

УДК 53:002

## НЕСТАЦИОНАРНИЙ ОТКЛИК КОНИЧЕСКОЙ КОМПОЗИТНОЙ ОБОЛОЧКИ, УСИЛЕННОЙ УГЛЕРОДНЫМИ НАНОТРУБКАМИ

**К. В. Аврамов**, д-р техн. наук

[kvavramov@gmail.com](mailto:kvavramov@gmail.com)

ORCID: 0000-0002-8740-693X

**Б. В. Успенский**, канд. техн. наук

[Uspensky.kubes@gmail.com](mailto:Uspensky.kubes@gmail.com)

ORCID: 0000-0001-6360-7430

**Н. Г. Сахно**

[natali.sahno@gmail.com](mailto:natali.sahno@gmail.com)

ORCID: 0000-0003-4179-5316

**И. В. Библик**

[i.v.biblik@gmail.com](mailto:i.v.biblik@gmail.com)

ORCID: 0000-0002-8650-1134

Институт проблем машиностроения  
им. А. Н. Подгорного НАН Украины,  
61046, Украина, г. Харьков,  
ул. Пожарского, 2/10

*Статья посвящена разработке метода анализа нестационарного деформирования нанокompозитной оболочки под действием импульсной нагрузки. Развитие инновационных производственных технологий привело к возникновению новых материалов, которые имеют высокий потенциал для использования в аэрокосмической промышленности. В частности, к ним относятся материалы, армированные углеродными нанотрубками – так называемые нанокompозиты. Эти материалы демонстрируют высокую прочность и жесткость в сочетании с малой массой, что особенно актуально при проектировании элементов ракетных и авиационных конструкций: обтекателей, топливных баков, двигателей. В то же время требует дополнительных исследований поведение элементов конструкций при характерных воздействиях внешней среды в силу анизотропных и функционально-градиентных свойств материала. Определение механических свойств нанокompозитного материала представляет известную трудность в силу его анизотропной природы. Существуют различные подходы к решению этой проблемы. Наиболее простым и при этом хорошо зарекомендовавшим себя является модифицированное правило смешивания, которое используется в работе. Получены уравнения движения конической оболочки под действием ударной нагрузки. Для вывода уравнений движения оболочки используется теория высокого порядка, учитывающая сдвиги и инерцию вращения. Для анализа нестационарной динамики оболочки проведен анализ ее свободных колебаний. Результаты анализа имеют высокую точность по сравнению с конечноэлементным расчётом, проведённым в программном комплексе ANSYS. Предложен метод анализа динамического отклика оболочки под действием ударной нагрузки, который базируется на анализе собственных форм колебаний конструкции. Получены временные зависимости деформаций адаптера для случаев срабатывания двух и четырех симметрично расположенных пироустройств. Результаты анализа нестационарной динамики адаптера сравнивались с результатами конечноэлементного анализа.*

**Ключевые слова:** коническая оболочка, импульсная нагрузка, нестационарный процесс, нанокompозитный материал.

### Введение

В последние десятилетия нанотехнологии все больше проникают в практику разработки и изготовления инженерных конструкций и технологические процессы. С помощью нанотехнологий создаются новые материалы, к которым относятся и нанокompозиты. Армирующими элементами нанокompозитов являются углеродные нанотрубки (УНТ), которые имеют модуль Юнга и предел прочности на несколько порядков выше, чем у стали. Применение этих материалов является особенно актуальным при проектировании элементов ракетных и авиационных конструкций: обтекателей, топливных баков, двигателей.

Проведен ряд исследований по определению механических характеристик нанокompозитов. В работе [1] использованы методы микромеханики для численного моделирования эффективных упругих свойств нанокompозита. В [2] эти свойства определяются конечноэлементным подходом на базе континуальной механической модели. В исследовании [3] предложена модель, с помощью которой определены свойства нанокompозита с учетом взаимодействий между атомами в молекулярной модели.

Экспериментальные исследования механических свойств нанокompозитных материалов отражены в работах [4–7]. В [4] в ходе экспериментов на сжатие показано, что предел текучести резинового образца значительно увеличивается – вдвое при объемной части нанотрубок 1% и вчетверо – при 4%. В исследовании [5] обнаружено, что модуль Юнга ориентированных нанокompозитов может превышать таковой впятеро по сравнению с нанокompозитами, в которых нанотрубки ориентированы случайным образом. Авторы рассчитывают модуль Юнга нанокompозита с малой погрешностью с помощью моди-

© К. В. Аврамов, Б. В. Успенский, Н. Г. Сахно, И. В. Библик, 2020

фицированного правила смешивания. В статье [6] предлагается правило смешивания, которое существенно отличается от использованных в других аналогичных работах. В обзорной статье [7] представлены различные микромеханические модели для оценки механических свойств нанокompозитов.

В серии работ исследуется статика и динамика оболочек из нанокompозитов на основании их линейных моделей. Статика и динамика цилиндрических оболочек из нанокompозитов рассматривается в работах [8–12]. Линейные колебания пластин из нанокompозитов исследованы в работах [13–15]. Свободные колебания функционально-градиентных пологих оболочек двойной кривизны, армированных графеновыми нанопластинами, исследуются в [16, 17]. Динамический анализ композитных цилиндрических оболочек, армированных однослойными углеродными нанотрубками, под действием ударной нагрузки изложен в [18].

В данной работе описан метод анализа колебаний нанокompозитной оболочки под действием ударных нагрузок. Данный процесс соответствует поведению корпуса ракеты после отстрела адаптера с помощью пироустройств.

### Механические свойства нанокompозитов

Для определения механических свойств нанокompозитов используется правило смесей, которое хорошо зарекомендовало себя для оценки свойств нанокompозитов. Рассматривается наноармированный материал, в котором углеродные нанотрубки размещены вдоль образующей оболочки. Основные виды армирования (рис. 1) предполагают линейное изменение по толщине объемной плотности нанотрубок в материале. Так, при UD-армировании объемная плотность нанотрубок в материале постоянна; при V-армировании на внутренней поверхности оболочки она незначительна, а на внешней достигает максимума; при X-армировании равная максимальная плотность нанотрубок достигается на внешней и внутренней поверхностях оболочки, а на срединной поверхности она равна нулю.

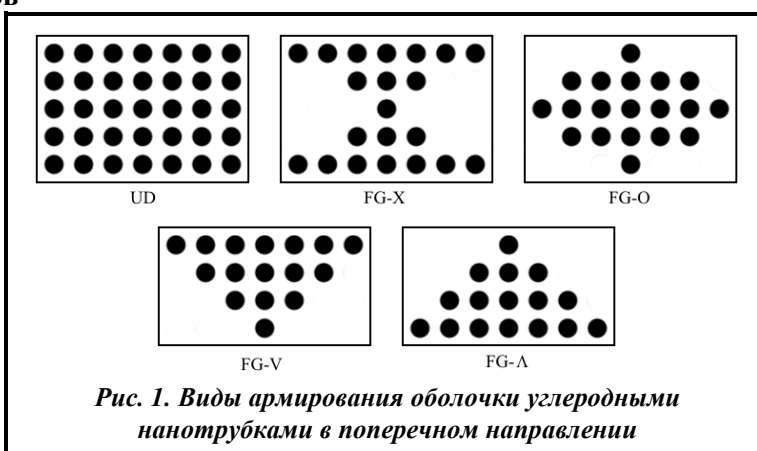


Рис. 1. Виды армирования оболочки углеродными нанотрубками в поперечном направлении

Обозначим через  $V_{CNT}^*$  часть объема, которую занимают равномерно распределенные нанотрубки. Тогда для каждого из видов армирования часть объема, занимаемого нанотрубками,  $V_{CNT}(z)$ , описывается следующими формулами [16, 19, 20]:

- для UD-CNT  $V_{CNT}(z) \equiv V_{CNT}^*$ ;
- для FGV-CNT  $V_{CNT}(z) = \left(1 + \frac{2z}{h}\right) V_{CNT}^*$ ;
- для FGA-CNT  $V_{CNT}(z) = \left(1 - \frac{2z}{h}\right) V_{CNT}^*$ ;
- для FGX-CNT  $V_{CNT}(z) = \frac{4|z|}{h} V_{CNT}^*$ ;
- для FGO-CNT  $V_{CNT}(z) = 2 \left(1 - \frac{2|z|}{h}\right) V_{CNT}^*$ .

Механические характеристики функционально-градиентного композитного материала цилиндрической оболочки зависят от поперечной координаты  $z$ . Они оцениваются с помощью правила смешивания следующим образом [19, 20]:

$$E_{11}(z) = \eta_1 V_{CNT}(z) E_{11}^{CNT} + V_m(z) E^m, \quad E_{22}(z) = \frac{\eta_2 E_{22}^{CNT} E^m}{V_{CNT}(z) E^m + V_m(z) E_{22}^{CNT}}, \quad G_{12}(z) = \frac{\eta_3 G_{12}^{CNT} G^m}{V_{CNT}(z) G^m + V_m(z) G_{12}^{CNT}},$$

$$\mu_{12}(z) = V_{CNT}(z)\mu_{12}^{CNT} + V_m(z)\mu^m, \quad \mu_{21}(z) = \frac{\mu_{12}(z)}{E_{11}(z)}E_{22}(z),$$

$$\rho(z) = V_{CNT}(z)\rho^{CNT} + V_m(z)\rho^m, \quad V_m(z) = 1 - V_{CNT}(z),$$

где  $E_{11}^{CNT}, E_{22}^{CNT}, G_{12}^{CNT}$  – модули Юнга и сдвига углеродных нанотрубок;  $\mu_{12}^{CNT}$  – коэффициент Пуассона нанотрубок;  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  – параметры эффективности армирования;  $E^m, G^m$  – модули Юнга и сдвига матрицы;  $\rho^{CNT}, \rho^m$  – плотность УНТ и матрицы.

Так как материал оболочки функционально градиентный, то в модели конструкции будет учитываться сдвиг [21, 22]. Кроме представленных выше упругих постоянных, необходимо определить модули сдвига. Следуя статье [16], они определяются так:  $G_{13}(z) = G_{12}(z); G_{23}(z) = G_{12}(z)$ .

Закон Гука для композитного материала оболочки имеет вид

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{\theta\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}(z) & Q_{12}(z) \\ Q_{21}(z) & Q_{22}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{\theta\theta} \end{bmatrix}, \quad \sigma_{\theta z} = G_{23}(z)\gamma_{\theta z}, \quad \sigma_{xz} = G_{13}(z)\gamma_{xz}, \quad \sigma_{x\theta} = G_{12}(z)\gamma_{x\theta},$$

$$Q_{11}(z) = \frac{E_{11}(z)}{1 - \mu_{12}(z)\mu_{21}(z)}, \quad Q_{22}(z) = \frac{E_{22}(z)}{1 - \mu_{12}(z)\mu_{21}(z)}, \quad Q_{12}(z) = \frac{\mu_{21}(z)E_{11}(z)}{1 - \mu_{12}(z)\mu_{21}(z)},$$

где  $\gamma_{xz}, \gamma_{\theta z}$  – деформации сдвига;  $\epsilon_{xx}, \epsilon_{\theta\theta}, \gamma_{\theta z}, \gamma_{xz}, \gamma_{x\theta}$  – элементы тензора деформаций;  $\sigma_{xz}, \sigma_{\theta z}$  – напряжения сдвига;  $\sigma_{xx}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{x\theta}$  – элементы тензора напряжений.

### Основные уравнения нестационарного отклика конической оболочки

Нестационарная динамика конической оболочки будет изучаться в криволинейной системе координат (рис. 2).

Ось  $x$  направлена вдоль образующей срединной поверхности конической оболочки. Ось  $\varphi$  описывает окружную координату конической оболочки. Окружности срединной поверхности, плоскости которых параллельны основанию, имеют радиус  $r: r = x \cdot \sin\alpha$ . Радиус кривизны этой поверхности конуса вдоль окружности обозначим через  $R_\varphi = x \cdot \text{tg}(\alpha)$ . Ось  $z$  перпендикулярна срединной поверхности и направлена наружу конструкции.

Так как рассматриваемая коническая оболочка является нанокомпозитной, то учитываются сдвиги и инерция вращения. Воспользуемся теорией высокого порядка, представленной в [22, 23]. Введем три проекции перемещений. Проекцию перемещений точек оболочки на образующую конуса обозначим  $u_x$ ; проекцию перемещений на окружную координату –  $u_\varphi$ ; проекцию перемещений на нормаль к срединной поверхности оболочки –  $u_z$ . Следуя [22, 23], проекции перемещений представим в следующем виде:

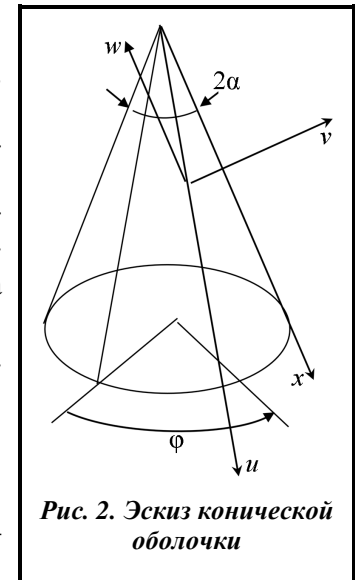


Рис. 2. Эскиз конической оболочки

$$u_x = u(x, \varphi, t) + z\psi_x(x, \varphi, t) + z^2\theta_x + z^3\gamma_x, \quad u_\varphi = \left(1 + \frac{z}{R_\varphi}\right)v(x, \varphi, t) + z\psi_\varphi(x, \varphi, t) + z^2\theta_\varphi + z^3\gamma_\varphi, \quad u_z = w(x, \varphi, t), \quad (1)$$

где  $u, v, w$  – проекции перемещений точек срединной поверхности на образующую, окружную координату и нормаль к срединной поверхности. Коэффициенты разложения  $\theta_x, \gamma_x, \theta_\varphi, \gamma_\varphi$  неизвестны; они определяются из граничных условий

$$\tau_{xz}|_{z=\pm 0,5h} = \tau_{\varphi z}|_{z=\pm 0,5h} = 0, \quad (2)$$

где  $h$  – толщина оболочки. Касательные напряжения на верхней и нижней поверхности оболочки нулевые. Эти граничные условия можно переписать относительно соответствующих деформаций сдвига  $\gamma_{xz}, \gamma_{\varphi z}$ , которые удовлетворяют соотношениям

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}, \quad \gamma_{\varphi z} = \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{1 + zR_\varphi^{-1}} \left( \frac{\partial u_z}{r\partial\varphi} - \frac{u_\varphi}{R_\varphi} \right). \quad (3)$$

Разложение (1) введем в соотношение (3), а результат учтем в граничных условиях (2). Тогда получим следующие соотношения для  $\theta_x, \gamma_x, \theta_\varphi, \gamma_\varphi$ :

$$\theta_x = 0, \quad \gamma_x = -\frac{4}{3h^2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \psi_x \right), \quad \theta_\varphi = \frac{1}{2R_\varphi r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{1}{2R_\varphi} \psi_\varphi, \quad \gamma_\varphi = -\frac{8R_\varphi^2 + h^2}{6R_\varphi^2 h^2} \psi_\varphi - \frac{(8R_\varphi^2 - h^2)}{6r h^2 R_\varphi^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} - \frac{v}{3R_\varphi^3}.$$

В дальнейшем задача о нестационарных колебаниях конструкции будет решаться в перемещениях относительно пяти неизвестных  $u(x, \varphi, t), v(x, \varphi, t), w(x, \varphi, t), \psi_x(x, \varphi, t), \psi_\varphi(x, \varphi, t)$ . Для записи уравнений движения конструкции воспользуемся методом заданных форм [24]. Для того чтобы использовать этот метод, необходимо получить выражение для потенциальной и кинетической энергии как функции перемещений. Прежде всего, выведем соотношения, связывающие деформации и компоненты перемещений. Для этого воспользуемся соотношениями, представленными в [23]. Запишем эти соотношения для конической оболочки. В результате элементы тензора деформаций могут быть представлены в следующем виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \varepsilon_{x,0} + z(k_x^{(0)} + zk_x^{(1)} + z^2 k_x^{(2)}), & \varepsilon_{\varphi\varphi} &= \varepsilon_{\varphi,0} + z(k_\varphi^{(0)} + zk_\varphi^{(1)} + z^2 k_\varphi^{(2)}), \\ \gamma_{x\varphi} &= \gamma_{x\varphi,0} + z(k_{x\varphi}^{(0)} + zk_{x\varphi}^{(1)} + z^2 k_{x\varphi}^{(2)}), & \gamma_{xz} &= \gamma_{xz,0} + z(k_{xz}^{(0)} + zk_{xz}^{(1)} + z^2 k_{xz}^{(2)}), \\ \gamma_{\varphi z} &= \gamma_{\varphi z,0} + z(k_{\varphi z}^{(0)} + zk_{\varphi z}^{(1)} + z^2 k_{\varphi z}^{(2)}), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\varepsilon_{x,0}, \varepsilon_{\varphi,0}, \gamma_{x\varphi,0}, \gamma_{xz,0}, \gamma_{\varphi z,0}, k_x^{(0,2)}, k_\varphi^{(0,2)}, k_{x\varphi}^{(0,2)}, k_{xz}^{(0,2)}, k_{\varphi z}^{(0,2)}$  – дифференциальные выражения относительно неизвестных  $u(x, \varphi, t), v(x, \varphi, t), w(x, \varphi, t), \psi_x(x, \varphi, t), \psi_\varphi(x, \varphi, t)$ .

Потенциальную энергию конической оболочки запишем так [23], [25]:

$$\Pi = 0,5 \iiint_V \left\{ Q_{11}(z) \varepsilon_{xx}^2 + 2Q_{12}(z) \varepsilon_{\varphi\varphi} \varepsilon_{xx} + Q_{22}(z) \varepsilon_{\varphi\varphi}^2 + G_{23}(z) \gamma_{\varphi z}^2 + G_{13}(z) \gamma_{xz}^2 + G_{21}(z) \gamma_{x\varphi}^2 \right\} \left( 1 + \frac{z}{R_\varphi} \right) dz r dx d\varphi, \quad (5)$$

где  $V$  – объем, занимаемый конической оболочкой. Разложения (4) введем в потенциальную энергию (5) и произведем разложение по степеням  $z$ . Тогда потенциальную энергию можно представить в следующем виде:

$$\Pi = 0,5 \iint_A r dx d\varphi \sum_{j=0}^5 h_j, \quad (6)$$

где  $A$  – область срединной поверхности конической оболочки;  $h_0 = P_0^{(0)}$ ;  $h_j = P_j^{(j)} + \frac{P_{j-1}^{(j)}}{R_\varphi}$ ;  $j = 1, \dots, 5$ ;

$P_{0..5}^{(j)}$  – квадратичные формы от выражений  $\varepsilon_{x,0}, \varepsilon_{\varphi,0}, \gamma_{x\varphi,0}, \gamma_{xz,0}, \gamma_{\varphi z,0}, k_x^{(0,2)}, k_\varphi^{(0,2)}, k_{x\varphi}^{(0,2)}, k_{xz}^{(0,2)}, k_{\varphi z}^{(0,2)}$ .

Кинетическую энергию конической оболочки запишем так [23, 25]:

$$T = 0,5 \iiint_V \rho(z) \left( \dot{u}_x^2 + \dot{u}_\varphi^2 + \dot{u}_z^2 \right) \left( 1 + \frac{z}{R_\varphi} \right) dz r dx d\varphi, \quad (7)$$

где  $\dot{u}_x = \frac{du_x}{dt}$ .

Разложение (1) введем в кинетическую энергию (7). Тогда она примет следующий вид:

$$T = 0,5 \iint_A r dx d\varphi \sum_{j=0}^5 r_j P_j, \quad (8)$$

где  $r_j = \int_{-0,5h}^{0,5h} z^j \rho(z) dz$ ;  $j = 0, 1, \dots$ ;  $P_{0..5}$  – квадратичные формы скоростей  $\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}, \dot{\psi}_x, \dot{\psi}_\varphi$ , а также выражений  $\dot{\gamma}_x, \dot{\gamma}_\varphi, \dot{\theta}_\varphi$ .

Рассмотрим нестационарную динамику конструкции вследствие срабатывания пиростроительств. Отметим, что таких устройств может быть произвольное количество. В дальнейшем рассмотрим  $v$  таких устройств. Они располагаются на верхнем сечении конической оболочки (рис. 3). Их положения определяются окружными координатами конуса  $\varphi_j; j=1, \dots, v$ . Действие пиростроительств описывается ударной нагрузкой, которая представляется сосредоточенной силой

$$Q = \begin{cases} Q_0 \sin\left(\frac{\pi t}{T}\right), & 0 \leq t \leq T \\ 0, & t > T \end{cases}, \quad (9)$$

где  $T$  – время действия ударной нагрузки.

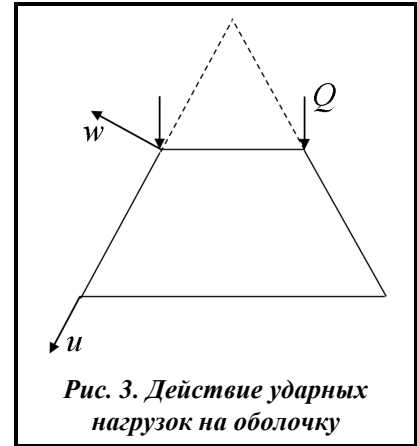


Рис. 3. Действие ударных нагрузок на оболочку

Параметр  $Q_0$  определяется по заданной величине импульса. Сосредоточенные силы  $Q$  направлены перпендикулярно к нижнему основанию конуса. Виртуальная работа от действия всех ударных нагрузок получается так:

$$\delta A = - \int_0^{2\pi} F_w \delta w(L_1, \varphi, t) d\varphi + \int_0^{2\pi} F_u \delta u(L_1, \varphi, t) d\varphi,$$

где  $F_w = \sin(\alpha) \sum_{j=1}^v Q_0 \sin\left(\frac{\pi t}{T}\right) \delta(\varphi - \varphi_j)$ ;  $F_u = \cos(\alpha) \sum_{j=1}^v Q_0 \sin\left(\frac{\pi t}{T}\right) \delta(\varphi - \varphi_j)$ ;  $L_1$  – значение продольной координаты  $x$  в верхнем сечении усеченного конуса. Окончательно выражение для виртуальной работы запишем в виде

$$\delta A = -\sin(\alpha) Q_0 \sin\left(\frac{\pi t}{T}\right) \sum_{j=1}^v \delta w(L_1, \varphi_j, t) + \cos(\alpha) Q_0 \sin\left(\frac{\pi t}{T}\right) \sum_{j=1}^v \delta u(L_1, \varphi_j, t). \quad (10)$$

В дальнейшем будем рассматривать защемленную снизу коническую оболочку (рис. 2). На защемленной стороне выполняются следующие граничные условия:

$$u|_{x=L_2} = v|_{x=L_2} = w|_{x=L_2} = \psi_x|_{x=L_2} = \psi_\varphi|_{x=L_2} = 0.$$

### Анализ собственных частот и форм колебаний

Нестационарный отклик конической оболочки раскладывается в ряд по собственным формам колебаний. Для анализа собственных частот и форм колебаний конической оболочки применяется метод Релея-Ритца [25, 26]. Основными неизвестными задачи являются перемещения и углы поворота нормали. Колебания конической оболочки представим в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ \psi_x \\ \psi_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_n(x) \cos(n\varphi) \\ V_n(x) \sin(n\varphi) \\ W_n(x) \cos(n\varphi) \\ X_n(x) \cos(n\varphi) \\ Y_n(x) \sin(n\varphi) \end{bmatrix} \cos(\omega t), \quad (11)$$

где  $\omega$  – частота собственных колебаний конструкции;  $n$  – число волн в окружном направлении. Функции  $U_n(x), V_n(x), W_n(x), X_n(x), Y_n(x)$  раскладываются по базисным функциям так:

$$\begin{bmatrix} U_n(x) \\ V_n(x) \\ W_n(x) \\ X_n(x) \\ Y_n(x) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^N \begin{bmatrix} A_i \\ A_{N+i} \\ A_{2N+i} \\ A_{3N+i} \\ A_{4N+i} \end{bmatrix} \vartheta_i(x), \quad (12)$$

где  $[A_1, \dots, A_{5N}]$  – неизвестные параметры, которые рассчитываются в результате применения метода Релея-Ритца.

Для исследования консольных усеченных конусов в качестве базисных функций  $\vartheta_i(x)$  выберем:  $\vartheta_i(x) = \sin\left[\frac{(2i-1)\pi(L_2 - L_1 - x)}{2(L_2 - L_1)}\right]$ . Разложение (11) подставляем в кинетическую и потенциальную энергии (6, 7), что приводит к следующим выражениям:

$$T = \omega^2 \sin^2(\omega t) T, \quad \Pi = \cos^2(\omega t) \Pi. \quad (13)$$

Воспользуемся принципом наименьшего действия, на основании которого можно записать [27]

$$\delta \int_0^{2\pi/\omega} (T - \Pi) dt = 0. \quad (14)$$

Из выражения (14) с учётом (12) и (13) могут быть найдены собственные частоты и формы колебаний оболочки.

### Уравнения нестационарных откликов конструкции

Собственные частоты  $\omega_i$  и формы собственных колебаний  $A^{(i)}$  определяются из проблемы собственных значений. Найденные соотношения вводятся в (12). В результате получается набор собственных форм колебаний в виде  $U_n^{(i)}(x), V_n^{(i)}(x), W_n^{(i)}(x), X_n^{(i)}(x), Y_n^{(i)}(x)$ .

Нестационарную динамику конструкции под действием ударных нагрузок (9) разложим в ряд по собственным формам колебаний так:

$$u = \sum_{j=1}^{N_*} U_n^{(j)}(x) q_j(t) \cos(n_j \varphi), \quad v = \sum_{j=1}^{N_*} V_n^{(j)}(x) q_{N_*+j}(t) \sin(n_j \varphi), \quad w = \sum_{j=1}^{N_*} W_n^{(j)}(x) q_{2N_*+j}(t) \cos(n_j \varphi),$$

$$\psi_x = \sum_{j=1}^{N_*} X_n^{(j)}(x) q_{3N_*+j}(t) \cos(n_j \varphi), \quad \psi_y = \sum_{j=1}^{N_*} Y_n^{(j)}(x) q_{4N_*+j}(t) \sin(n_j \varphi), \quad (15)$$

где  $(n_1, \dots, n_N)$  – набор чисел волн в окружном направлении, который определяется в результате анализа собственных частот конструкции;  $(q_1, \dots, q_{10N_*})$  – вектор обобщенных координат, который описывает нестационарный отклик конструкции.

Разложения (15) введем в потенциальную энергию конструкции (6) и кинетическую энергию (8). Произведем необходимое интегрирование. Тогда в результате получим

$$\Pi = 0,5 \sum_{i,k=1}^{10N_*} c_{ik} q_i q_k, \quad T = 0,5 \sum_{i,k=1}^{10N_*} m_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k.$$

Из выражения для виртуальной работы (10) найдем обобщенные силы  $Q_i$ , соответствующие обобщенной координате  $q_i$  в виде

$$Q_{2i} = Q_0 \cos(\alpha) \sin\left(\frac{\pi t}{T}\right) U_n^{(i)}(L_1) C_i, \quad Q_{4N+2i} = -Q_0 \sin(\alpha) \sin\left(\frac{\pi t}{T}\right) W_n^{(i)}(L_1) C_i,$$

$$C_i = \sum_{j=1}^v \cos(n_j \varphi_j), \quad i = 1, \dots, N_*.$$

Обыкновенные дифференциальные уравнения нестационарных откликов конструкции можно представить в следующей матричной форме:

$$M\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = \mathbf{Q}, \quad (16)$$

где  $\mathbf{Q} = \{Q_1, \dots, Q_{10N_*}\}$  – вектор обобщенных сил.

Для исследования линейной динамической системы (16) применяется численное интегрирование этих уравнений движения.

**Численный анализ динамики конструкции**

Рассмотрим собственные частоты и формы колебаний оболочки в виде усеченного конуса, который приведен на рис. 4. Геометрия конуса описывается следующими параметрами:  $L_1=0,225$  м;  $L_2=0,5$  м;  $h=5 \times 10^{-3}$  м.

Частоты собственных колебаний рассчитывались как методом Релея-Ритца, так и методом конечных элементов, который реализован в программном комплексе ANSYS. Результаты расчетов собственных частот усеченного конуса представлены в табл. 1. В первом столбце таблицы приведен номер расчета, а во втором – номер собственной частоты. В третьем столбце показано число волн в окружном направлении, которые наблюдаются при вибрациях с соответствующей частотой. В четвертом столбце приведено число базисных функций, которые используются в разложениях (15). В пятом столбце – число узлов в продольном направлении конической оболочки  $I_1$ , которые наблюдаются при колебаниях с соответствующей частотой. В шестом и седьмом

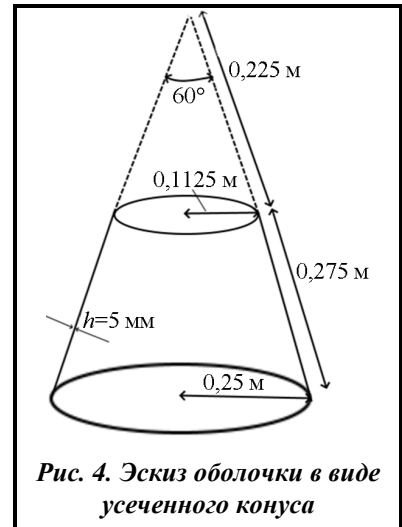


Рис. 4. Эскиз оболочки в виде усеченного конуса

столбцах показаны собственные частоты, полученные методом Релея-Ритца и методом конечных элементов (МКЭ). В восьмом столбце приведена относительная разница собственных частот, полученных двумя методами. Из первых четырех строк таблицы следует, что семи базисных функций в разложениях (15) достаточно для получения собственных частот с достаточной точностью.

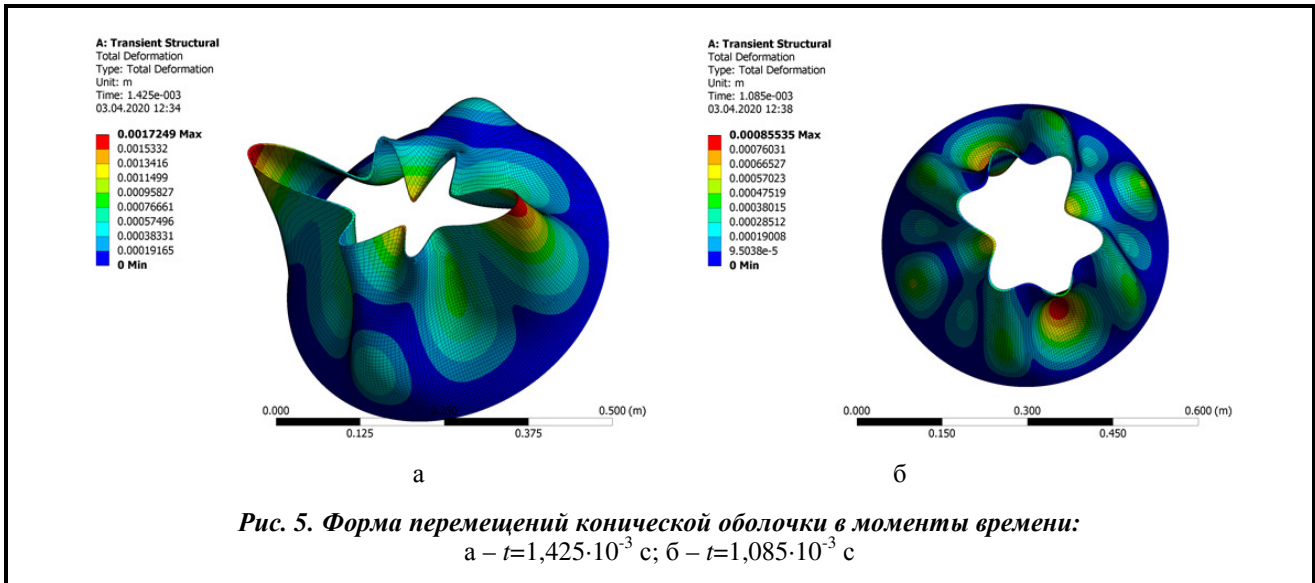
В табл. 1 представлены первые двадцать шесть собственные частот. Особо следует подчеркнуть, что для всех собственных частот результаты, полученные методом Релея-Ритца и методом конечных элементов, близки.

Исследуем нестационарные процессы, возникающие в конической оболочке (рис. 3) с параметрами, представленными выше, под действием двух ударных нагрузок  $Q(10)$ , которые имеют такие окружные координаты:  $\varphi_1=0$ ;  $\varphi_2=\pi$ . Эти ударные нагрузки располагаются по двум противоположным сторонам конической оболочки перпендикулярно ее основанию. Время действия этой ударной нагрузки  $T=5 \cdot 10^{-4}$  с и  $Q_0=3454$  Н. Рассматривалось постоянное армирование по толщине нанокompозита UD.

Таблица 1. Собственные частоты консольной оболочки в виде усеченного конуса

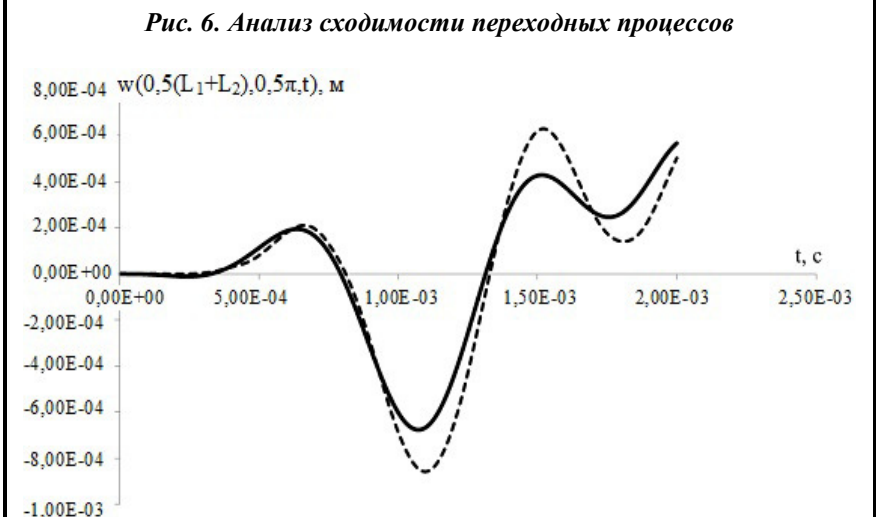
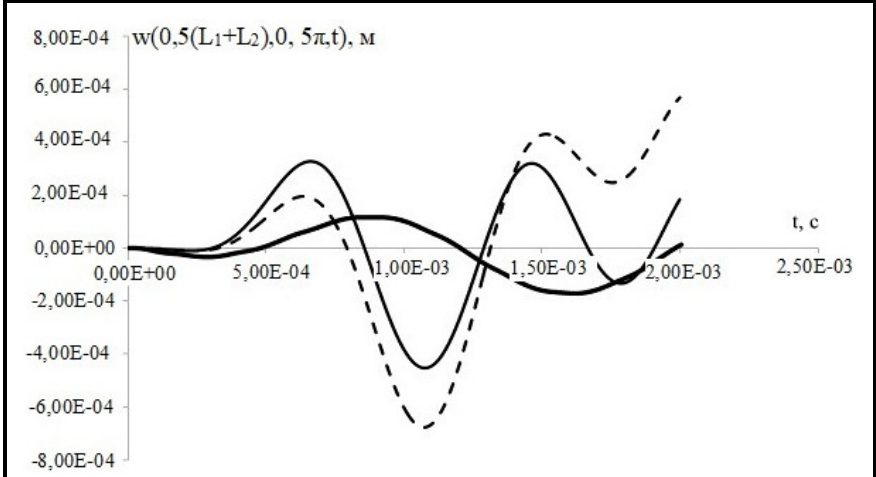
№ расчета	Номер частоты	Число волн	$N$	$I_1$	$\omega_i$ , Гц	МКЭ $\omega_i$ , Гц	$\delta$
1	1	3	7	1	533,71	539,67	0,0110
2	2	4	7	1	554,68	562,28	0,0130
3	3	2	7	1	648,83	655,11	0,0095
4	4	5	7	1	679,46	691,51	0,0170
5	5	6	7	1	856,46	872,32	0,0180
6	6	1	7	1	953,70	958,00	0,0045
7	7	7	7	1	1046,63	1064,80	0,0170
8	8	4	7	2	1247,73	1217,40	0,0250
9	9	5	7	2	1284,93	1261,20	0,0180
10	10	8	7	1	1239,57	1263,30	0,0180
11	11	3	7	2	1298,05	1271,70	0,0200
12	12	6	7	2	1412,07	1406,00	0,0040
13	13	2	7	2	1456,26	1442,50	0,0090
14	14	9	7	1	1442,42	1474,90	0,0200
15	15	7	7	2	1631,96	1651,90	0,0120
16	1	10	7	1	1660,02	1702,50	0,0250
17	17	1	7	2	1762,81	1768,00	0,0030
18	18	11	7	1	1893,00	1949,70	0,0280
19	19	8	7	2	1921,09	1962,80	0,0210
20	20	12	7	1	2140,20	2208,10	0,0300
21	21	9	7	2	2237,00	2293,80	0,0240
22	22	4	7	3	2464,41	2438,70	0,0100
23	23	5	7	3	2466,51	2443,50	0,0090
24	24	13	7	1	2400,92	2480,20	0,0300
25	25	3	7	3	2510,20	2485,20	0,0100
26	26	6	7	3	2514,33	2496,60	0,0070

Для конечноэлементных расчетов использовался коммерческий программный комплекс ANSYS. Формы перемещений оболочки в моменты времени  $t=1,425 \cdot 10^{-3}$  с и  $t=1,085 \cdot 10^{-3}$  с приводятся на рис. 5. Как видно из рисунка, в нестационарных колебаниях оболочки присутствует несколько собственных форм колебаний.



Рассмотрим случай двух пиростроительств, расположенных в диаметрально противоположных точках срединной поверхности усеченного конуса. Тогда  $\varphi_1=0$ ;  $\varphi_2=\pi$ . Для численного моделирования нестационарных динамических процессов использовалась линейная динамическая модель, выведенная выше. Численно интегрировалась динамическая система (16) методом Рунге-Кутты с переменным шагом.

Исследовалась сходимость нестационарных динамических процессов в конической конструкции, которая описывается динамической системой (16). При этом в расчетах учитывалось различное число слагаемых в разложении (15). Было построено три динамические модели. Первая модель имеет 10 степеней свободы в разложении (15). В этом случае решения разлагались по двум собственным формам колебаний 5 и 8 (табл. 1). Вторая динамическая модель имеет 30 степеней свободы. В этом случае решение (15) разлагается по шести собственным формам колебаний с номерами 5; 8; 10; 12; 13; 16 (табл. 1).





Третья динамическая модель имеет 60 степеней свободы. В этом случае решение (15) разлагается по 12 собственным формам колебаний с номерами: 2; 3; 5; 8; 10; 12; 13; 16; 19; 20; 22; 26 (табл. 1). Результаты анализа динамических процессов, описывающиеся этими тремя моделями, представлены на рис. 6. Приведены результаты численного интегрирования динамической системы с различным числом степеней свободы: сплошная жирная линия – с 10 степенями свободы; сплошная тонкая

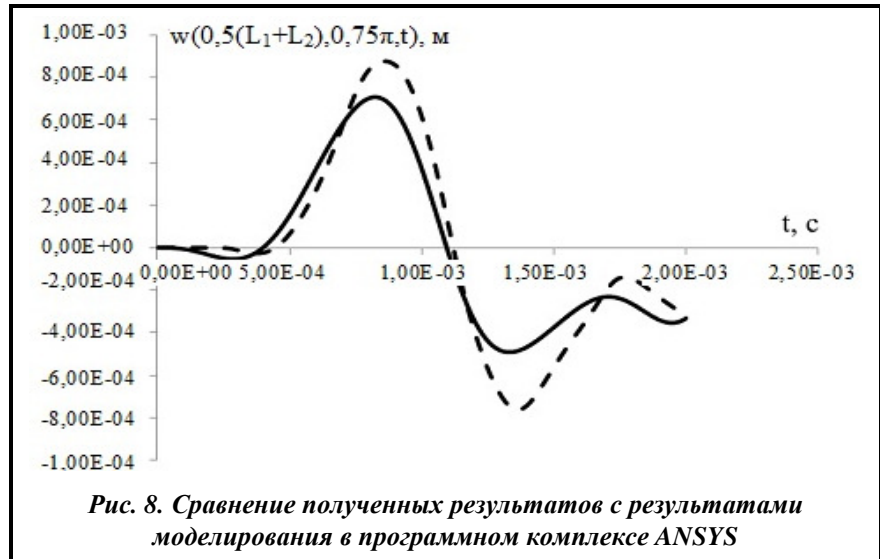


Рис. 8. Сравнение полученных результатов с результатами моделирования в программном комплексе ANSYS

линия – с 30 степенями свободы; пунктирная линия – с 60 степенями свободы. Итак, три нестационарных динамических процесса существенно различаются. Сравним полученные результаты с результатами моделирования в программном комплексе ANSYS. Результаты такого сравнения представлены на рис. 7.

На этом рисунке сплошной линией показаны результаты численного интегрирования динамической системы (16) с 60 степенями свободы, а пунктирной линией – результаты, полученные в коммерческом программном комплексе ANSYS. По оси ординат показаны поперечные перемещения  $w$  в точке  $x=0,5(L_1+L_2)$ ;  $\varphi=0,5\pi$ . Динамический процесс, полученный в программном комплексе ANSYS, и динамический процесс, полученный по модели 3, близки. Поэтому будем считать, что третья модель адекватно описывает динамический процесс.

Поперечные перемещения  $w$  еще в одной точке  $x=0,5(L_1+L_2)$ ;  $\varphi=0,75\pi$ , полученные на основании модели 3, сравнивались с результатами моделирования в программном комплексе ANSYS. Результаты такого сравнения приводятся на рис. 8, где сплошной линией показываются результаты интегрирования по модели 3, а пунктирной линией – результаты расчета в программном комплексе ANSYS. Итак, результаты, полученные этими двумя методами, близки.

## Выводы

В работе предложен метод анализа переходных процессов, возникающих в усеченной конической оболочке из нанокompозитного материала под действием ударной нагрузки. Проведено сравнение результатов с результатами, полученными с помощью конечноэлементного моделирования. Метод позволяет оценивать влияние ударных нагрузок на оболочку с требуемой точностью.

## Литература

1. Seidel G. D., Lagoudas D. C. Micromechanical analysis of the effective elastic properties of carbon nanotube reinforced composites. *Mechanics of Materials*. 2006. Vol. 38. Iss. 8–10. P. 884–907. <https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2005.06.029>.
2. Liu Y. J., Chen X. L. Evaluations of the effective material properties of carbon nanotube-based composites using a nanoscale representative volume element. *Mechanics of Materials*. 2003. Vol. 35. Iss. 1–2. P. 69–81. [https://doi.org/10.1016/S0167-6636\(02\)00200-4](https://doi.org/10.1016/S0167-6636(02)00200-4).
3. Odegard G. M., Gates T. S., Wise K. E., Park C., Siochi E. J. Constitutive modeling of nanotube-reinforced polymer composites. *Composites Sci. and Technology*. 2003. Vol. 63. Iss. 11. P. 1671–1687. [https://doi.org/10.1016/S0266-3538\(03\)00063-0](https://doi.org/10.1016/S0266-3538(03)00063-0).
4. Allaoui A., Bai S., Cheng H. M., Bai J. B. Mechanical and electrical properties of a MWNT/epoxy composite. *Composites Sci. and Technology*. 2002. Vol. 62. Iss. 15. P. 1993–1998. [https://doi.org/10.1016/S0266-3538\(02\)00129-X](https://doi.org/10.1016/S0266-3538(02)00129-X).
5. Kanagaraj S., Varanda F. R., Zhil'tsova T. V., Oliveira M. S. A., Simoes J. A. O. Mechanical properties of high density polyethylene/carbon nanotube composites. *Composites Sci. and Technology*. 2007. Vol. 67. Iss. 15–16. P. 3071–3077. <https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2007.04.024>.

6. Nejadi M., Asanjarani A., Dimitri R., Tornabene F. Static and free vibration analysis of functionally graded conical shells reinforced by carbon nanotubes. *Intern. J. Mech. Sci.* 2017. Vol. 130. P. 383–398. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2017.06.024>.
7. Hu H., Onyebueke L., Abatan A. Characterizing and modeling mechanical properties of nanocomposites. Review and evaluation. *J. Minerals & Materials Characterization & Eng.* 2010. Vol. 9. No. 4. P. 275–319. <https://doi.org/10.4236/jmmce.2010.94022>.
8. Mehrabadi S. J., Aragh B. S. Stress analysis of functionally graded open cylindrical shell reinforced by agglomerated carbon nanotubes. *Thin-Walled Structures.* 2014. Vol. 80. P. 130–141. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2014.02.016>.
9. Zhang L. W., Lei Z. X., Liew K. M., Yu J. L. Static and dynamic of carbon nanotube reinforced functionally graded cylindrical panels. *Composite Structures.* 2014. Vol. 111. P. 205–212. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2013.12.035>.
10. Song Z. G., Zhang L. W., Liew K. M. Vibration analysis of CNT-reinforced functionally graded composite cylindrical shells in thermal environments. *Intern. J. Mech. Sci.* 2016. Vol. 115–116. P. 339–347. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2016.06.020>.
11. Sobhaniragh B., Batra R. C., Mansur W. J., Peters F. C. Thermal response of ceramic matrix nanocomposite cylindrical shells using Eshelby-Mori-Tanaka homogenization scheme. *Composites Part B: Engineering.* 2017. Vol. 118. P. 41–53. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2017.02.032>.
12. Yaser K., Rossana D., Francesco T. Free vibration of FG-CNT reinforced composite skew cylindrical shells using the Chebyshev-Ritz formulation. *Composites Part B: Engineering.* 2018. Vol. 147. P. 169–177. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2018.04.028>.
13. Lei Z. X., Liew K. M., Yu J. L. Free vibration analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates using the element-free kp-Ritz method in thermal environment. *Composite Structures.* 2013. Vol. 106. P. 128–138. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2013.06.003>.
14. Lei Z. X., Zhang L. W., Liew K. M. Elastodynamic analysis of carbon nanotube-reinforced functionally graded plates. *Intern. J. Mech. Sci.* 2015. Vol. 99. P. 208–217. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2015.05.014>.
15. García-Macías E., Rodríguez-Tembleque L., Sáez A. Bending and free vibration analysis of functionally graded graphene vs. carbon nanotube reinforced composite plates. *Composite Structures.* 2018. Vol. 186. P. 123–138. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.11.076>.
16. Wang Q., Cui X., Qin B., Liang Q. Vibration analysis of the functionally graded carbon nanotube reinforced composite shallow shells with arbitrary boundary conditions. *Composite Structures.* 2017. Vol. 182. P. 364–379. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.09.043>.
17. Wang A., Chen H., Hao Y., Zhang Y. Vibration and bending behavior of functionally graded nanocomposite doubly-curved shallow shells reinforced by graphene nanoplatelets. *Results in Physics.* 2018. Vol. 9. P. 550–559. <https://doi.org/10.1016/j.rinp.2018.02.062>.
18. Moradi-Dastjerdi R., Foroutan M., Pourasghar A. Dynamic analysis of functionally graded nanocomposite cylinders reinforced by carbon nanotube by a mesh-free method. *Materials and Design.* 2013. Vol. 44. P. 256–266. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2012.07.069>.
19. Shen H.-S. Nonlinear bending of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates in thermal environments. *Composite Structures.* 2009. Vol. 91. Iss. 1. P. 9–19. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2009.04.026>.
20. Wang Q., Qin B., Shi D., Liang Q. A semi-analytical method for vibration analysis of functionally graded carbon nanotube reinforced composite doubly-curved panels and shells of revolution. *Composite Structures.* 2017. Vol. 174. P. 87–109. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.04.038>.
21. Reddy J. N. A simple higher-order theory for laminated composite plates. *ASME J. Appl. Mech.* 1984. Vol. 51. Iss. 4. P. 745–752. <https://doi.org/10.1115/1.3167719>.
22. Reddy J. N. A refined nonlinear theory of plates with transverse shear deformation. *Int. J. Solids and Structures.* 1984. Vol. 20. Iss. 9–10. P. 881–896. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(84\)90056-8](https://doi.org/10.1016/0020-7683(84)90056-8).
23. Amabili M. A new non-linear higher-order shear deformation theory for large-amplitude vibrations of laminated doubly curved shells. *Int. J. Non-Linear Mech.* 2010. Vol. 45. Iss. 4. P. 409–418. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2009.12.013>.
24. Meirovitch L. Elements of vibration analysis. New York: McGraw-Hill Publishing Company, 1986. 560 p.
25. Avramov K., Chernobryvko M., Uspensky B., Seitkazenova K., Myrzaliyev D. Self-sustained vibrations of functionally graded carbon nanotubes reinforced composite cylindrical shell in supersonic flow. *Nonlinear Dynamics.* 2019. Vol. 98. No. 3. P. 1853–1876. <https://doi.org/10.1007/s11071-019-05292-z>.

26. Chernobryvko M. V., Avramov K. V., Romanenko V. N., Batutina T. J., Tonkonogenko A. M. Free linear vibrations of thin axisymmetric parabolic shells. *Meccanica*. 2014. Vol. 49. No. 8. P. 2839–2845. <https://doi.org/10.1007/s11012-014-0027-6>.
27. Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. М.: Наука, 1966. 300 с.

Поступила в редакцію 30.04.2020

## Нестационарний відгук конічної композитної оболонки, посиленої вуглецевими нанотрубками

**К. В. Аврамов, Б. В. Успенський, Н. Г. Сахно, І. В. Біблік**

Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України,  
61046, Україна, м. Харків, вул. Пожарського, 2/10

*Стаття присвячена розробці методу аналізу нестационарного деформування нанокомпозитної оболонки під впливом імпульсного навантаження. Розвиток інноваційних виробничих технологій привів до виникнення нових матеріалів, які мають високий потенціал для використання в аерокосмічній промисловості. До них, зокрема, належать матеріали, які армовано вуглецевими нанотрубками (ВНТ) – так звані нанокомпозити. Ці матеріали демонструють високу міцність та жорсткість в поєднанні з малою масою, що є надзвичайно актуальним під час проектування елементів ракетних та авіаційних конструкцій: обтічників, паливних баків, двигунів. Водночас, поведінка елементів конструкції за характерних впливів зовнішнього середовища потребує додаткового дослідження внаслідок анізотропних та функціонально-градієнтних властивостей матеріалу. Визначення механічних властивостей нанокомпозитного матеріалу викликає деяку складність внаслідок його нанокомпозитної природи. Існують різні підходи до розв'язання цієї проблеми. Модифіковане правило змішування є найпростішим і при цьому таким, що добре себе зарекомендувало. Його використано в роботі. Отримано рівняння руху конічної оболонки під впливом ударного навантаження. Для виводу рівнянь руху оболонки використано теорію високого порядку, яка враховує зсуви та інерцію обертання. Для аналізу нестационарної динаміки оболонки проведено аналіз її вільних коливань. Результати аналізу мають високу точність у порівнянні зі скінченно-елементним розрахунком, який проведено в програмному комплексі ANSYS. Запропоновано метод аналізу динамічного відгуку оболонки під впливом ударного навантаження, який базується на аналізі власних форм конструкції. Отримано часові залежності деформації адаптера для випадків спрацювання двох та чотирьох піропристроїв. Результати аналізу нестационарної динаміки адаптера було порівняно зі скінченно-елементним аналізом.*

**Ключові слова:** конічна оболонка, імпульсне навантаження, нестационарний процес, нанокомпозитний матеріал.