретизации вдоль осей  $Or$  и  $Oz$  соответственно.

Уравнение границы области, показанной на рис. 1, может быть записано в виде

$$\omega(r, z) = (\omega_1 \wedge_0 \omega_2) \wedge_0 (\omega_3 \vee_0 \omega_4) = 0. \quad (5)$$

Здесь  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$  – опорные области, формирующие область  $\Omega$ ,  $\omega_1 = \frac{1}{l} \left( \frac{l^2}{4} - z^2 \right)$ ,  $\omega_2 = \frac{(r-a)(b-r)}{b-a}$ ,

$\omega_3 = c - r$ ,  $\omega_4 = \frac{1}{2d} (z^2 - d^2)$ ;  $\wedge_0, \vee_0$  обозначают R-конъюнкцию и R-дизъюнкцию [9, 10]:

$$f_1 \wedge_0 f_2 = f_1 + f_2 - \sqrt{f_1^2 + f_2^2}, \quad f_1 \vee_0 f_2 = f_1 + f_2 + \sqrt{f_1^2 + f_2^2}.$$

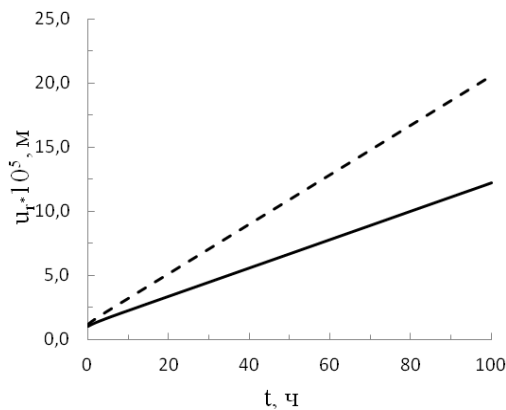
Поскольку структура решения (4) удовлетворяет только кинематическим граничным условиям, функция  $\omega = \omega(r, z)$ , описывающая геометрию области, в нее не входит. Уравнение (5) использовалось при пространственной дискретизации задачи, для нахождения координат узлов сетки интегрирования. Параметры пространственной дискретизации:  $K_r = 20$ ,  $K_z = 20$  для цилиндра с вырезом и  $K_r = 10$ ,  $K_z = 20$  для прямого цилиндра. Заданная погрешность вычислений в методе РКМ  $\epsilon = 10^{-3}$ .

Расчеты были выполнены для цилиндров из двух различных композиционных материалов (таблица): материал с однородным распределением SiC-частиц (I), функционально-градиентный материал (II) с перепадом объемного содержания армирующих частиц вдоль радиуса. Среднее значение объемного содержания SiC-частиц во всех случаях одинаково.

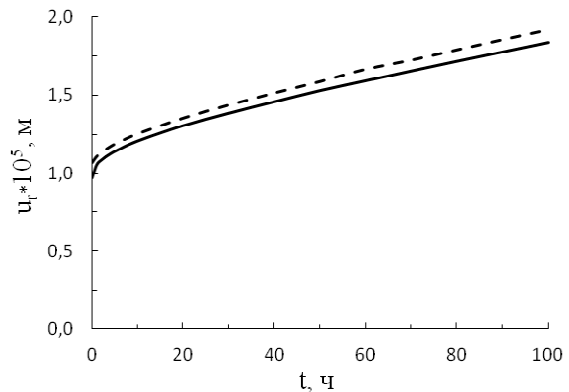
**Содержание армирующих частиц  
в материале**

Материал	$V_{\max}, \%$	$V_0, \%$	$V_{\min}, \%$
I	20	20	20
II	30	20	12

Некоторые результаты расчетов представлены на рис. 2–6. Сплошными линиями показаны результаты расчетов для прямого цилиндра, а штриховыми – для цилиндра с вырезом. На рис. 2, 3 показан рост радиальных перемещений в центре на внутренней поверхности цилиндров, где они являются максимальными.



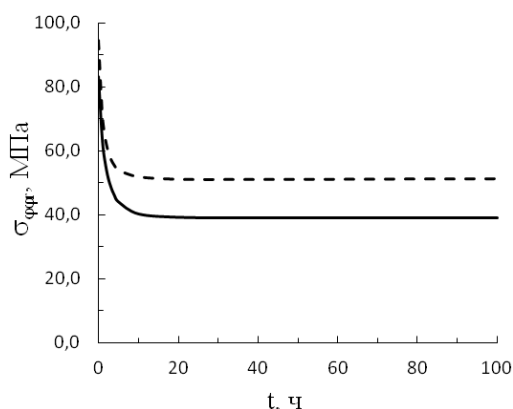
**Рис. 2. Рост радиальных перемещений в центре на внутренней поверхности цилиндров с однородным распределением армирующих частиц**



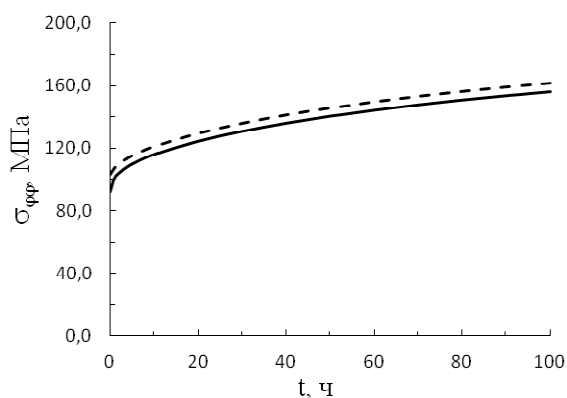
**Рис. 3. Рост радиальных перемещений в центре на внутренней поверхности цилиндров из ФГМ**

Рис. 4–6 иллюстрируют изменение во времени окружных напряжений в центре на внутренней и внешней поверхностях цилиндров.

В процессе ползучести происходит рост перемещений и перераспределение напряжений. Окружные напряжения в начальный момент времени максимальны на внутренней поверхности. Затем, вследствие ползучести, в цилиндре с однородным распределением армирующего материала на внутренней поверхности происходит релаксация напряжений (рис. 4), а на внешней – рост напряжений (рис. 6, кривая 1). Для функционально-градиентных цилиндров наблюдается обратная картина: на внутренней поверхности напряжения возрастают (рис. 5), а на внешней поверхности происходит релаксация (рис. 6, кривая 2).



**Рис. 4.** Изменение во времени окружных напряжений в центре на внутренней поверхности цилиндров с однородным распределением армирующих частиц



**Рис. 5.** Изменение во времени окружных напряжений в центре на внутренней поверхности цилиндров из ФГМ

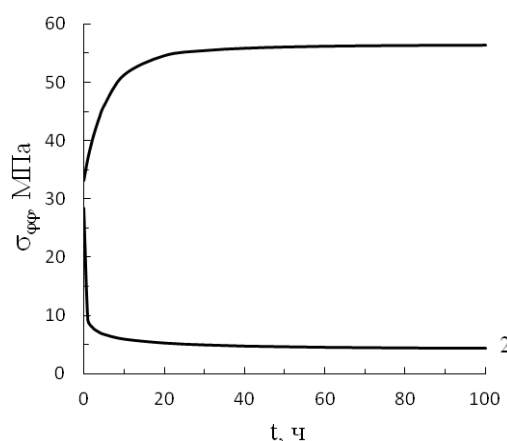
Наличие на внешней поверхности цилиндра прямоугольного выреза приводит во всех случаях к увеличению перемещений и напряжений (рис. 2–5). При этом степень влияния геометрической формы на НДС при ползучести существенно зависит от свойств материала. Из рис. 2, 5 видно, что для цилиндра с вырезом, выполненного из материала с однородным распределением SiC-частиц, наблюдается значительный рост перемещений ( $\approx 70\%$ ) и напряжений ( $\approx 32\%$ ) после 100 часов ползучести, по сравнению с прямым цилиндром. Для тел, выполненных из ФГМ, влияние выреза на НДС менее выражено (рис. 3, 5). Это объясняется тем, что была удалена та часть цилиндра, где содержание армирующих частиц минимально, а ползучесть наиболее интенсивна.

#### Выводы

Приведена постановка задачи ползучести тел вращения сложной формы из функционально-градиентных материалов. Разработан численно-аналитический метод решения нелинейной начально-краевой задачи ползучести, который базируется на использовании методов R-функций, Ритца и Рунге-Кутта-Мерсона. Решены задачи ползучести полого прямого цилиндра и тела вращения сложной формы – цилиндра с прямоугольным вырезом на наружной поверхности, нагруженных постоянным внутренним давлением, выполненных из ФГМ на основе алюминия, армированного частицами карбида кремния. Исследовано влияние градиентных свойств материала и геометрической формы на напряженно-деформированное состояние при ползучести.

#### Литература

1. Chen J. J. Creep analysis for a functionally graded cylinder subjected to internal and external pressure. *J. Strain Analysis*. 2007. Vol. 42. P 69–77. <https://doi.org/10.1243/03093247JSA237>
2. Nejad M. Z., Kashkoli M. D. Time-dependent thermo-creep analysis of rotating FGM thick-walled cylindrical pressure vessels under heat flux. *Int. J. Eng. Sci.* 2014. Vol. 82. P. 222–237. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2014.06.006>.
3. Shrikant K. V. Creep analysis of an isotropic functionally graded cylinder. *J. Advances in Sci. and Techn.* 2012. Vol. 3. No. 4. P. 1–9.
4. Singh T., Gupta V. K. Effect of anisotropy on steady state creep in functionally graded cylinder. *Composite Structures*. 2011. Vol. 93. No. 2. P. 747–758. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2010.08.005>.



**Рис. 6.** Изменение во времени окружных напряжений в центре на внешней поверхности прямых цилиндров:

1–цилиндр с однородным распределением армирующих частиц, 2– цилиндр из ФГМ

5. Chen J. J., Yoon K. B., Tu S. T. Creep behavior of pressurized tank composed of functionally graded materials. *J. Pressure Vessel Techn.* 2011. Vol. 133. P. 69–77. <https://doi.org/10.1115/1.4003455>.
6. Kashkoli M. D., Nejad M. Z. Time dependent thermo-elastic creep analysis of thick-walled spherical pressure vessels made of functionally graded materials. *J. Theoret. and Appl. Mech.* 2015. Vol. 53. No. 4. P. 1053–1065. <https://doi.org/10.15632/jtam-pl.53.4.1053>.
7. Бреславський Д. В., Коритко Ю. М., Татарінова О. А. Проектування та розробка скінченноелементного програмного забезпечення. Харків: «Підручник НТУ «ХПІ», 2017. 232 с.
8. Breslavsky D., Kozlyuk A., Tatatarinova O. Numerical simulation of two-dimensional problems of creep crack growth with material damage consideration. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies.* 2018. No. 2/7 (92). P. 27–33. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2018.119727>.
9. Рвачев В. Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. Киев: Наук. думка, 1982. 552 с.
10. Рвачев В. Л., Синекон Н. С. Метод R-функций в задачах теории упругости и пластичности. Киев: Наук. думка, 1990. 216 с.
11. Rodichev Y. M., Smetankina N. V., Shupikov O. M., Ugrimov S. V. Stress-strain assessment for laminated aircraft cockpit windows at static and dynamic loads. *Strength of Materials.* 2018. Vol. 50. Iss. 6. P. 868–873. <https://doi.org/10.1007/s11223-019-00033-4>.
12. Сметанкіна Н. В. Моделювання коливань шаруватих циліндричних оболонок складної форми при ударному навантаженні. *Вісн. Запорізь. нац. ун-ту. Фізико-математичні науки.* 2015. № 1. С. 162–170.
13. Zolochovsky A., Sklepus S., Galishin A., Kühhorn A., Kober M. A comparison between the 3D and the Kirchhoff-Love solutions for cylinders under creep-damage conditions. *Techn. Mechanik.* 2014. Vol. 34. No. 2. P. 104–113.
14. Singh S. B., Ray S. Creep analysis in an isotropic FGM rotating disc of Al–SiC composite. *J. Materials Proc. Techn.* 2003. Vol. 143–144. P. 616–622. [https://doi.org/10.1016/S0924-0136\(03\)00445-X](https://doi.org/10.1016/S0924-0136(03)00445-X).
15. Ogierman W., Kokot G. Mean field homogenization in multi-scale modelling of composite materials. *J. Achievements in Materials Manufacturing Eng. (JAMME).* 2013. Vol. 61. Iss. 2. P. 343–348.
16. Singla A., Gard M., Gupta V. K. Steady state creep behaviour of functionally graded composite by using analytical method. *Intern. J. Computer Appl.* 2015. No. 8. P. 13–17.

Поступила в редакцію 10.02.2020

## Метод дослідження повзучості функціонально-градієнтних тіл складної форми

С. М. Склепус

Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України,  
61046, Україна, м. Харків, вул. Пожарського, 2/10

Розглянуто задачу повзучості тіл обертання складної форми із функціонально-градієнтних матеріалів. Для варіаційної постановки задачі використовується функціонал у формі Лагранжа, заданий на кінематично можливих швидкостях переміщень. Розроблено числово-аналітичний метод розв'язання нелінійної початково-крайової задачі повзучості, який базується на спільному застосуванні методів R-функцій, Рунге та Рунге-Кутта-Мерсона. До переваг запропонованого методу можна віднести: точне урахування геометричної інформації про крайову задачу на аналітичному рівні, без будь-якої її апроксимації, подання наближеного розв'язку задачі в аналітичному вигляді, автоматичний вибір часового кроку. Розв'язано задачі повзучості порожнистого циліндра і тіла обертання складної форми – циліндра з прямокутним вирізом на зовнішній поверхні, навантажених постійним внутрішнім тиском, виконаних із функціонально-градієнтного матеріалу на основі алюмінію, армованого частинками карбїду кремнію SiC. Повзучість матеріалу описується законом Нортон. Модуль Юнга і характеристики повзучості залежать від об'ємної частини армуючого матеріалу. Обидва кінці циліндра вільні від зовнішнього навантаження і закріплені таким чином, що радіальні переміщення дорівнюють нулю. Побудована відповідна часткова структура розв'язку, що задовольняє граничні умови для швидкостей переміщень. Розрахунки виконані для циліндрів з двох різних композиційних матеріалів – матеріалу з однорідним розподілом SiC-частинок і функціонально-градієнтного матеріалу з перепадом об'ємного вмісту армуючих частинок уздовж радіуса. При цьому середнє значення об'ємного вмісту армуючих SiC-частинок в двох випадках було однаковим. Досліджено вплив градієнтних властивостей матеріалу і геометричної форми на напружено-деформований стан при повзучості. Наявність на зовнішній поверхні циліндра прямокутного вирізу призводить у всіх випадках до збільшення переміщень і напружень. При цьому ступінь впливу геометричної форми на напружено-деформований стан при повзучості істотно залежить від градієнтних властивостей матеріалу. Для циліндра з вирізом, виконаного з матеріалу з однорідним розподілом SiC-частинок, спостерігається значне зростання переміщень і напружень після 100 годин повзучості, в порівнянні з прямим циліндром. Для тіл, виконаних із функціонально-градієнтного матеріалу, вплив вирізу на напружено-деформований стан менш виражено.

**Ключові слова:** функціонально-градієнтний матеріал, тіло обертання, повзучість, метод R-функцій.