УДК 519.85

МЕТОДОЛОГІЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ПОШУКУ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗМІЩЕННЯ ТРИВИМІРНИХ ТІЛ

Ю. Г. Стоян,
чл.-кор. НАН України
stoayn@ipmach.kharkov.ua
ORCID: 0000-0002-8053-0276

А. М. Чугай, д-р техн. наук
chugay.andrey80@gmail.com
ORCID: 0000-0002-4079-5632

Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України,
61046, Україна, м. Харків, вул. Пожарського, 2/10

Робота присвячена розв'язанню оптимізаційних задач упаковки тривимірних тіл шляхом побудови точних математичних моделей та розробки підходів, що базуються на застосуванні оптимізаційних методів нелінійного програмування та сучасних розв'язувачів. Розроблено конструктивні засоби математичного та комп'ютерного моделювання відношень орієнтованих та неорієнтованих тривимірних тіл, поверхня яких утворена циліндричними, конічними, сферичними поверхнями та площинами, у вигляді нових класів Ф-функцій та квазі-Ф-функцій. На базі розроблених засобів математичного моделювання побудовано і досліджено базову математичну модель задачі оптимальної упаковки тривимірних тіл, поверхні яких утворені циліндричними, конічними, сферичними поверхнями і площинами, та різні її реалізації, що охоплюють широкий клас наукових і прикладних задач упаковки тривимірних тіл. Розроблено загальну методологію розв'язання задач упаковки тривимірних тіл, що допускають одночасно неперервні повороти та трансляції. Запропоновано стратегії, методи і алгоритми розв'язання оптимізаційних задач упаковки тривимірних тіл з урахуванням технологічних обмежень (мінімально допустимі відстані, зони заборони, можливість неперервних трансляцій та обертань). Виходячи з запропонованих засобів математичного моделювання, математичних моделей, методів і алгоритмів створено програмне забезпечення з використанням технології паралельних обчислень для автоматичного розв'язання оптимізаційних задач упаковки тривимірних тіл. Отримані результати можуть бути застосовані під час розв'язання задач оптимізації компоновочних розв'язків, для комп'ютерного моделювання в матеріалознавстві, у порошковій металургії та нанотехнологіях, під час оптимізації процесу 3D-друку для SLS технології адитивного виробництва, у інформаційно-логістичних системах, що забезпечують оптимізацію перевезення та зберігання вантажів.

***Ключові слова**: упаковка, тривимірні тіла, геометричне проектування, Ф-функції, математичне моделювання, неперервні обертання, нелінійна оптимізація.*

Вступ

На сьогодні у багатьох галузях науки та техніки серед задач, що інтенсивно розв'язуються в останні десятиліття, можна виділити задачі комп'ютерного моделювання оптимального розміщення тривимірних тіл різної природи. Ці задачі стають дуже затребуваними через те, що заміна натурних експериментів комп'ютерним моделюванням дозволяє суттєво заощаджувати матеріальні ресурси та час. Тому це вимагає розробки моделей, методів і алгоритмів для розв'язання відповідних задач.

Можливі сфери практичного застосування задач оптимальної упаковки тривимірних тіл умовно можна класифікувати таким чином: задачі оптимізації компоновочних розв'язків; комп'ютерне моделювання у матеріалознавстві, порошковій металургії та нанотехнологіях; оптимізація процесу 3D-друку для SLS технології адитивного виробництва; інформаційно-логістичні системи, що забезпечують оптимізацію перевезення та зберігання вантажів.

Відомо, що задача пакування 3D-об'єктів є NP-повною. Через це її важко розв'язати задовільно. Так, для знаходження її приблизного розв'язку в багатьох дослідницьких роботах використовується значна різноманітність методів, включаючи різні евристики (евристики, що ґрунтуються на різних правилах наближення [1–3], генетичні алгоритми [4], алгоритм імітації відпалу [5], алгоритм бджолиної колонії [6]), розширений пошук за шаблоном [7], традиційні методи оптимізації [8, 9] і різні змішані підходи, які застосовують евристику й методи нелінійного математичного програмування [10].

У більшості робіт не дозволяється змінювати орієнтацію 3D-об'єктів або допускаються лише дискретні зміни в орієнтації для заданих кутів. Наприклад, в [11] для пакування опуклих багатогранників використовується тільки алгоритм паралельного перенесення. У [12] автори пропонують алгоритм HAPE3D, який може бути застосований до поліедра з довільною формою, що може обертатися навколо кожної координатної осі лише під вісьмома різними кутами.

У роботі [13] автори зауважують, що для задач тривимірного пакування орієнтацію об'єктів від 0° до 360° відносно кожної осі здійснювати розрахунок неможливо.

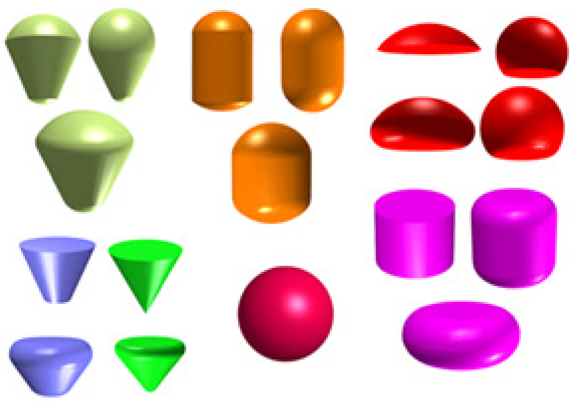
Через складність побудови адекватних математичних моделей на цей час існує лише декілька робіт, в яких розв’язано задачі 3D-пакування за умови, що допускаються безперервні обертання геометричних об'єктів. Розв’язки таких задач розглядаються в роботах [8, 9, 14, 15, 16]. У [8, 9, 14] вводяться безперервні і диференційовані моделі нелінійного програмування й алгоритми для упаковки еліпсоїдів у тривимірному просторі. В роботі [16] розв’язується задача упаковки різних опуклих тривимірних об'єктів.

Загальна постановка задачі

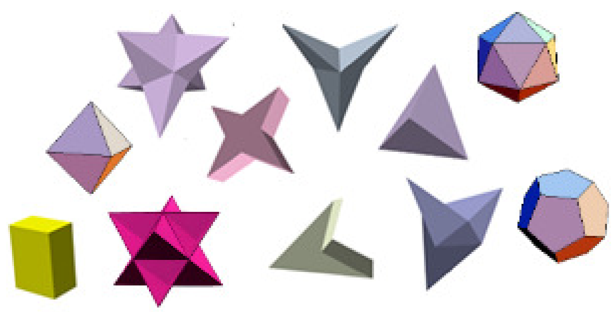
Незважаючи на різні постановки усі задачі оптимальної упаковки тривимірних тіл можуть бути описані за допомогою загальної постановки, яка може бути сформульована в такий спосіб.

Задача. Розмістити задану множину тривимірних тіл O_i, $i \in I_n$, (рис. 1) у заданий контейнер Ω з урахуванням обмежень на положення тіл таким чином, щоб метричні характеристики контейнера досягали оптимального значення.

В роботі як математичні моделі реальних тривимірних тіл використовуються зв'язні обмежені $3D$ φ-об’єкти (непусті канонічно замкнуті точкові множини $O \subset R^3$, гомотопічний тип внутрішності і замикання яких співпадають). Усю множину тривимірних тіл, які розглядаються у роботі, можна поділити на дві основні групи. До першої групи належать опуклі тривимірні тіла, поверхня яких утворена циліндричними, конічними та сферичними поверхнями, та їх еквідистантні поверхні (рис. 1, а). До другої групи належать довільні тривимірні тіла, що можуть бути апроксимовані за допомогою багатогранних тіл (рис. 1, б).



а



б

Рис.1. Множина тривимірних тіл:
а – опуклі тіла, поверхня яких утворена циліндричними, конічними, сферичними поверхнями та площинами;
б – багатогранні тіла

Усі тривимірні тіла (об’єкти) O з першої групи у рамках даного дослідження можна задати за допомогою сферичного конуса SK_i, який можна зобразити як опукле тривимірне тіло $O_i = SC_i = S_{1i} \cup C_i \cup S_{2i}$, де C_i – зрізаний конус висотою $2h_i$, з радіусами верхньої та нижньої основ r_{1i} і r_{2i} відповідно, S_{1i} – верхній сферосегмент висотою w_{1i} і радіусом основи r_{1i}, S_{2i} – нижній сферосегмент висотою w_{2i} і радіусом основи r_{2i}. Позначимо через $\omega_i = (h_i, r_{1i}, r_{2i}, w_{1i}, w_{2i})$ вектор метричних характеристик сферичного конуса. Змінюючи вектор метричних характеристик, можна отримати такі тривимірні тіла: звичайний конус ($\omega_i = (h_i, r_i, 0,0,0)$), зрізаний конус ($\omega_i = (h_i, r_{i1}, r_{i2}, 0,0)$), круговий циліндр ($\omega_i = (h_i, r_i, r_i, 0,0)$), сфероциліндр ($\omega_i = (h_i, r_i, r_i, w_{i1}, w_{i2})$); сферосегмент ($\omega_i = (0, r_i, 0, w_i, 0)$ або $\omega_i = (0,0, r_i, 0, w_i)$); сферодиск ($\omega_i = (0, r_i, r_i, w_{i1}, w_{i2})$), кулю ($\omega_i = (0, r_i, r_i, r_i, r_i)$).

Тривимірні тіла, що розглядаються в роботі, припускають конгруентні та гомотетичні перетворення. Таким чином, тривимірному тілу $\hat{I}$ можна співставити вектор змінних $u_o = (v_o, \theta_o, \lambda_o) \in R^7$, де $v_o = (x_o, y_o, z_o)$ – вектор трансляції, $\theta_o = (\alpha_o, \beta_o, \gamma_o)$ – вектор кутів обертання та λ_o – коефіцієнт гомотетії. Тіло $\hat{I}$, яке задане у власній системі координат, трансльоване на вектор $v_o = (x_o, y_o, z_o)$, обернене на кути $\theta_o = (\alpha_o, \beta_o, \gamma_o)$ та помножене на коефіцієнт гомотетії λ_o, позначимо як $O(u)$ і визначимо таким чином: $O(u) = \{p : p = v_o + \lambda_o \cdot M(\theta_o) \cdot \tilde{p}, \forall \tilde{p} \in O(0,0,0,1)\}$, де $O(0,0,0,1)$ позначає вихідний об’єкт O; $\tilde{p}$ – довільна точка об'єкта O у власній системі його координат.

На розміщення тривимірних тіл можуть задаватись такі види обмежень: орієнтація тіл (орієнтовані (заданої незмінної орієнтації) та неорієнтовані (ортогональна зміна орієнтації, довільна зміна орієнтації)); мінімально допустимі відстані; зони заборони на розміщення тіл.

Контейнер Ω, в який необхідно упакувати тривимірні тіла, може набувати таких просторових форм (рис. 2): прямокутний паралелепіпед; куля; пряма призма з зонами заборони у вигляді циліндрів; циліндр із зонами заборони у вигляді прямих прямокутних призм .

Функція цілі може бути сформульована таким чином: мінімізувати висоту контейнера; мінімізувати об’єм контейнера; максимізувати кількість упакованих тіл у заданий контейнер.

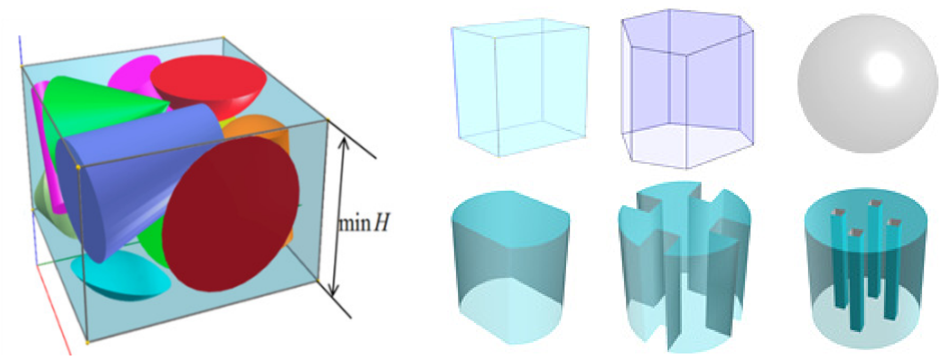


Рис. 2. Упаковка тривимірних тіл:
а – постановка задачі; б – приклади просторових форм контейнера Ω

Математична модель задачі

На основі методу Ф-функцій [9, 17, 18] математична модель загальної задачі оптимальної упаковки тривимірних тіл може бути зображена у такому вигляді:

$$F(X^*) = \underset{X \in W}{extr}\, F(X), \tag{1}$$

$$W = \{X \in R^{7n+3n_{qp}+n_\Omega} : \Psi_1(X) \ge 0, \Psi_2(X) \ge 0, \Psi_3(X) \ge 0, \Psi_4(X) \ge 0\}, \tag{2}$$

де $F(X)$ – неперервна двічі диференційовна функція; n – кількість тривимірних тіл; $n_{qp} = 0{,}5(1 - n_q)/n_q$, n_q – кількість тривимірних тіл, для яких в моделі використовуються квазі-Ф-функції; n_Ω – кількість змінних метричних характеристик контейнера Ω; $X = (u_\Omega, u, u_p)$ – вектор змінних цієї задачі; u_Ω – вектор метричних характеристик контейнера Ω; $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$ – вектор, що визначає параметри розміщення тривимірних тіл; $u_i = (v_i, \theta_i, g_i)$ – вектор, що визначає параметри розміщення тривимірного тіла $O_i(u_i)$; $i \in I_n$, $v_i = (x_i, y_i, z_i)$ – вектор трансляції тривимірного тіла; $\theta_i = (\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$ – вектор кутів повороту тіла $O_i(u_i)$, $i \in I_n$, навколо координатних осей Ox, Oy, Oz відповідно; g_i – коефіцієнт гомотетії тривимірного тіла $O_i(u_i)$; $u_p = (u_{p_{12}}, u_{p_{13}}, ..., u_{p_{ij}}, ..., u_{p_{qq}})$ – вектор додаткових змінних, що визначають параметри відокремлювальних площин (якщо використовуються квазі-Ф-функцій) для кожної пари тіл $O_i(u_i)$ та $O_j(u_j)$, $(i, j) \in I_n$;

$$\Psi_1(X)=\min\{\Phi^{O_i\Omega^*}(X), i\in I_n\},\ \Psi_2(X)=\min\{\Phi^{O_iO_j}(X),(i,j)\in I_n\},$$

$$\Psi_3(X)=\min\{\Phi^{O_iT_k}(X), i\in I_n, k\in I_z\},$$

$\Phi^{O_i\Omega^*}(X)$ – Ф-функція для об'єктів O_i та $\Omega^*=cl(R^3\setminus\Omega)$ (описує умови розміщення об'єкта в контейнері Ω); $\Phi^{O_iO_j}(X)$ – Ф-функція (або квазі-Ф-функція) для об'єктів $O_i(u_i)$ та $O_j(u_j)$ (описує умови неперетину або знаходження на допустимій відстані об'єктів $O_i(u_i)$ та $O_j(u_j)$); $\Phi^{O_iT_j}(X)$ – Ф-функція для об'єкта $O_i(u_i)$ та зони заборони T_k; $\Psi_4(X)\geq 0$ – система додаткових обмежень (наприклад, обмеження на метричні характеристики області розміщення або тривимірних тіл, що упаковуються).

Для побудованої математичної моделі загальної задачі упаковки тривимірних тіл необхідно вказати деякі важливі особливості, які вплинули на розробку загальної методології розв'язання задач. До таких особливостей слід віднести таке.

1. Модель (1)–(2) є точною математичною моделлю загальної задачі оптимальної упаковки тривимірних тіл, зображена у вигляді задачі математичного програмування і задає усі її глобальні розв'язки.

2. Область W припустимих розв'язків задачі в загальному випадку є незв'язною множиною, і кожна її компонента зв'язності є багатозв'язною множиною та має «яружний» характер.

3. Нерівність $\Psi_1(X)\geq 0$ є системою неперервно-диференційовних функцій.

4. Функція $\Psi_2(X)$ в залежності від реалізації задачі (1)–(2) може бути задана або Ф-функціями або квазі-Ф-функціями. У випадку використання Ф-функцій (які є максимінними функціями) нерівність $\Psi_2(X)\geq 0$ можна зобразити набором систем нерівностей з неперервно-диференційовних функцій.

5. Область припустимих розв'язків описується системою нерівностей з функцій, які включають оператори max та min, через що вона може бути зображена у вигляді об'єднання підобластей $W=\bigcup_{q=1}^{\varsigma}W_q$, де кожна з підобластей W_q визначається системою нерівностей з неперервно-диференційовними функціями. Таким чином, задачу (1)–(2) можна зобразити так: $F(X^*)=extr\{F(X^{*q}), q=1,2,...,\varsigma\}$, де $F(X^{*q})=\underset{X\in W_q}{extr}\,F(X)$.

6. У випадку, коли область припустимих розв'язків задачі (1)–(2) задається лише квазі-Ф-функціями, вона описується системою нерівностей з неперервно-диференційовними функціями.

7. Задача (1)–(2) належить до класу *NP*-складних.

Завдяки тому що математична модель (1)–(2) загальної задачі упаковки тривимірних тіл побудована у вигляді задачі математичного програмування, в роботі розроблена єдина методологія розв'язання задач упаковки, на всіх етапах якої застосовуються сучасні методи нелінійної оптимізації.

Методологія розв'язання задач пошуку оптимального розміщення тривимірних тіл

Основна ідея розробленої методології схематично зображена на рис. 3. Як видно зі схеми, запропонована методологія ґрунтується на аналізі вхідної інформації про задачу, яку необхідно розв'язати. Вона використовує декілька підходів, принципова відмінність яких полягає в можливості зміни орієнтації тривимірних тіл під час пошуку розв'язку задачі, адже довільні повороти об'єктів значно ускладнюють цей процес та вимагають використання інших методів. Через це методологія використовує два основних підходи до розв'язання задач: упаковки опуклих орієнтованих тривимірних тіл та упаковки неорієнтованих тривимірних тіл.

Можливість довільної зміни орієнтації тіл вимагає використання інших методів для пошуку початкових розміщень, а тому і застосування іншого підходу. У випадку неорієнтованих тіл в підході до розв'язання задачі використано дві різні стратегії пошуку наближення до глобального розв'язку, які обираються в залежності від форми тіл. У випадку, якщо тіла мають опуклу форму, застосовано стратегію, яка ґрунтується на гомотетичних перетвореннях та пошуку перспективних початкових точок. Оскільки при упаковці тривимірних тіл неопуклої форми складність задачі значно підвищується, то для її розв'язання використовується багатоетапна стратегія мультистарту, яка на початковому етапі застосовує стратегію упаковки неорієнтованих опуклих тіл.

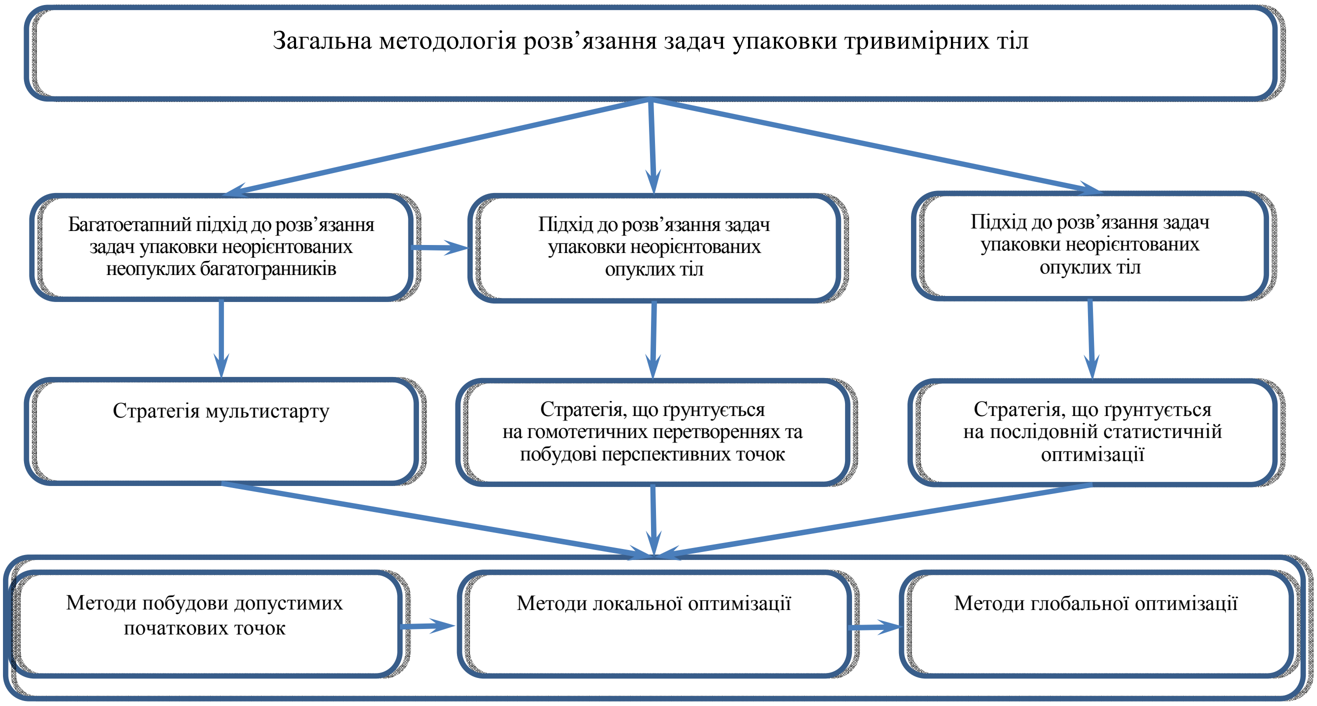


Рис. 3. Методологія розв'язання задач упаковки тривимірних тіл

Кожна із запропонованих стратегій побудована на використанні послідовності таких методів:

1) побудови допустимих початкових точок з області припустимих розв'язків;

2) локальної оптимізації;

3) глобальної оптимізації.

Для кожної з запропонованих стратегій було розроблено свій набір методів, що враховує особливості задач, які необхідно розв'язати.

Розглянемо кожну з запропонованих стратегій більш детально.

Стратегія, що ґрунтується на послідовній статистичній оптимізації. Основна ідея стратегії орієнтована на оптимізацію функції цілі, заданої на множині переставлень. Для побудови допустимих початкових точок з області припустимих розв'язків застосовуються методи, в яких використовується послідовність розміщення тривимірних тіл (метод оптимізації за групами змінних) або послідовність координат їх центрів (метод регулярних розміщень, орієнтований на розміщення конгруентних об'єктів). Для пошуку локальних екстремумів використовувався модифікований метод можливих напрямів разом зі стратегією активного підбору для підобластей.

Одним із способів розв'язання багатоекстремальних задач є перебір локальних екстремумів. Однак навіть для порівняно невеликого числа об'єктів здійснити прямий перебір локальних екстремумів неможливо. Завдяки тому що для перелічених задач існує можливість встановити відповідність між перестановками тривимірних тіл і локальними екстремумами, для пошуку наближення до глобального екстремуму використовується стратегія, в якій застосовано модифікований метод околів, що звужуються. Цей метод являє собою спрямований випадковий перебір і орієнтований на оптимізацію функцій, які задані на множині перестановок.

Метод околів, що звужуються, ґрунтується на властивостях імовірнісного розподілу локальних екстремумів функції цілі. Він дозволяє певним чином організувати перебір послідовностей об'єктів, які необхідно розмістити, та отримати за порівняно короткий час розв'язок задачі, близький до глобального екстремуму. Для його реалізації необхідно ввести певну метрику на просторі перестановок. Пошук кращих значень функції цілі здійснюється в околах, заданих на множині перестановок. На кожному кроці методу, виходячи з накопиченої в процесі роботи статистичної інформації, обираються центри та радіуси нових околів. Якщо під час переходу до чергового етапу пошуку значення функції цілі не поліпшується, то радіуси околів зменшуються.

Реалізація даної стратегії розглянута в роботі [19].

Стратегія, що ґрунтується на гомотетичних перетвореннях та побудові перспективних точок. Методи даної стратегії використовують розширення розмірності задачі за рахунок введення змінних метричних характеристик тіл та їх гомотетичних перетворень. Стратегія ґрунтується на такій послідовності методів: 1) для побудови початкових точок – метод гомотетичних перетворень; 2) для пошуку локальних екстремумів – метод внутрішньої точки разом зі стратегією декомпозиції; 3) для пошуку наближення до глобального екстремуму – метод побудови перспективних розміщень.

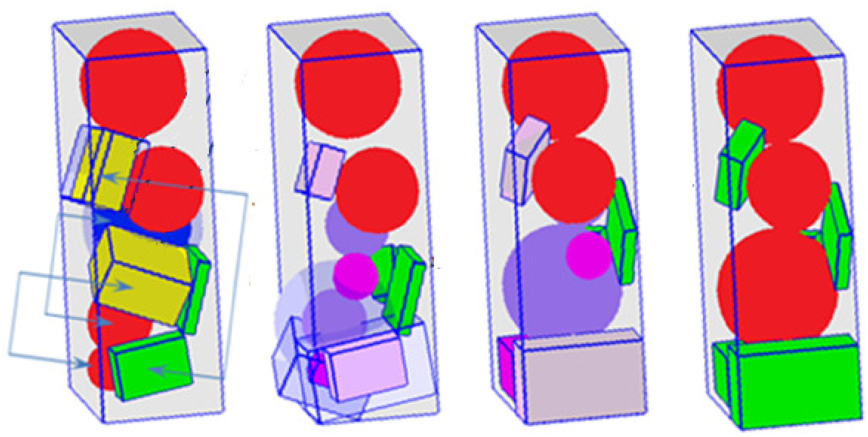
Оскільки математична модель (1)–(2) побудована у вигляді класичної задачі нелінійного програмування, то для її розв'язання можуть бути застосовані різні модифікації методів нелінійної оптимізації. Однак для застосування числових методів нелінійної оптимізації необхідно мати допустиму початкову точку. Серед методів, які застосовуються для побудови перспективних початкових точок, у задачах розміщення об'єктів в основному використовуються різні модифікації «жадібних» алгоритмів. Однак оскільки задачі упаковки тривимірних тіл є *NP*-складними, то застосування «жадібних» алгоритмів суттєво обмежує можливості перебору величезної кількості локальних екстремумів (кількість яких перевищує $n!$). Крім того, обчислювальні витрати для побудови початкових точок значно зростають в разі, якщо об'єкти допускають довільні повороти.

Використання методу Ф-функцій для побудови математичної моделі (1)–(2) дозволяє використовувати на всіх етапах розв’язання задачі сучасні методи нелінійної оптимізації. У зв'язку з цим для побудови допустимих початкових точок пропонується спеціальний підхід, основна ідея якого полягає у розширенні розмірності задачі за рахунок введення змінних метричних характеристик об'єктів та їх гомотетичних перетворень. Припустимо, що тіла дозволяють гомотетичні перетворення. З цією метою приймемо коефіцієнти гомотетії змінними. Тоді для того, щоб визначити початкову точку, виконується випадкова генерація координат розміщуваних тіл у контейнері. Після цього розв’язується задача нелінійного програмування, метою якої є максимізація суми коефіцієнтів гомотетії усіх тіл. Якщо в результаті розв’язання даної задачі буде знайдена точка локального максимуму, в якій усі коефіцієнти гомотетії дорівнюють одиниці, то така точка приймається як початкова для пошуку локального екстремуму основної задачі. Слід відзначити, що на відміну від «жадібних» алгоритмів побудови початкових точок, які можуть давати хоч і хороші, але однотипні точки, розроблений метод дозволяє отримувати різноманітні початкові точки за рахунок випадкового способу генерації координат центрів об'єктів.

Оскільки область припустимих розв’язків задається дуже великою кількістю нерівностей, то безпосереднє застосування методів нелінійної оптимізації для пошуку локального екстремуму призведе до значних обчислювальних витрат. Тому для пошуку локальних екстремумів сформульованих оптимізаційних задач розроблено спеціальний метод декомпозиції, який дозволяє зменшити обчислювальні витрати за рахунок суттєвого зменшення кількості нерівностей у процесі пошуку локальних екстремумів. Ґрунтуючись на тому, що область допустимих розв’язків зображається у вигляді об'єднання підобластей, можна істотно зменшити час пошуку локального мінімуму, завдяки його зведенню до розв’язання послідовності підзадач, в яких область допустимих розв’язків визначається значно меншою кількістю нерівностей. Ключова ідея методу дозволяє на кожному етапі обрати підобласть області припустимих розв’язків та генерувати підмножини обраної підобласті на кожному кроці в такий спосіб. На основі аналізу початкової точки в систему обмежень задачі додається система додаткових обмежень на параметри розміщення кожного об’єкта, що дозволяє їм переміщуватися в межах індивідуального контейнера. Після цього видаляються нерівності для всіх пар об’єктів, індивідуальні контейнери яких не перетинаються. Таким чином, зменшуємо число обмежень і, у випадку квазі-Ф-функцій, кількість додаткових змінних. Далі проводиться пошук точки локального мінімуму для побудованої підзадачі. Отриманий локальний екстремум підзадачі використовується як стартова точка для наступної ітерації. Детальна реалізація запропонованого підходу наведена в роботах [15, 16].

Глобальна оптимізація для даної стратегії ґрунтується на ідеї перебору локальних мінімумів за рахунок побудови нових перспективних початкових точок з використанням гомотетичних перетворень об’єктів у отриманій точці локального мінімуму. Для цього в точці локального мінімуму розв’язується допоміжна задача нелінійного програмування. В результаті розв’язання такої задачі отримуємо точку, в якій можна визначити 2 групи тіл: 1) тіла, поблизу яких існує вільний простір, а отже, на місце цих тіл можна встановити тіла з більшим об’ємом; 2) тіла, навколо яких утворилось щільне заповнення контейнера, внаслідок чого неможливо змінити їх положення з метою зменшення об’єму контейнера. Для визначення таких відповідних груп тіл розв’язується спеціальна допоміжна задача нелінійної оптимізації, метою якої є зменшення об’єму контейнера за умови, що розміщені у контейнері тіла дозволяють гомотетичні перетворення. Особливістю допоміжної задачі є відсутність обмежень на максимальне значення коефіцієнтів гомотетії об’єктів. Через це відбувається зменшення об’єму контейнера за рахунок того, що деякі тіла будуть зменшені, а деякі збільшені. Зміна розмірів об'єктів дозволяє визначити описані 2 групи об'єктів. Оскільки при зменшенні об’єму контейнера деякі об’єкти отримали розміри менші, ніж задані, то на наступному етапі необхідно розв’язати допоміжну задачу, яка дозволить збільшити розміри об'єктів до їх заданих значень. Для розв’язання цієї допоміжної задачі ітераційно виконуються спроби побудувати серію перспективних початкових точок. Для побудови таких точок пробуємо в заданій послідовності виконати перестановку об'єктів з першої групи і об'єктів з другої групи. Така перестановка дозволяє потрапити в підобласть, яка знаходиться в зоні тяжіння іншого локального мінімуму. Переставляючи об’єкти, зменшуємо їх розміри для того, щоб вони не перетиналися з сусідніми об'єктами. Якщо вдається збільшити тіла до їх початкових розмірів, то точка, яка відповідає такому розміщенню об'єктів, приймається як початкова точка для пошуку нового локального мінімуму основної задачі.

Основні етапи побудови перспективної точки на прикладі задачі упаковки неорієнтованих паралелепіпедів та куль подано на рис. 4.



а б в г

Рис.4. Основні етапи побудови перспективної початкової точки:
а – результат розв’язання допоміжної задачі гомотетичних перетворень упакованих тіл з метою зменшення об’єму контейнера та визначення двох груп тіл, які можуть бути переставлені; б – побудована перспективна початкова точка для пошуку екстремуму наступної допоміжної задачі; в – результат розв’язання допоміжної задачі максимізації суми коефіцієнтів гомотетії упакованих тіл; д – отримана точка може бути прийнята як початкова для пошуку нового локального мінімуму основної задачі

Якщо із серії побудованих перспективних початкових точок не вдається знайти глобальний екстремум допоміжної задачі максимізації суми коефіцієнтів гомотетії упакованих тіл, то останній знайдений локальний мінімум приймається як наближення до розв’язку задачі.

Ефективність запропонованої стратегії досягається за рахунок реалізації послідовних змін розмірності простору розв’язків під час здійснення переходів між допоміжними задачами. Поступове поліпшення функції цілі відбувається за рахунок того, що точка локального екстремуму однієї допоміжної задачі не є точкою локального екстремуму для іншої допоміжної задачі.

Деталі реалізації даної стратегії викладено в роботах [15–17].

Багатоетапна стратегія мультистарту. Стратегія використовувалась для розв’язання задачі упаковки неорієнтованих неопуклих тривимірних тіл. Стратегія орієнтована на пошук оптимальних розміщень неорієнтованих неопуклих тіл, що значно ускладнює процес розв’язання. Тому для скорочення великих обчислювальних та часових витрат виконується декомпозиція процесу розв’язування задачі на декілька крупних етапів (підготовчий та багаторазового запуску) та їх підетапів.

Оскільки стратегія орієнтована на розміщення неорієнтованих неопуклих тіл, то для побудови допустимих початкових точок запропоновано метод кластеризації. Локальна оптимізація виконувалась за допомогою методу внутрішньої точки разом зі стратегією декомпозиції. Для перебору локальних екстремумів використовувалась стратегія мультистарту.

На підготовчому етапі розв’язується серія допоміжних задач нелінійного програмування, які дозволяють отримати дані для побудови початкових точок основної задачі упаковки.

На етапі багаторазового запуску будуються різні початкові допустимі точки та відповідні їм локальні мінімуми. Слід відзначити, що в залежності від форми кластерів використовується або стратегія пошуку оптимальної упаковки, або паралелепіпедів, які допускають ортогональні повороти, або куль, або неорієнтованих паралелепіпедів та куль. Для розв’язання цих задач використовується стратегія, що ґрунтується на гомотетичних перетвореннях та побудові перспективних точок.

Завдяки методу кластеризації неопуклих неорієнтованих тривимірних тіл побудова початкових точок зводиться до розв’язання задачі упаковки половини опуклих тіл значно простішої просторової форми (паралелепіпедів та куль). Завдяки цьому значно скорочується час побудови початкових точок.

Слід зазначити, що зменшенню обчислювальних витрат також сприяє те, що процес пошуку локального екстремуму задачі розбивається на: 1) етап розв’язування лінійної задачі за рахунок фіксацій кутів обертання та 2) етап розв’язування нелінійної задачі. Крім того, оскільки для розміщення сформованої множини кластерів застосовується стратегія пошуку наближення до глобального екстремуму, то побудована початкова точка є деяким наближенням до локального екстремуму основної задачі.

Як наближення до глобального мінімуму задачі обирається найкращий локальний мінімум, отриманий в результаті виконання етапу багаторазового запуску.

Деталі реалізації даної стратегії викладено в роботі [19].

Методи побудови допустимих початкових точок. Для застосування методів локальної оптимізації необхідно побудувати початкові точки, які належать області припустимих розв’язків. Однією з вимог до методів побудови початкових точок для задач упаковки тривимірних тіл є забезпечення генерації різноманіття точок (це забезпечить знаходження різних локальних екстремумів) та зменшення обчислювальних витрат з метою їх швидкої побудови.

В роботі розроблені такі методи: для упаковки конгруентних тривимірних тіл – метод регулярних розміщень; для опуклих тіл, поверхня яких утворена конічними, циліндричними та сферичними поверхнями, – метод гомотетичних перетворень [16] (рис. 5); для неопуклих багатогранних тіл – метод кластеризації [19] (рис. 6).

Методи локальної оптимізації. Аналіз особливостей математичних моделей задач упаковки показав, що область припустимих розв’язків описується величезною кількістю нелінійних нерівностей. Цей факт потребує розробки методів, які дозолять ефективно розв’язати проблему великої розмірності задач. Основна ідея запропонованих методів локальної оптимізації ґрунтується на декомпозиції основної задачі на підзадачі зі значно меншою кількістю обмежень та меншої розмірності. Для цього процес пошуку поділяється на такі етапи: послідовна генерація підобластей області допустимих розв’язків, які містять початкову точку; визначення підсистеми ε-активних обмежень; пошук за допомогою сучасних НЛП солверів другого порядку локальних екстремумів на обраних підобластях; організація переходу до інших підобластей. Детальна реалізація розроблених методів наведена в роботі [16].

На рис. 7 зображено локальні мінімуми для різних задач.

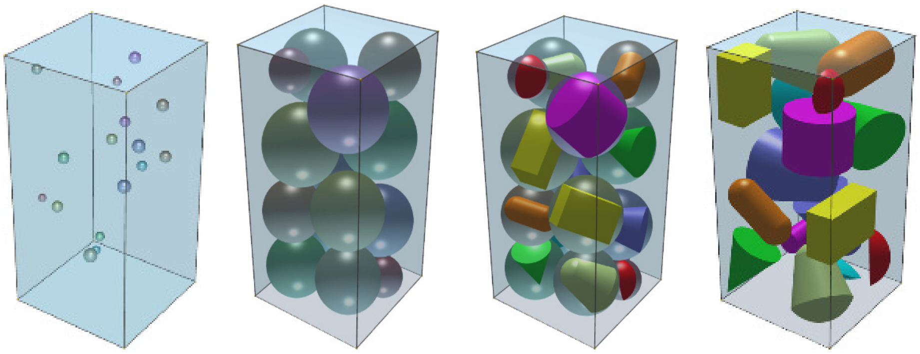


Рис. 5. Приклад побудови допустимої початкової точки за методом гомотетичних перетворень

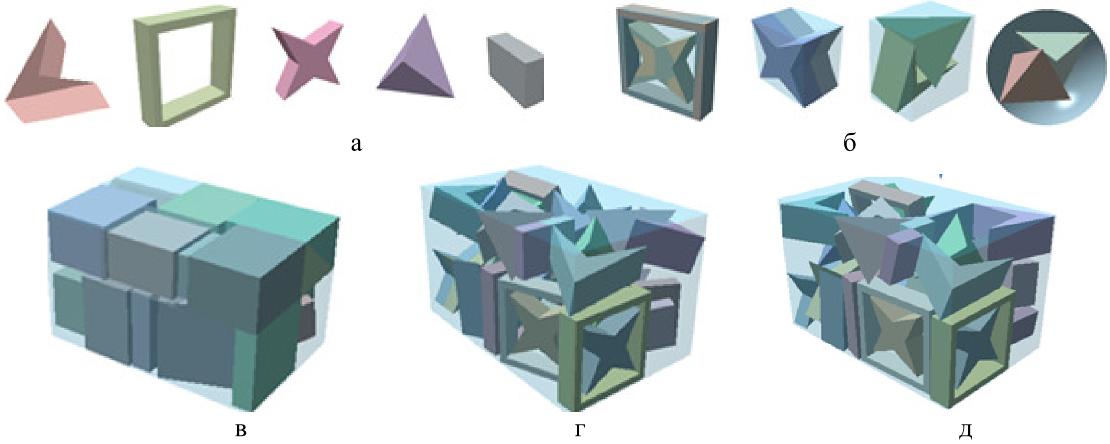


Рис. 6. Побудова початкової точки за методом кластеризації:
а – задані форми багатогранних тіл; б – обрані форми кластерів за критерієм максимального коефіцієнту заповнення; в – результат упаковки сформованої підмножини кластерів; г – допустима початкова точка, яка відповідає розміщенню кластерів; д – локальний мінімум

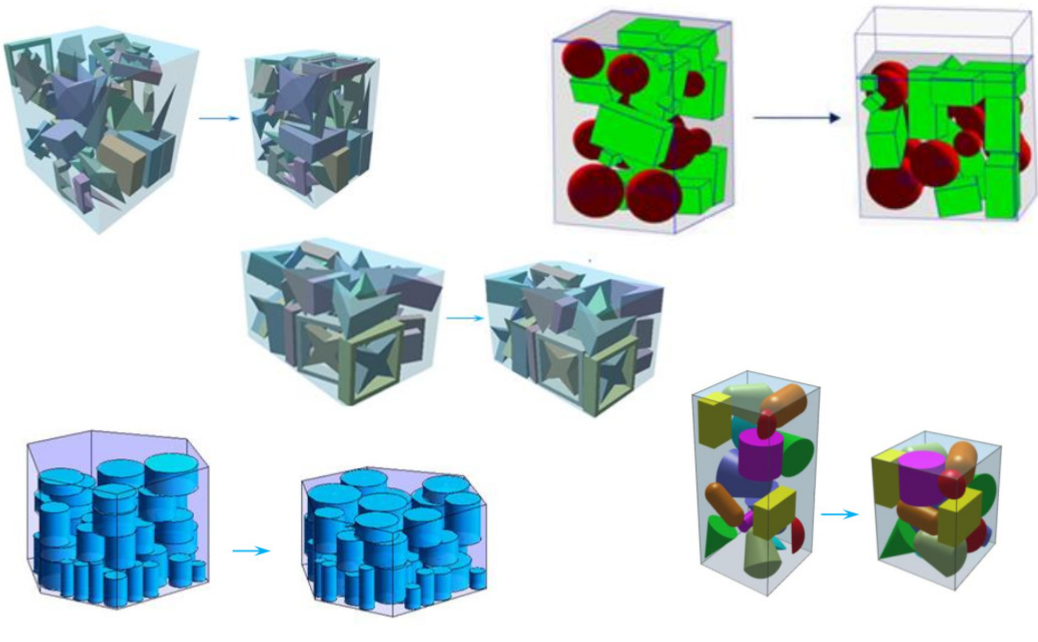


Рис. 7. Приклади упаковок, які відповідають знайденим точкам локальних екстремумів різних задач

Висновки

Запропонована єдина методологія розв'язання задач розміщення тривимірних об'єктів. Методологія є розвитком теорії геометричного проектування і може використовуватися фахівцями в цій галузі для вибору стратегії розв'язання задач розміщення.

Методологія орієнтована на сучасні розробки в області геометричного проектування і на використання потужних пакетів програм для розв'язання задач лінійного та нелінійного програмування.

Ефективність запропонованих засобів підтверджується рядом обчислювальних експериментів, у ході яких було проведено порівняння отриманих результатів з аналогічними результатами зарубіжних дослідників та отримано поліпшення результатів як за значеннями функції цілі, так і за часом розв'язання.

Отримані результати є теоретичною і практичною основою для проведення інженерних розрахунків під час автоматизації та моделювання процесів розміщення об'єктів різної фізичної природи.

Роботу виконано за рахунок коштів бюджетної програми «Підтримка розвитку пріоритетних напрямів наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

Література

1. Petrov M. S., Gaidukov V. V., Kadushnikov R. M. Numerical method for modelling the microstructure of granular materials. *Powder Metallurgy and Metal Ceramics.* 2004. No. 43 (7–8). P. 330–335. https://doi.org/10.1023/B:PMMC.0000048126.87171.f9.
2. Wang Y., Lin C. L., Miller J. D. 3D image segmentation for analysis of multisize particles in a packed particle bed. *Powder Techn*. 2016. No. 301. P. 160–168. https://doi.org/10.1016/j.powtec.2016.05.012.
3. Verkhoturov M., Petunin A., Verkhoturova G., Danilov K., Kurennov D. The 3D object packing problem into a parallelepiped container based on discrete-logical representation. *IFAC-PapersOnLine*. 2016. No. 49 (12). P. 1–5. https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2016.07.540.
4. Karabulut K. A., İnceoğlu M. Hybrid genetic algorithm for packing in 3D with deepest bottom left with fill method. *Advances in Inform. Systems*. 2004. No. 3261. P. 441–450. https://doi.org/10.1007/978-3-540-30198-1_45.
5. Cao P., Fan Z., Gao R., Tang J. Complex housing: modelling and optimization using an improved multi-objective simulated annealing algorithm. *Proc. ASME.* 2016. No. 60563, V02BT03A034. https://doi.org/10.1115/DETC2016-60563.
6. Guangqiang L. A., Fengqiang Z., Rubo Z., Du Jialu Du., Chen G., Yiran Z. Parallel particle bee colony algorithm approach to layout optimization. *J. Computational and Theoretical Nanoscience*. 2016. No. 13 (7). P. 4151–4157. https://doi.org/10.1166/jctn.2016.5263.
7. Torczon V., Trosset M. From evolutionary operation to parallel direct search: Pattern search algorithms for numerical optimization. *Computing Sci. and Statistics.* 1998. No. 29. P. 396–401.
8. Birgin E. G., Lobato R. D., Martinez J. M. Packing ellipsoids by nonlinear optimization. *J. Global Optimization.* 2016. No. 65. P. 709–743. https://doi.org/10.1007/s10898-015-0395-z.
9. Stoyan Y., Pankratov A., Romanova T. Quasi-phi-functions and optimal packing of ellipses. *J. Global Optimization.* 2016. No. 65 (2). P. 283–307. https://doi.org/10.1007/s10898-015-0331-2.
10. Fasano G. A. Global optimization point of view to handle non-standard object packing problems. *J. Global Optimization*. 2013. No. 55 (2). P. 279 –299. https://doi.org/10.1007/s10898-012-9865-8.
11. Egeblad J., Nielsen B. K., Brazil M. Translational packing of arbitrary polytopes. *Computational Geometry: Theory and Appl.* 2009. No. 42 (4). P. 269–288. https://doi.org/10.1007/s10898-012-9865-8.
12. Liu X,. Liu J., Cao A., Yao Z. HAPE3D - a new constructive algorithm for the 3D irregular packing problem. *Frontiers of Information Techn. & Electronic Eng.* 2015. No. 16 (5). P. 380–390. https://doi.org/10.1631/FITEE.1400421.
13. Youn-Kyoung J., Sang D. N. Intelligent 3D packing using a grouping algorithm for automotive container engineering. *J. Computational Design and Eng.* 2014. No. 1 (2). P. 140–151. https://doi.org/10.7315/JCDE.2014.014.
14. Kallrath J. Packing ellipsoids into volume-minimizing rectangular boxes. *J. Global Optimization*. 2017. No. 67 (1–2). P. 151–185. https://doi.org/10.1007/s10898-015-0348-6.
15. Stoyan Y. G. , Chugay A. M. Packing different cuboids with rotations and spheres into a cuboid *Advances in Decision Sci.* 2014. Availabel at https://www.hindawi.com/journals/ads/2014/571743. https://doi.org/10.1155/2014/571743.
16. Stoyan Y. G. , Semkin V. V., Chugay A. M. Modeling close packing of 3D objects. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2016. No. 52 (2). P. 296–304. https://doi.org/10.1007/s10559-016-9826-1.
17. Pankratov O., Romanova T., Stoyan Y., Chuhai A. Optimization of packing polyhedra in spherical and cylindrical containers. *Eastern European J. Enterprise Techn.* 2016. Vol. 1. No. 4 (79). P. 39–47. https://doi.org/10.15587/1729-4061.2016.60847.

18. Stoyan Y. G., Chugay A. M. Mathematical modeling of the interaction of non-oriented convex polytopes. *Cybernetic Systems Analysis.* 2012. No. 48. P. 837–845. https://doi.org/10.1007/s10559-012-9463-2.
19. Чугай А. М. Решение задачи упаковки кругов в выпуклый многоугольник с помощью модифицированного метода сужающихся окрестностей. *Радиоэлектроника и информатика*. 2005. № 1. С. 58–63.
20. Stoian Y. E., Chugay A. M., Pankratov A. V. Two approaches to modeling and solving the packing problem for convex polytopes. *Cybernetic Systems Analysis.* 2018. No. 54. P. 585–593. https://doi.org/10.1007/s10559-018-0059-3.

Надійшла до редакції 11.02.2020

Методология решения задач поиска оптимального размещения трехмерных тел

Ю. Г. Стоян, А. М. Чугай

Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины,
61046, Украина, г. Харьков, ул. Пожарского, 2/10

Работа посвящена решению оптимизационных задач упаковки трехмерных тел путем построения точных математических моделей и разработки подходов, основанных на применении оптимизационных методов нелинейного программирования и современных решателей. Разработаны конструктивные средства математического и компьютерного моделирования отношений ориентированных и неориентированных трехмерных тел, граница которых образована цилиндрическими, коническими, сферическими поверхностями и плоскостями, в виде новых классов Ф-функций и квази-Ф-функций. На базе разработанных средств математического моделирования построено и исследовано базовую математическую модель задачи оптимальной упаковки трехмерных тел, границы которых образованы цилиндрическими, коническими, сферическими поверхностями и плоскостями, а также различные ее реализации, которые охватывают широкий класс научных и прикладных задач упаковки трехмерных тел. Разработана общая методология решения задач упаковки трехмерных тел, допускающих одновременно непрерывные повороты и трансляции. Предложены стратегии, методы и алгоритмы решения оптимизационных задач упаковки трехмерных тел с учетом технологических ограничений (минимально допустимые расстояния, зоны запрета, возможность непрерывных трансляций и вращений). На основании предложенных средств математического моделирования, математических моделей, методов и алгоритмов, создано программное обеспечение с использованием технологии параллельных вычислений для автоматического решения оптимизационных задач упаковки трехмерных тел. Полученные результаты могут быть использованы при решении задач оптимизации компоновочных решений для компьютерного моделирования в материаловедении, в порошковой металлургии и нанотехнологиях, при оптимизации процесса 3D-печати для SLS технологии аддитивного производства, в информационно-логистических системах, обеспечивающих оптимизацию перевозки и хранения грузов.

Ключевые слова: *упаковка, трехмерные тела, геометрическое проектирование, Ф-функции, математическое моделирование, непрерывные вращения, нелинейная оптимизация.*