УДК 519.85

ПОСТРОЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОТНОШЕНИЙ ЭЛЛИПСОВ И ОБЛАСТЕЙ, ОГРАНИЧЕННЫХ ПАРАБОЛОЙ, В ЗАДАЧАХ РАЗМЕЩЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

Н. И. Гиль, д-р техн. наук
GilMI@i.ua
ORCID: 0000-0003-0381-0925

В. Н. Пацук, канд. техн. наук
vmpatsuk@gmail.com
ORCID: 0000-0003-3350-4515

Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины,
61046, Украина, г. Харьков,
ул. Пожарского, 2/10

В настоящее время значительно возрастает интерес к практическим задачам математического моделирования размещения геометрических объектов различной физической природы в заданных областях. При решении таких задач возникает необходимость в построении их математических моделей, которые реализуются через построение аналитических условий отношений размещаемых объектов и областей размещения. Задача построения условий взаимного непересечения произвольно ориентированных объектов, границы которых образованы кривыми второго порядка, имеет широкое применение на практике и в то же время исследована значительно меньше, чем аналогичная задача для более простых объектов. Плодотворным и отработанным методом представления таких условий является построение Ф-функций и квази-Ф-функций. В настоящей статье в качестве геометрических объектов рассматриваются эллипс и область, ограниченная параболой. Границы рассматриваемых объектов допускают как неявное, так и параметрическое представление. Предлагаемый подход к моделированию геометрических отношений эллипсов и областей, ограниченных параболами, основан на преобразовании координат, приведении уравнения эллипса к уравнению круга с использованием канонического преобразования. В частности, построены условия включения эллипса в область, ограниченную параболой, а также условия их взаимного непересечения. Построение условий взаимоотношений рассматриваемых геометрических объектов осуществлено на основе канонических уравнений эллипса и параболы с учётом их параметров размещения, включая повороты. Эти условия представлены в виде системы неравенств, а также в виде единого аналитического выражения. Представленные условия могут быть использованы при построении адекватных математических моделей оптимизационных задач размещения соответствующих геометрических объектов для аналитического описания областей допустимых решений. Эти модели могут использоваться далее в формулировке математических моделей задач упаковки и раскроя, расширяя круг объектов и/или повышая точность и снижая время получения решения задачи.

***Ключевые слова**: эллипс, парабола, непересечение, включение, Ф-функция.*

Введение

Важнейшей составной частью решения задач, связанных с моделированием размещения геометрических объектов в заданных областях, является построение адекватных математических моделей соответствующих оптимизационных задач. Основной составляющей таких математических моделей является представление в аналитическом виде условий взаимодействия размещаемых геометрических объектов и областей размещения, в том числе условий взаимного непересечения геометрических объектов, а также условий включения их в область размещения. Для большинства классов двухмерных геометрических объектов, в том числе кругов, многоугольников, а также объектов, получаемых их комбинацией на основе объединений и пересечений, такие условия реализованы на основе Ф-функций [1] и квази-Ф-функций [2]. В двухмерном случае построены Ф-функции для объектов, границы которых состоят из отрезков прямых, выпуклых и вогнутых дуг окружностей [3].

В то же время построение условий взаимного непересечения и включения для объектов, границы которых описываются другими видами кривых, существенно сложнее и результатов в этой области меньше. Так, в [4] для оптимальной упаковки эллипсов применяется подход с использованием квази-Ф-функций. В [5] E. Birgin с соавторами успешно применяет для задач оптимизаци укладок с участием эллипсов особое преобразование пространства, упрощая эти задачи. В [6–8] используется аппроксимация эллипсов определённым образом построенным набором кругов. Распространённым методом является также аппросимация границ объектов ломаными линиями в двухмерном и многогранными поверхностями в трёхмерном случаях. Из-за сложностей построения Ф-функций для упомянутых объектов были предложены квази-Ф-функций и с их помощью решён ряд задач, в частности, для эллипсов и эллипсоидов [6, 9, 10].

В настоящей статье в качестве геометрических объектов рассматриваются эллипсы и область, ограниченная параболой.

Условия включения эллипса в область, ограниченную параболой

В дальнейшем изложении будем отождествлять такие понятия: эллипс как кривая линия и эллипс как область, ограниченная этой кривой.

Пусть относительно некоторой системы координат $\bar{x}o\bar{y}$ есть область $D\{\bar{u}_1, \bar{\vartheta}_1\}$, ограниченная параболой $S_1\{\bar{u}_1, \bar{\vartheta}_1\}$, и эллипс $S_2\{\bar{u}_2, \bar{\vartheta}_2\}$, где $\bar{u}_i = \{\bar{x}_i, \bar{y}_i\}$ и $\bar{\vartheta}_i$, $i = 1{,}2$, – параметры размещения объекта S_i (положение начала и угол поворота собственной системы координат, связанной с объектом S_i, относительно системы координат $\bar{x}o\bar{y}$). В собственных системах координат xoy и $X'OY'$ парабола и эллипс заданы уравнениями $y = px^2$ ($p > 0$) и $B^2X'^2 + A^2Y'^2 - A^2B^2 = 0$ ($A > B$) соответственно. Заметим, что $S_2\{\bar{u}_2, \bar{\vartheta}_2\}$ является включением в область $D\{\bar{u}_1, \bar{\vartheta}_1\}$, если $S_2\{\bar{u}_2, \bar{\vartheta}_2\} \cap D_2\{\bar{u}_2, \bar{\vartheta}_2\} = S_2\{\bar{u}_2, \bar{\vartheta}_2\}$.

Выберем в качестве основной систему координат xoy, относительно которой имеем область $D\{u_1, \vartheta_1\}$ и эллипс $S_2\{u_2, \vartheta_2\}$, где $u_1 = (0{,}0)$, $\vartheta_1 = 0$, $u_2 = (x_0, y_0)$, $\vartheta_2 = (\bar{\vartheta}_2 - \bar{\vartheta}_1)$. Здесь

$$\begin{aligned} x_0 &= (\bar{x}_2 - \bar{x}_1)\cos\bar{\vartheta}_1 - (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)\sin\bar{\vartheta}_1, \\ y_0 &= (\bar{x}_2 - \bar{x}_1)\sin\bar{\vartheta}_1 + (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)\cos\bar{\vartheta}_1. \end{aligned} \tag{1}$$

Введём новую систему координат $x'oy'$, повёрнутую на угол ϑ_2 относительно xoy. С учётом формул преобразования в этой системе координат уравнения параболы и эллипса имеют вид $x'\sin\vartheta_2 + y'\cos\vartheta_2 = p[x'\cos\vartheta_2 - y'\sin\vartheta_2]^2$ и $B^2(x' - x_0')^2 + A^2(y' - y_0')^2 - A^2B^2 = 0$ соответственно, где

$$\begin{aligned} x'_0 &= x_0\cos\vartheta_2 + y_0\sin\vartheta_2, \\ y'_0 &= -x_0\sin\vartheta_2 + y_0\cos\vartheta_2, \end{aligned}$$

x_0, y_0 определяются из (1).

Осуществим сжатие в направлении оси ox' в соответствии с формулами преобразования $x' = \dfrac{A}{B}\bar{X}$, $y' = \bar{Y}$. Тогда в новой системе координат $\bar{X}O\bar{Y}$ парабола описывается уравнением

$$\frac{A}{B}\bar{X}\sin\vartheta_2 + \bar{Y}\cos\vartheta_2 = p[\frac{A}{B}\bar{X}\cos\vartheta_2 - \bar{Y}\sin\vartheta_2]^2,$$

а эллипс превращается в круг, уравнение которого имеет вид

$$(\bar{X} - \bar{X}_0)^2 + (\bar{Y} - \bar{Y}_0)^2 - B^2 = 0,$$

где $\bar{X}_0 = \dfrac{B}{A}[x_0\cos\vartheta_2 + y_0\sin\vartheta_2)]$, $\bar{Y}_0 = -x_0\sin\vartheta_2 + y_0\cos\vartheta_2$.

Уравнение параболы запишем как

$$a_{11}\bar{X}^2 + 2a_{12}\bar{X}\bar{Y} + a_{22}\bar{Y}^2 + 2a_{13}\bar{X} + 2a_{23}\bar{Y} + a_{33} = 0, \tag{2}$$

где

$$\begin{aligned} &a_{11} = pA^2\cos^2\vartheta_2,\ a_{22} = pB^2\sin^2\vartheta_2,\ a_{12} = -pAB\sin\vartheta_2\cos\vartheta_2, \\ &a_{13} = -\frac{1}{2}AB\sin\vartheta_2,\ a_{23} = -\frac{1}{2}B^2\cos\vartheta_2,\ a_{33} = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Известно [11], что уравнение вида (2) (если ввести новую систему координат XOY, совершив поворот на угол φ, удовлетворяющий уравнению $\operatorname{tg} 2\varphi = \dfrac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}$) приводится к каноническому уравнению параболы $X = \dfrac{1}{2p'}Y^2$, где $p' = \dfrac{1}{J}\sqrt{-\dfrac{\Delta}{J}}$, $J = a_{11} + a_{22}$, $\Delta = \det\lfloor a_{ij} \rfloor$, $i, j = 1,2,3$ ($a_{ij} = a_{ji}$).

С учётом (3) после несложных преобразований

$$p' = \frac{AB^2}{2p(A^2\cos^2\vartheta_2 + B^2\sin^2\vartheta_2)^{3/2}}. \tag{4}$$

Таким образом, в системе координат XOY имеем область $\overline{D}\{0,0,0\}$, ограниченную параболой $X = \dfrac{1}{2p'}Y^2$, и круг $\overline{S}\{X_0, Y_0\}$, ограниченный окружностью $(X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2 - B^2 = 0$, где

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{B}{A}(x_0\cos\vartheta_2 + y_0\sin\vartheta_2)\cos 2\varphi + (x_0\sin\vartheta_2 - y_0\cos\vartheta_2)\sin 2\varphi, \\ Y_0 &= -\frac{B}{A}(x_0\cos\vartheta_2 + y_0\sin\vartheta_2)\sin 2\varphi + (x_0\sin\vartheta_2 - y_0\cos\vartheta_2)\cos 2\varphi, \\ \sin 2\varphi &= -2\frac{AB\sin\vartheta_2\cos\vartheta_2}{A^2\cos^2\vartheta_2 + B^2\sin^2\vartheta_2}, \ \cos 2\varphi = \frac{A^2\cos^2\vartheta_2 - B^2\sin^2\vartheta_2}{A^2\cos^2\vartheta_2 + B^2\sin^2\vartheta_2}. \end{aligned} \tag{5}$$

Тогда условия включения эллипса $S_2\{\overline{u}_2, \overline{\vartheta}_2\}$ в область $D\{\overline{u}_1, \overline{\vartheta}_1\}$ сводятся к условиям включения круга $\overline{S}\{X_0, Y_0\}$ в область $\overline{D}\{0,0,0\}$. Обозначим через $\overline{S}^\gamma$ окружность радиуса γB с центром в точке (X_0, X_0). Можно утверждать, что круг $\overline{S}\{X_0, Y_0\}$ является включением в область $\overline{D}\{0,0,0\}$, если существует точка (X^*, Y^*), удовлетворяющая условиям:

а) точка (X^*, Y^*) не является внутренней точкой круга $\overline{S}\{X, Y\}$;

б) центр круга (X_0, Y_0) находится внутри области $\overline{D}\{0,0,0\}$;

в) точка (X^*, Y^*) находится в положительной полуплоскости, ограниченной прямой $X - \overline{X} = 0$, где $\overline{X}$ – абсцисса точки соприкосновения параболы $X = \dfrac{1}{2p'}Y^2$ и окружности радиуса B с центром в точке $(\overline{X}_0, 0)$;

г) точка (X^*, Y^*) принадлежит параболе $X = \dfrac{1}{2p'}Y^2$ и окружности $\overline{S}^\gamma$;

д) угловые коэффициенты касательных к параболе $X = \dfrac{1}{2p'}Y^2$ и окружности $\overline{S}^\gamma$ в точке (X^*, Y^*) равны.

Значение $\overline{X}$ определяется из системы уравнений

$$\begin{cases} \overline{X} - \dfrac{1}{2p'}\overline{Y}^2 = 0, \\ (\overline{X} - \overline{X}_0)^2 + \overline{Y}^2 - B^2 = 0, \\ p'\overline{Y} + \overline{Y}(\overline{X} - \overline{X}_0) = 0, \end{cases}$$

которые реализуют условия принадлежности точки $(\bar{X}, \bar{Y})$ окружности $\bar{S}\{\bar{X}_0, 0\}$ и параболе $X = \frac{1}{2p'}Y^2$, а также равенство угловых коэффициентов касательных к окружности и параболе в точке $(\bar{X}, \bar{Y})$. Решением этой системы есть $\bar{X} = \frac{1}{2p'}(B^2 - p'^2)$, $\bar{Y} = \pm\sqrt{B^2 - p'^2}$ при условии $p' < B$ (радиус кривизны параболы в точке $(0,0)$ меньше радиуса круга). В противном случае $\bar{X} = \bar{Y} = 0$.

Условие д) в данном случае представляется в виде

$$\phi(X_0, Y_0, Y^*) \equiv p'(Y^* - Y_0) + Y^*(\frac{1}{2p'}Y^{*2} - X_0) = 0. \tag{6}$$

Таким образом, условия включения круга $\bar{S}\{X_0, Y_0\}$ в область $\bar{D}\{0,0,0\}$ сводятся к выполнению системы неравенств

$$\begin{cases} f_2(X_0, X_0, Y^*) \equiv (\frac{1}{2p'}Y^{*2} - X_0)^2 + (Y^* - Y_0)^2 - B^2 \geq 0, \\ f_1(X_0, X_0) \equiv X_0 - \frac{1}{2p'}Y_0^2 \geq 0, \\ h(Y^*) \equiv \frac{1}{2p'}Y^{*2} - \bar{X} > 0, \end{cases}$$

где p' определяется из (4); X_0, Y_0 определяются из (5), Y^* есть одно из решений уравнения (6).

Условия включения $\bar{S}(X_0, Y_0)$ в область $\bar{D}\{0,0,0\}$ можно рассматривать как условия непересечения объектов $R^2 \setminus \operatorname{int}\bar{D}\{0,0,0\}$ и $\bar{S}(X_0, Y_0)$, т. е. представить в виде Φ-функции

$$\Phi(X_0, Y_0, Y^*) = \max_{Y_i^*} \min \{f_2(X_0, Y_0, Y^*), f_1(X_0, Y_0), h(Y^*)\},$$

где Y_i^*, $i = 1,2,...$ – корни уравнения (6), $Y_i^* \in \left[\sqrt{B^2 - p'^2}, \sqrt{2p'X_0}\right]$, если $Y_0 \geq 0$, $Y_i^* \in \left[-\sqrt{2p'X_0}, -\sqrt{B^2 - p'^2}\right]$, если $Y_0 < 0$.

Условия непересечения эллипса и области, ограниченной параболой

Пусть в системе координат $\bar{x}o\bar{y}$ имеем область $D\{\bar{u}_1, \bar{\vartheta}_1\}$, ограниченную параболой $S_1\{\bar{u}_1, \bar{\vartheta}_1\}$, и эллипс $S_2\{\bar{u}_2, \bar{\vartheta}_2\}$, которые в собственных системах координат xoy и $X'OY'$ описываются уравнениями $y - px^2 = 0$ ($p > 0$) и $B^2X'^2 + A^2Y'^2 - A^2B^2 = 0$ ($A > B$).

Под непересечением объектов $\Upsilon_1, \Upsilon_2 \in R^2$ будем далее понимать непересечение их внутренностей ($\operatorname{int}\Upsilon_1 \cap \operatorname{int}\Upsilon_2 = \varnothing$) и допускать касание, т. е. пересечение границ.

Если в качестве основной выбрать систему координат xoy, то относительно неё имеем область $D\{u_1, \vartheta_1\}$ и эллипс $S_2\{u_2, \vartheta_2\}$, где $u_1 = (0,0)$, $\vartheta_1 = 0$, $u_2 = (x_0, y_0)$, $\vartheta_2 = \bar{\vartheta}_2 - \bar{\vartheta}_1$. Здесь

$$\begin{aligned} x_0 &= (\bar{x}_2 - \bar{x}_1)\cos\vartheta_1 - (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)\sin\vartheta_1, \\ y_0 &= (\bar{x}_2 - \bar{x}_1)\sin\vartheta_1 + (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)\cos\vartheta_1. \end{aligned} \tag{7}$$

С учетом формул преобразования

$$\begin{aligned} X' &= (x - x_0)\cos\vartheta_2 + (y - y_0)\sin\vartheta_2, \\ Y' &= -(x - x_0)\sin\vartheta_2 + (y - y_0)\cos\vartheta_2 \end{aligned}$$

уравнение эллипса $S_2\{x_0, y_0, \vartheta_2\}$ в системе координат xoy принимает вид

$$B^2[(x-x_0)\cos\vartheta_2+(y-y_0)\sin\vartheta_2]^2+ \\ A^2[-(x-x_0)\sin\vartheta_2+(y-y_0)\cos\vartheta_2]^2-A^2B^2=0. \quad (8)$$

Пусть (x^*, y^*) – некоторая точка параболы $y-px^2=0$. Уравнение касательной к параболе в точке (x^*, y^*) имеет вид

$$F(x,y)\equiv 2px^*x-y-px^{*2}=0. \quad (9)$$

Обозначим через (x_{q_i}, y_{q_i}), $i=1,2$, соответствующие точки эллипса (8), в которых касательные параллельны касательной (9) в точке (x^*, y^*). Угловой коэффициент касательной к эллипсу (8) в точке (x_q, y_q) равен

$$-\frac{R(x_q-x_0)+L(y_q-y_0)}{L(x_q-x_0)+S(y_q-y_0)},$$

где

$$R=B^2\cos^2\vartheta_2+A^2\sin^2\vartheta_2, \\ S=B^2\sin^2\vartheta_2+A^2\cos^2\vartheta_2, \\ L=(B^2-A^2)\sin\vartheta_2\cos\vartheta_2. \quad (10)$$

Для определения координат x_q, y_q используем два условия:

а) точка (x_q, y_q) является точкой эллипса, т. е. удовлетворяет уравнению (8);

б) угловые коэффициенты касательных к параболе и к эллипсу в соответствующих точках (x^*, y^*) и (x_q, y_q) равны.

Условие б) в данном случае принимает вид

$$2px^*[L(x_q-x_0)+S(y_q-y_0)]+R(x_q-x_0)+L(y_q-y_0)=0,$$

где x_0 y_0 определяются из (7).

Таким образом, имеем систему двух уравнений

$$\begin{cases} B^2[(x_q-x_0)\cos\vartheta_2+(y_q-y_0)\sin\vartheta_2]^2+ \\ A^2[-(x_q-x_0)\sin\vartheta_2+(y_q-y_0)\cos\vartheta_2]^2-A^2B^2=0, \\ 2px^*[L(x_q-x_0)+S(y_q-y_0)]+R(x_q-x_0)+L(y_q-y_0)=0. \end{cases}$$

Решением этой системы является вектор со значениями искомых координат

$$x_{q_{1,2}}=x_0\pm\frac{AB}{\sqrt{B^2(\cos\vartheta_2+D\sin\vartheta_2)^2+A^2(D\cos\vartheta_2-\sin\vartheta_2)^2}},$$

$$y_{q_{1,2}}=y_0\pm\frac{DAB}{\sqrt{B^2(\cos\vartheta_2+D\sin\vartheta_2)^2+A^2(D\cos\vartheta_2-\sin\vartheta_2)^2}},$$

где $D=-\dfrac{2pLx^*+R}{2pSx^*+L}$, L, R, S определяются из (10).

Можно утверждать, что если

– точки (x_{q_1}, y_{q_1}) и (x_{q_2}, y_{q_2}) имеют неотрицательные уклонения относительно касательной (9);

– точка (x_0, y_0) имеет положительное уклонение относительно касательной (9),

то эллипс $S_2\{u_2,\vartheta_2\}$ и область $D\{u_1,\vartheta_1\}$ (а значит, $S_2\{\overline{u}_2,\overline{\vartheta}_2\}$ и $D\{\overline{u}_1,\overline{\vartheta}_1\}$) не пересекаются.

В аналитическом представлении эти условия выражаются в виде системы неравенств

$$\begin{cases} 2px^* x_{q_1} - y_{q_1} - px^{*2} \geq 0, \\ 2px^* x_{q_2} - y_{q_2} - px^{*2} \geq 0, \\ 2px^* x_0 - y_0 - px^{*2} > 0, \end{cases}$$

где (x_0, y_0) имеют вид (7).

Таким образом, условия непересечения эллипса $S_2\{\overline{u}_2, \overline{\vartheta}_2\}$ и области $D\{\overline{u}_1, \overline{\vartheta}_1\}$, ограниченной параболой $S_1\{\overline{u}_1, \overline{\vartheta}_1\}$, в аналитическом виде можно представить следующим образом:

$$\max_{x^*} \min \{2px^* x_{q_1} - y_{q_1} - px^{*2},\ 2px^* x_{q_2} - y_{q_2} - px^{*2},\ 2px^* x_0 - y_0 - px^{*2}\} \geq 0,$$

где (x_0, y_0) определяются из (7).

Условия взаимного непересечения эллипсов

Пусть в некоторой системе координат $\overline{x}o\overline{y}$ заданы эллипсы $S_i\{\overline{u}_i, \overline{\vartheta}_i\}$, $i = 1,2$, границы которых в собственных системах координат xoy и $X'OY'$ описываются уравнениями $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ и $B^2X'^2 + A^2Y'^2 - A^2B^2 = 0$ соответственно. В системе координат xoy, выбранной в качестве основной, имеем эллипсы $S_i\{u_i, \vartheta_i\}$, $i = 1,2$, где $u_1 = (0,0)$, $\vartheta_1 = 0$, $u_2 = (x_0, y_0)$ $\vartheta_2 = \overline{\vartheta}_2 - \overline{\vartheta}_1$. Уравнения эллипсов $S_1\{0,0,0\}$ и $S_2\{x_0, y_0, \vartheta_2\}$ имеют вид $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ и (8) соответственно.

Пусть (x^*, y^*) – произвольная точка эллипса $S_1\{0,0,0\}$.

Уравнение касательной к эллипсу $S_1\{0,0,0\}$ в точке (x^*, y^*), с учётом того, что $x = a\cos\varphi$, $y = b\sin\varphi$, представляется в виде

$$F(x, y, \varphi^*) \equiv b\cos\varphi^* \cdot x + a\sin\varphi^* \cdot y - ab = 0. \tag{11}$$

Обозначим через (x_{q_i}, y_{q_i}), $i = 1,2$, точки эллипса $S_2\{x_0, y_0, \vartheta_2\}$, касательные в которых параллельны касательной (11) в точке (x^*, y^*). Для определения координат (x_q, y_q), как и в предыдущем случае, имеем систему двух уравнений

$$\begin{cases} B^2[(x_q - x_0)\cos\vartheta_2 + (y_q - y_0)\sin\vartheta_2]^2 + \\ A^2[-(x_q - x_0)\sin\vartheta_2 + (y_q - y_0)\cos\vartheta_2]^2 - A^2B^2 = 0, \\ (Ra\sin\varphi^* - Lb\cos\varphi^*)(x_q - x_0) + (La\sin\varphi^* - Sb\cos\varphi^*)(y_q - y_0) = 0, \end{cases}$$

где второе уравнение системы реализует равенство угловых коэффициентов касательной к эллипсу $S_1\{0,0,0\}$ в точке (x^*, y^*) и касательной к эллипсу $S_2\{x_0, y_0, \vartheta_2\}$ в точке (x_q, y_q). Здесь (x_0, y_0) определяются из (7), а R, S, L определяются из (10).

Решением этой системы является вектор со значениями искомых координат

$$x_{q_{1,2}} = x_0 \pm \frac{AB}{\sqrt{B^2(\cos\vartheta_2 + \overline{D}\sin\vartheta_2)^2 + A^2(\overline{D}\cos\vartheta_2 - \sin\vartheta_2)^2}},$$

$$y_{q_{1,2}} = y_0 \pm \frac{\overline{D}AB}{\sqrt{B^2(\cos\vartheta_2 + \overline{D}\sin\vartheta_2)^2 + A^2(\overline{D}\cos\vartheta_2 - \sin\vartheta_2)^2}},$$

где $\overline{D} = \dfrac{Lb\cos\varphi^* - Ra\cos\varphi^*}{La\sin\varphi^* - Sb\cos\varphi^*}$.

Легко убедиться, что если выполняются условия:

– точки (x_{q_1}, y_{q_1}) и (x_{q_2}, y_{q_2}) имеют неотрицательные уклонения относительно касательной (11);

– точки $(0,0)$ и (x_0, y_0) находятся по разные стороны от касательной (11), то эллипсы $S_1\{0,0,0\}$ и $S_2\{x_0, y_0, \vartheta_2\}$ (а значит, $S_1\{\overline{u}_1, \overline{\vartheta}_1\}$ и $S_2\{\overline{u}_2, \overline{\vartheta}_2\}$) не пересекаются. Эти условия в аналитическом виде представляют собой систему неравенств

$$\begin{cases} b\cos\varphi^*\cdot x_{q_1} + a\sin\varphi^*\cdot y_{q_1} - ab \geq 0, \\ b\cos\varphi^*\cdot x_{q_2} + a\sin\varphi^*\cdot y_{q_2} - ab \geq 0, \\ b\cos\varphi^*\cdot x_0 + a\sin\varphi^*\cdot y_0 - ab > 0, \end{cases}$$

где (x_0, y_0) определяются из (7).

Таким образом, условия непересечения эллипсов $S_i\{\overline{x}_i, \overline{y}_i, \overline{\vartheta}_i\}$, $i = 1,2$, можно представить в виде

$$\max_{\varphi^*} \min\{b\cos\varphi^*\cdot x_{q_1} + a\sin\varphi^*\cdot y_{q_1} - ab, \quad b\cos\varphi^*\cdot x_{q_2} + a\sin\varphi^*\cdot y_{q_2} - ab,$$

$$b\cos\varphi^*\cdot x_0 + a\sin\varphi^*\cdot y_0 - ab\} \geq 0.$$

Выводы

Построены условия взаимного непересечения и включения для геометрических объектов с границами, заданными уравнениями кривых второго порядка, в частности эллипса и параболы. Такие кривые описывают достаточно большой класс практических задач.

Полученные условия включения и взаимного непересечения в виде систем неравенств могут быть использованы при построении адекватных математических моделей оптимизационных задач размещения соответствующих геометрических объектов для аналитического описания областей допустимых решений.

Литература

1. Stoyan Yu., Pankratov A., Romanova T., Fasano G., Pintér J, Stoian Yu. E., Chugay A. Optimized packings in space engineering applications: Part I. In: Fasano G., Pintér J. (eds.). Modeling and Optimization in Space Engineering. *Springer Optimization and Its Appl*. 2019. Vol. 144. P. 395–437. https://doi.org/10.1007/978-3-030-10501-3_15.
2. Стоян Ю. Г., Панкратов А. В., Романова Т. Е., Чернов Н. И. Квази-phi-функции для математического моделирования отношений геометрических объектов. *Доп. НАН України*. 2014. № 9. С. 49–54. https://doi.org/10.15407/dopovidi2014.09.049.
3. Chernov N., Stoyan Yu., Romanova T., Pankratov A. Phi-functions for 2D objects formed by line segments and circular arcs. *Advances in Operations Research*. 2012. Vol. 2012. P. 1–26. https://doi.org/10.1155/2012/346358.
4. Stoyan Y., Pankratov A., Romanova T. Quasi-phi-functions and optimal packing of ellipses. *J. Global Optimization*. 2016. Vol. 65. Iss. 2. P. 283–307. https://doi.org/10.1007/s10898-015-0331-2.
5. Birgin E., Bustamante L., Callisaya H., Martnez J. Packing circles within ellipses. *Intern. Transactions in Operational Research*. 2013. Vol. 20. No. 3. P. 365–389. https://doi.org/10.1111/itor.12006.
6. Панкратов А. В., Романова Т. Е., Суббота И. А. Разработка эффективных алгоритмов оптимальной упаковки эллипсов. *Восточно-Европейский журнал передовых технологий*. 2014. Т. 5. № 4 (71). С. 28–35. https://doi.org/10.15587/1729-4061.2014.28015.
7. Панкратов А. В., Романова Т. Е., Хлуд О. М. О задаче упаковки эллипсов. *Журн. обчислювальної та прикл. математики*. 2016. № 3 (123). С. 51–63.
8. Pankratov A., Romanova T., Litvinchev I. Packing ellipses in an optimized rectangular container. *Wireless Netw*. 2018. P. 1–11. https://doi.org/10.1007/s11276-018-1890-1.
9. Stoyan Y., Pankratov A., Romanova T. Quasi-phi-functions and optimal packing of ellipses. *J. Global Optimization*. 2016. Vol. 65. P. 283–307. https://doi.org/10.1007/s10898-015-0331-2.
10. Komyak V., Komyak V., Danilin A. A study of ellipse packing in the high-dimensionality problems. *Eastern-European J. Enterprise Technologies*. 2017. Vol. 1. No. 4 (85). P. 17–23. https://doi.org/10.15587/1729-4061.2017.91902.
11. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для работников и инженеров. М.: Наука, 1984. 832 с.

Поступила в редакцию 28.02.2020

Побудова геометричних співвідношень еліпсів та областей, обмежених параболою, в задачах розміщення геометричних об'єктів

М. І. Гіль, В. М. Пацук

Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України,
61046, Україна, м. Харків, вул. Пожарського, 2/10

На цей час значно зростає інтерес до практичних задач математичного моделювання розміщення геометричних об'єктів різної фізичної природи в заданих областях. Під час розв'язання таких задач виникає необхідність в побудові їхніх математичних моделей, які реалізуються через побудову аналітичних умов відношень розміщуваних об'єктів і областей розміщення. Задача побудови умов взаємного неперетину довільно орієнтованих об'єктів, межі яких утворені кривими другого порядку, має широке застосування на практиці і водночас досліджена значно менше, ніж аналогічна задача для більш простих об'єктів. Плідним і відпрацьованим методом опису таких умов є побудова Ф-функцій і квазі-Ф-функцій. У даній статті як геометричні об'єкти розглядаються еліпс і область, обмежена параболою. Межі об'єктів, що розглядаються, допускають як неявне, так і параметричне зображення. Запропонований підхід до моделювання геометричних відношень еліпсів і областей, обмежених параболами, ґрунтується на перетворенні координат, приведенні рівняння еліпса до рівняння кола з використанням канонічного перетворення. Зокрема, побудовані умови включення еліпса в область, обмежену параболою, а також умови їх взаємного неперетину. Побудова умов взаємовідношень об'єктів, що розглядаються, здійснена на основі канонічних рівнянь еліпса і параболи з урахуванням їх параметрів розміщення, включаючи обертання. Ці умови зображені у вигляді системи нерівностей, а також у вигляді єдиного аналітичного виразу. Зображені умови можуть бути використані під час побудови адекватних математичних моделей оптимізаційних задач розміщення відповідних геометричних об'єктів для аналітичного опису областей допустимих розв'язків. Ці моделі можуть використовуватися далі в формулюванні математичних моделей практичних задач упаковки та розкрою, розширюючи коло об'єктів та/або підвищуючи точність і знижуючи час отримання розв'язання.

***Ключові слова**: еліпс, парабола, неперетин, включення, Ф-функція.*