

УДК 539.375

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФОРМЫ РАВНОПРОЧНОГО ОТВЕРСТИЯ ДЛЯ СТРИНГЕРНОЙ ПЛАСТИНЫ, ОСЛАБЛЕННОЙ ПОВЕРХНОСТНОЙ ТРЕЩИНОЙ

М. В. Мир-Салим-заде,  
канд. физ.-мат. наук  
[minavar.mirsalimzade@imm.az](mailto:minavar.mirsalimzade@imm.az)  
ORCID: 0000-0003-4237-0352

Институт математики и  
механики НАН  
Азербайджана,  
AZ1141, Азербайджан, г. Баку, ул.  
Б. Вахабзаде, 9

*На основе принципа равнопрочности дается решение обратной задачи об определении оптимальной формы контура отверстия для пластины, ослабленной поверхностной прямолинейной трещиной. Пластина подкреплена регулярной системой упругих ребер жесткости (стрингеров). Трещина исходит из контура отверстия перпендикулярно прикрепленным стрингерам. Пластина подвергается на бесконечности однородному растяжению вдоль ребер жесткости. Рассматриваемая пластина полагается упругой или упруго-пластической. Критерием, определяющим оптимальную форму отверстия, служит условие отсутствия концентрации напряжений на поверхности отверстия и требование равенства нулю коэффициента интенсивности напряжений в окрестности вершины трещины. В случае упруго-пластической пластины пластическая область в момент зарождения должна охватывать сразу весь контур отверстия, не проникая вглубь. Поставленная задача состоит в определении такой формы отверстия, при которой действующее на контуре тангенциальное нормальное напряжение постоянно, а коэффициент интенсивности напряжений в окрестности вершины трещины равен нулю, а также в определении величин сосредоточенных сил, заменяющих действие стрингеров, и напряженно-деформированного состояния подкреплённой пластины. Использовались метод малого параметра, теория аналитических функций и метод прямого решения сингулярных интегральных уравнений. Поставленная задача сводится к задаче об отыскании условного экстремума. Применялся метод неопределённых множителей Лагранжа. Полученное решение обратной задачи позволяет повысить несущую способность стрингерной пластины.*

**Ключевые слова:** пластина, стрингеры, равнопрочное отверстие, трещина.

### Введение

Тонкие пластины (панели) как элементы различных конструкций и машин нередко ослабляются технологическими отверстиями. Отыскание равнопрочного контура отверстия весьма важно для предотвращения разрушения пластины (панели) и, соответственно, для надежности конструкции или машины. Задачи по отысканию равнопрочного контура отверстия исследовались в работах [1–20] и др., однако в реальном материале всегда возможно присутствие трещин. Имеется недостаточно работ [21–25] по нахождению оптимального контура отверстия, при котором в материале не будут расти трещины. Поставленная в работе задача состоит в отыскании равнопрочного контура отверстия в пластине, подкреплённой системой стрингеров и ослабленной прямолинейной поверхностной трещиной. Отыскивается контур, такой, что концентрация напряжений вблизи отверстия отсутствует, а трещина не растёт.

### Постановка задачи

Рассмотрим неограниченную тонкую пластину (панель), подкреплённую регулярной системой ребер жесткости (стрингеров). Подкреплённая панель подвергается на бесконечности однородному растяжению вдоль стрингеров напряжением  $\sigma_y^\infty = \sigma_0$ . Пластина имеет отверстие, из которого исходит прямолинейная трещина (рис. 1). Считается, что упругие изотропные стрингеры прикреплены к пластине симметрично относительно ее поверхности дискретным образом с постоянным шагом  $u_0$  по всей длине стрингера. Материал пластины принят изотропным.

Условия нагружения считаются квазистатическими. Приняты следующие допущения: при деформации толщина стрингеров неизменна, а напряженное состояние – одноосное; в пластине реализуется плоское напряженное состояние. Стрингеры работают только на растяжение (не подвергаются изгибу); система стрингеров ферменного типа, ослабления стрингеров за счет постановки точек крепления не происходит. Пластина и стрингеры взаимодействуют друг с другом в одной плоскости

и только в точках крепления. Точки крепления (площадки сцепления) одинаковы, с радиусом  $a_0$ , малым по сравнению с их шагом  $2L$  и другими характерными размерами.

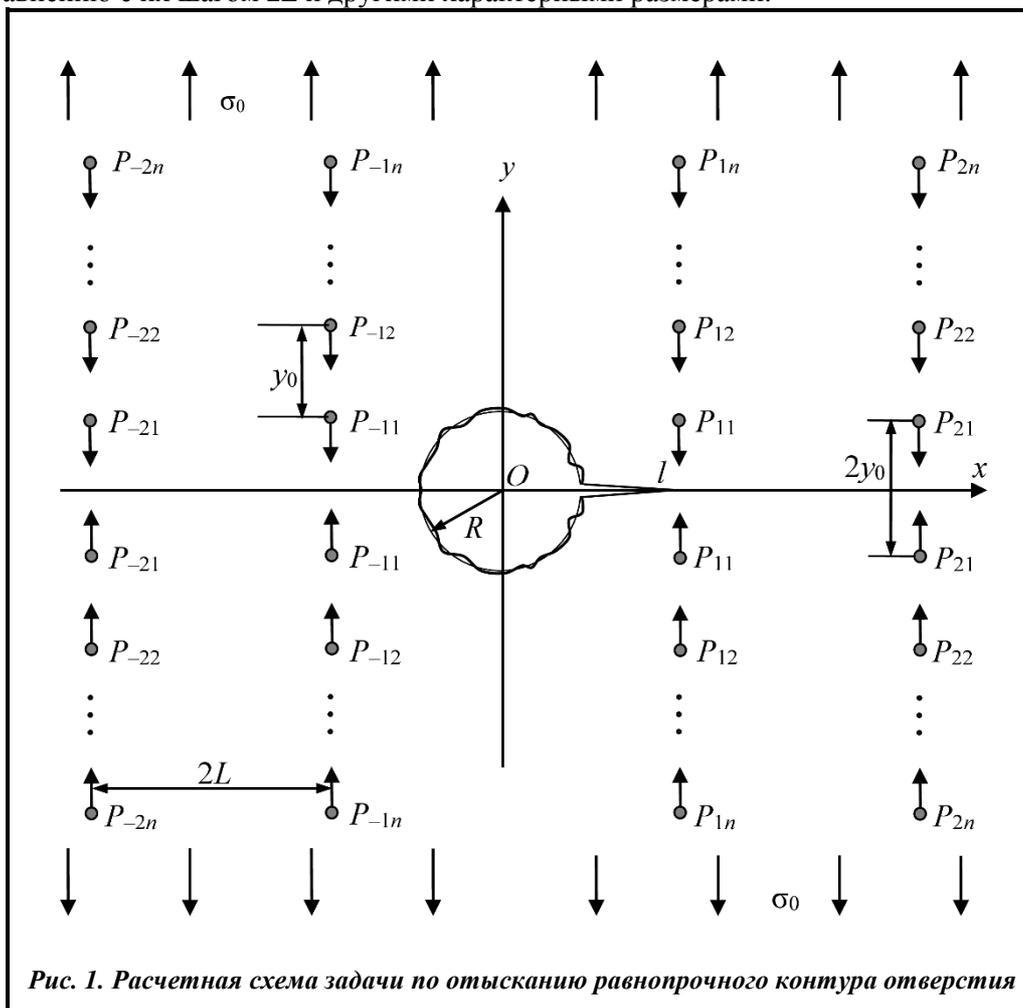


Рис. 1. Расчетная схема задачи по отысканию равнопрочного контура отверстия

Действие точек крепления заменяется действием сосредоточенных сил, приложенных в точках, соответствующих центрам площадок сцепления:  $z = \pm(2m+1)L \pm iky_0$  ( $m=0,1,2,\dots; k=1,2,\dots$ ). Действие стрингеров заменяется эквивалентными сосредоточенными силами  $P_{mn}$ , приложенными в точках их соединения с пластиной. Эти силы заранее неизвестны.

Граничные условия задачи имеют вид

– на контуре отверстия

$$\sigma_n = 0, \quad \tau_{nt} = 0;$$

– на берегах трещины

$$\sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = 0 \quad R \leq x \leq l.$$

Здесь  $n$  и  $t$  – нормаль и касательная к контуру отверстия.

Задача состоит в отыскании формы отверстия (неизвестного контура  $L_0$ ), удовлетворяющей двум условиям: действующее на контуре тангенциальное нормальное напряжение  $\sigma_t$  постоянно, т.е.

$$\sigma_t = \sigma_* = \text{const} \quad \text{на контуре отверстия}; \quad (1)$$

и исходящая из отверстия трещина не растет. Так как за параметр, характеризующий напряженное состояние в окрестности вершины трещины, принимаем, согласно теории квазихрупкого разрушения Ирвина-Орована, коэффициент интенсивности напряжений, это условие означает требование равенства нулю коэффициента интенсивности напряжений  $K_I^l$  в окрестности вершины трещины

$$K_I^l = 0. \quad (2)$$

В условии (1) величина  $\sigma_*$  требует определения, если материал пластины является упругим. Для упруго-пластической пластины требуем, чтобы пластическая область в момент зарождения охватывала сразу весь контур отверстия, не проникая вглубь, поскольку такое тело является наиболее прочным в смысле равномерного распределения напряжения по всему контуру отверстия [1]. Условие пластичности записываем так [26]:

$$f(\sigma_n, \sigma_t, \tau_{nt}) = 0,$$

где  $f$  – заданная функция. Из условия пластичности следует, что для упруго-пластической пластины  $\sigma_* = \sigma_s$ , т.е. условие (1) имеет вид

$$\sigma_t = \sigma_s = \text{const} \quad \text{на контуре отверстия,}$$

где  $\sigma_s$  – постоянная пластичности материала пластины.

### Решение краевой задачи

Неизвестный контур  $L_0$  отверстия будем искать в классе контуров, близких к круговым. Представим искомый контур  $L_0$  как

$$r = \rho(\theta) = R + \varepsilon H(\theta).$$

Здесь  $R$  – радиус кругового отверстия;  $\varepsilon = R_{\max}/R$  – малый параметр;  $R_{\max}$  – наибольшая высота (впадина) неровности профиля контура  $L_0$  отверстия от окружности  $r=R$ .

Функция  $H(\theta)$  требует определения в процессе решения поставленной задачи. Не уменьшая общности рассматриваемой обратной задачи, принимаем, что функция  $H(\theta)$  симметрична относительно осей координат и может быть представлена в виде ряда Фурье  $H(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} d_{2k} \cos 2k\theta$ .

Искомые функции, т.е. напряжения, перемещения, сосредоточенные силы  $P_{mn}$  и коэффициент интенсивности напряжений  $K_I^l$  ищем в виде разложений по малому параметру  $\varepsilon$

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_n^{(0)} + \varepsilon \sigma_n^{(1)} + \dots, & \sigma_t &= \sigma_t^{(0)} + \varepsilon \sigma_t^{(1)} + \dots, & \tau_{nt} &= \tau_{nt}^{(0)} + \varepsilon \tau_{nt}^{(1)} + \dots, \\ u_n &= u_n^{(0)} + \varepsilon u_n^{(1)} + \dots, & v_n &= v_n^{(0)} + \varepsilon v_n^{(1)} + \dots, \\ P_{mn} &= P_{mn}^{(0)} + \varepsilon P_{mn}^{(1)} + \dots, \\ K_I &= K_I^{(0)} + \varepsilon K_I^{(1)} + \dots \end{aligned}$$

Каждое из этих приближений удовлетворяет системе дифференциальных уравнений плоской задачи теории упругости. Членами, содержащими  $\varepsilon$  в степени выше первой, для упрощения пренебрегаем.

Разлагая в ряд выражения для напряжений в окрестности  $r=R$ , получим значения компонент тензора напряжений при  $r=\rho(\theta)$ . С помощью известных формул [27] для компонент напряжений  $\sigma_n$  и  $\tau_{nt}$ , записываем краевые условия задачи

– для нулевого приближения

$$\sigma_r^{(0)} = 0, \quad \tau_{r\theta}^{(0)} = 0 \quad \text{на контуре } r=R, \quad (3)$$

$$\sigma_x^{(0)} = 0, \quad \tau_{xy}^{(0)} = 0 \quad R \leq x \leq l \quad \text{на берегах трещины;} \quad (4)$$

– для первого приближения

$$\sigma_r^{(1)} = N, \quad \tau_{r\theta}^{(1)} = T \quad \text{на контуре } r = R,$$

$$\sigma_x^{(1)} = 0, \quad \tau_{xy}^{(1)} = 0 \quad R \leq x \leq l \quad \text{на берегах трещины,}$$

$$N = -H(\theta) \frac{\partial \sigma_r^{(0)}}{\partial r} + 2 \frac{\tau_{r\theta}^{(0)}}{R} \frac{\partial H(\theta)}{\partial \theta}, \quad T = -H(\theta) \frac{\partial \tau_{r\theta}^{(0)}}{\partial r} + \frac{\sigma_\theta^{(0)} - \sigma_r^{(0)}}{R} \frac{\partial H(\theta)}{\partial \theta}.$$

На основании формул Колосова-Мусхелишвили [27] и граничных условий (3) на контуре отверстия и (4) на берегах трещины задача сводится в нулевом приближении к определению двух аналитических функций  $\Phi^{(0)}(z)$ ,  $\Psi^{(0)}(z)$  из условий

$$\Phi^{(0)}(\tau) + \overline{\Phi^{(0)}(\tau)} - e^{2i\theta} [\overline{\tau} \Phi^{(0)\prime}(\tau) + \Psi^{(0)}(\tau)] = 0 \quad \text{при } \tau = Re^{i\theta}, \quad (5)$$

$$\Phi^{(0)}(x) + \overline{\Phi^{(0)}(x)} + x \overline{\Phi^{(0)\prime}(x)} + \overline{\Psi^{(0)}(x)} = 0 \quad R \leq x \leq l. \quad (6)$$

Решение краевой задачи (5)–(6) ищем в виде

$$\Phi^{(k)}(z) = \Phi_0^{(k)}(z) + \Phi_1^{(k)}(z) + \Phi_2^{(k)}(z), \quad (7)$$

$$\Psi^{(k)}(z) = \Psi_0^{(k)}(z) + \Psi_1^{(k)}(z) + \Psi_2^{(k)}(z),$$

где  $k=0$ .

Функции  $\Phi_0^{(0)}(z)$  и  $\Psi_0^{(0)}(z)$  описывают поле напряжений и деформаций в сплошной (без трещины) пластине под действием системы сосредоточенных сил  $P_{mn}^{(0)}$  и напряжения  $\sigma_0$ .  $\Phi_0^{(0)}(z)$ ,  $\Psi_0^{(0)}(z)$  определяются формулами

$$\Phi_0^{(0)}(z) = \frac{1}{4} \sigma_0 - \frac{i}{2\pi h(1+\kappa)} \sum_{m,n} P_{mn}^{(0)} \left[ \frac{1}{z - mL + iny_0} - \frac{1}{z - mL - iny_0} \right], \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \Psi_0^{(0)}(z) = & \frac{1}{2} \sigma_0 - \frac{i\kappa}{2\pi h(1+\kappa)} \sum_{m,n} P_{mn}^{(0)} \left[ \frac{1}{z - mL + iny_0} - \frac{1}{z - mL - iny_0} \right] + \\ & + \frac{i}{2\pi h(1+\kappa)} \sum_{m,n} P_{mn}^{(0)} \left[ \frac{mL - iny_0}{(z - mL + iny_0)^2} - \frac{mL + iny_0}{(z - mL - iny_0)^2} \right], \end{aligned}$$

где  $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ ;  $\nu$  – коэффициент Пуассона материала пластины; штрих у знака суммы указывает на то, что при суммировании исключается индекс  $m=n=0$ .

Потенциалы функции  $\Phi_1^{(0)}(z)$  и  $\Psi_1^{(0)}(z)$  ищем в виде

$$\Phi_1^{(0)}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_R^l \frac{g^{(0)}(z)}{t - z} dt, \quad (9)$$

$$\Psi_1^{(0)}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_R^l \left[ \frac{1}{t - z} - \frac{1}{(t - z)^2} \right] g^{(0)}(z) dt,$$

где  $g^{(0)}(x) = \frac{2\mu}{1 + \kappa} \frac{d}{dx} [v^+(x,0) - v^-(x,0)]$ ;  $\mu$  – модуль сдвига материала пластины.

Искомая функция  $g^{(0)}(x)$  и потенциалы  $\Phi_2^{(0)}(z)$  и  $\Psi_2^{(0)}(z)$  должны быть определены из условий (5)–(6). Представим краевое условие (5) в виде

$$\Phi_2^{(0)}(\tau) + \overline{\Phi_2^{(0)}(\tau)} - e^{2i\theta} [\overline{\tau} \Phi_2^{(0)\prime}(\tau) + \Psi_2^{(0)}(\tau)] = -\Phi_*^{(0)}(\tau) - \overline{\Phi_*^{(0)}(\tau)} + e^{2i\theta} [\overline{\tau} \Phi_*^{(0)\prime}(\tau) + \Psi_*^{(0)}(\tau)], \quad (10)$$

где  $\Phi_*^{(0)}(\tau) = \Phi_0^{(0)}(\tau) + \Phi_1^{(0)}(\tau)$ ,  $\Psi_*^{(0)}(\tau) = \Psi_0^{(0)}(\tau) + \Psi_1^{(0)}(\tau)$ .

Решая краевую задачу (10) с помощью метода Н. И. Мусхелишвили [27], определяем потенциалы  $\Phi_2^{(0)}(z)$  и  $\Psi_2^{(0)}(z)$

$$\Phi_2^{(0)}(z) = \frac{\sigma_0}{2z^2} + \frac{1}{2\pi} \int_R^l \left[ \frac{1-t^2}{t(1-tz)} + \frac{z-t}{(1-tz)^2} \right] g^{(0)}(t) dt - \frac{i}{2\pi h(1+\kappa)} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \sum_{m,n} P_{mn}^{(0)} \left\{ \frac{(mL - iny_0)(mL + iny_0) - 1}{(mL - iny_0)[z(mL - iny_0) - 1]^2} - \frac{(mL + iny_0)(mL - iny_0) - 1}{(mL + iny_0)[z(mL + iny_0) - 1]^2} \right\} + \\ & + \frac{i\kappa}{2\pi h(1 + \kappa)} \sum_{m,n} P_{mn}^{(0)} \left\{ \frac{1}{z[z(mL - iny_0) - 1]} - \frac{1}{z[z(mL + iny_0) - 1]} \right\}; \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \Psi_2^{(0)}(z) &= \frac{\sigma_0}{2z^2} + \frac{\Phi_2^{(0)}(z)}{z^2} - \frac{\Phi_2^{(0)'}(z)}{z^2} + \\ & + \frac{1}{2\pi z} \int_R^l \left[ \frac{2}{tz} - \frac{t}{z(1-tz)} + \frac{t^2 z - z - t}{z(1-tz)^2} - \frac{2t(z-t)}{(1-tz)^3} \right] g^{(0)}(t) dt + \frac{i}{2\pi h(1 + \kappa)z} \times \\ & \times \sum_{m,n} P_{mn}^{(0)} \left\{ \frac{1}{z(mL - iny_0) - 1} - \frac{1}{z(mL + iny_0) - 1} + \frac{1}{z(mL - iny_0)} - \frac{1}{z(mL + iny_0)} \right\}. \end{aligned}$$

В формулах (11) все линейные размеры отнесены к радиусу  $R$ .

Требуя, чтобы функции (7) при  $k=0$  удовлетворяли краевому условию (6) на берегах трещины, получим сингулярное интегральное уравнение относительно  $g^{(0)}(x)$

$$\frac{1}{\pi} \int_R^l \frac{g^{(0)}(t)}{t-x} dt + \frac{1}{\pi} \int_R^l K(t, x) g^{(0)}(t) dt = F^{(0)}(x), \quad (12)$$

$$F(x) = f_0^{(0)}(x) + f_1^{(0)}(x),$$

$$\begin{aligned} f_0^{(0)}(x) &= -\sigma_0 + \frac{\kappa + 2}{\pi h(1 + \kappa)} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{-mn}^{(0)} n y_0 \left[ \frac{1}{(x - mL)^2 + n^2 y_0^2} \right] + \sum_{m,n=1}^{\infty} P_{mn}^{(0)} n y_0 \left[ \frac{1}{(x + mL)^2 + n^2 y_0^2} \right] \right\} - \\ & - \frac{1}{\pi h(1 + \kappa)} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{mn}^{(0)} n y_0 \frac{(x - mL)^2 - n^2 y_0^2 - (x^2 - m^2 L^2)}{[(x - mL)^2 + n^2 y_0^2]^2} + \right. \\ & \left. + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{-mn}^{(0)} n y_0 \frac{(x + mL)^2 - n^2 y_0^2 - (x^2 - m^2 L^2)}{[(x + mL)^2 + n^2 y_0^2]^2} \right\}, \\ f_1^{(0)}(x) &= -\frac{1}{2\pi(1 + \kappa)h} \sum_{m,n=1}^{\infty} P_{-mn}^{(0)} n \left\{ \left( 2 + \frac{1}{x^2} \right) \times \right. \\ & \times \left\langle \frac{2(m^2 L^2 + n^2 y_0^2 - 1)[x^2(3m^2 L^2 - n^2 y_0^2) + 4xmL + 1]}{(m^2 L^2 + n^2 y_0^2)[(xmL + 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2]^2} + \frac{2\kappa}{(mxL + 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2} \right\rangle + \\ & + \left( \kappa - \frac{1}{\kappa} \right) \left\langle -4(m^2 L^2 + n^2 y_0^2 - 1) \frac{[x^3(3m^2 L^2 - n^2 y_0^2) + 6x^2 mL + 3x]}{[(xmL + 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2]^3} - \right. \\ & \left. - 4\kappa \frac{mL + x(m^2 L^2 + n^2 y_0^2)}{[(mxL + 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2]^2} \right\rangle - 2 \left[ \frac{1}{(mxL + 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2} + \frac{1}{m^2 L^2 + n^2 y_0^2} \right] \left. \right\} - \\ & - \frac{1}{2\pi(1 + \kappa)h} \sum_{m,n=1}^{\infty} P_{mn}^{(0)} \left( 2 + \frac{1}{x^2} \right) \left\langle \frac{2(m^2 L^2 + n^2 y_0^2 - 1)[x^2(3m^2 L^2 - n^2 y_0^2) - 4xmL + 1]}{(m^2 L^2 + n^2 y_0^2)[(xmL - 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2]^2} \right. \end{aligned}$$

$$\left. + \frac{2\hat{\epsilon}_0}{(mxL-1)^2 + x^2 n^2 y_0^2} \right) + \left( \kappa - \frac{1}{\kappa} \right) \times$$

$$\times \left\langle -4(m^2 L^2 + n^2 y_0^2 - 1) \frac{x^3 (3m^2 L^2 - n^2 y_0^2) - 6x^2 mL + 3x}{[(mxL-1)^2 + x^2 n^2 y_0^2]^3} + 4\kappa \frac{mL - x(m^2 L^2 + n^2 y_0^2)}{[(mxL-1)^2 + x^2 n^2 y_0^2]^2} \right\rangle -$$

$$- 2 \left[ \frac{1}{(mxL-1)^2 + x^2 n^2 y_0^2} + \frac{1}{m^2 L^2 + n^2 y_0^2} \right] \left\{ -\frac{\sigma_0}{2x^2} - \frac{3}{2} \frac{\sigma_0}{x^4} \right\}.$$

Используя метод прямого решения сингулярных интегральных уравнений [28–30], ищем решение уравнения (12). Переходя к безразмерным переменным, представим его в виде

$$g^{(0)}(\eta) = \frac{g_0^{(0)}(\eta)}{\sqrt{1-\eta^2}},$$

где  $g_0^{(0)}(\eta)$  – ограниченная функция, непрерывная на отрезке  $[-1, 1]$ ; она заменяется интерполяционным многочленом Лагранжа, построенным по чебышевским узлам.

В рассматриваемой задаче один конец трещины выходит на поверхность отверстия. Напряжения на этом конце ограничены. Вместе с дополнительным условием

$$K_1^{(0)} = 0 \quad \text{при } x=R,$$

сингулярное интегральное уравнение (12), сводится с помощью процедуры алгебраизации [28–30] к системе  $M$  линейных алгебраических уравнений для определения  $M$  неизвестных  $g^{(0)}(\tau_m)$  ( $m=1, 2, \dots, M$ )

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^M A_{mk} g_k^{(0)} = f_0^{(0)}(\eta_m) + f_1^{(0)}(\eta_m) \\ \sum_{k=1}^M (-1)^{k+M} g_k^{(0)} \operatorname{tg} \frac{\theta_k}{2} = 0 \end{cases}, \quad (13)$$

$$\text{где } A_{mk} = \frac{1}{M} \left[ \frac{1}{\sin \theta_m} \operatorname{ctg} \frac{\theta_m + (-1)^{|m-k|} \theta_k}{2} + K_0(\eta_m, \tau_k) \right]; \quad m=1, 2, \dots, M-1; \quad \theta_m = \frac{2m-1}{2M} \pi; \quad \eta_m = \cos \theta_m;$$

$$\tau_k = \eta_k; \quad g_k^{(0)} = g^{(0)}(\tau_k).$$

Далее определяем сосредоточенные силы  $P_{mn}^{(0)}$ . Согласно закону Гука, величина сосредоточенной силы  $P_{mn}^{(0)}$ , действующей на каждую точку крепления со стороны стрингера, будет

$$P_{mn}^{(0)} = \frac{E_s A_s}{2y_0 n} \Delta v_{mn}^{(0)} \quad (m, n = 1, 2, \dots), \quad (14)$$

где  $E_s$  – модуль Юнга материала стрингера;  $A_s$  – поперечное сечение стрингера;  $2y_0 n$  – расстояние между точками крепления;  $\Delta v_{mn}^{(0)}$  – взаимное смещение рассматриваемых точек крепления, равное удлинению соответствующего участка стрингера.

Примем [31] естественное допущение о том, что выполняется условие совместности перемещений, т.е. принимаем, что взаимное упругое смещение точек  $mL+i(ny_0-a_0)$  и  $mL-i(ny_0-a_0)$  и взаимное смещение точек крепления  $\Delta v_{mn}^{(0)}$  в рассматриваемой задаче равны. Используя формулы Колосова-Мухелишвили [27] и соотношения (7)–(9), (11), находим взаимное смещение точек крепления  $\Delta v_{mn}^{(0)}$ . Решая системы (13) и (14), находим величины сосредоточенных сил  $P_{mn}^{(0)}$ , приближенные значения функции  $g^{(0)}(\tau_m)$  в узловых точках и тем самым – комплексные потенциалы нулевого приближения.

Для коэффициента интенсивности напряжений в окрестности вершины трещины в нулевом приближении имеем

$$K_1^{(0)} = \sqrt{\pi(l-R)} \sum_{m=1}^M (-1)^m g^{(0)}(t_m) \operatorname{ctg} \frac{2m-1}{4M} \pi.$$

По формулам Колосова-Мусхелишвили и соотношениям (7) находим напряженное состояние в стрингерной пластине в нулевом приближении. Зная компоненты напряжений в нулевом приближении, находим функции  $N$  и  $T$ .

Далее строится решение задачи в первом приближении. Граничные условия задачи для первого приближения записываются в виде

$$\Phi^{(1)}(\tau) + \overline{\Phi^{(1)}(\tau)} - e^{2i\theta} \left[ \overline{\tau \Phi^{(1)'(\tau)} + \Psi^{(1)}(\tau)} \right] = N - iT, \quad (15)$$

$$\overline{\Phi^{(1)}(x) + \Phi^{(1)}(x) + x \Phi^{(1)'(x) + \Psi^{(1)}(x)} = 0 \quad R \leq x \leq l. \quad (16)$$

Аналогично нулевому приближению ищем решение краевой задачи (15) в виде (7) при  $k=1$ , где потенциалы  $\Phi_0^{(1)}(z)$  и  $\Psi_0^{(1)}(z)$  описывают поле напряжений и деформаций под действием системы сосредоточенных сил  $P_{mn}^{(1)}$  и определяются формулами, аналогичными (8), причем следует положить  $\sigma_0$  равным нулю, а  $P_{mn}^{(0)}$  заменить на  $P_{mn}^{(1)}$ . Функции  $\Phi_1^{(1)}(z)$  и  $\Psi_1^{(1)}(z)$  ищутся в виде, аналогичном (9), при этом функция  $g^{(0)}(x)$  заменяется на  $g^{(1)}(x)$ . Потенциалы  $\Phi_2^{(1)}(z)$  и  $\Psi_2^{(1)}(z)$  определяем из граничного условия (15), вновь используя метод Н. И. Мусхелишвили:

$$\Phi_2^{(1)}(z) = \Phi_*^{(1)}(z) + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} z^{-2k}, \quad \Psi_2^{(1)}(z) = \Psi_*^{(1)}(z) + \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k} z^{-2k}.$$

Здесь  $\Phi_*^{(1)}(z)$ ,  $\Psi_*^{(1)}(z)$  определяются формулами, аналогичными (11), в которых  $\sigma_0$  следует положить равным нулю, а  $P_{mn}^{(0)}$  и  $g^{(0)}(x)$  заменить соответственно на  $P_{mn}^{(1)}$  и  $g^{(1)}(x)$ . Коэффициенты  $a_{2k}$  и  $b_{2k}$  находим по формулам

$$\begin{aligned} a_{2n} &= C_{2n} R^{2n} \quad (n=1, 2, \dots), & a_0 &= 0, \\ b_{2n} &= (2n-1)R^2 a_{2n-2} - R^{2n} a_{-2n+2} \quad (n \geq 2), \\ b_0 &= 0, & b_2 &= -C_0 R^2, & N - iT &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{2k} e^{-2ki\theta}. \end{aligned}$$

Для сосредоточенных сил  $P_{mn}^{(1)}$  имеем

$$P_{mn}^{(1)} = \frac{E_s A_s}{2y_0 n} \Delta v_{mn}^{(1)}. \quad (17)$$

Взаимное смещение точек крепления  $\Delta v_{mn}^{(1)}$  определяется аналогично нулевому приближению.

Требую, чтобы функции (7) при  $k=1$  удовлетворяли условию (16) на берегах трещины в первом приближении, получаем сингулярное интегральное уравнение относительно функции  $g^{(1)}(x)$

$$\frac{1}{\pi} \int_R^l \frac{g^{(1)}(t)}{t-x} dt + \frac{1}{\pi} \int_R^l K(t,x) g^{(1)}(t) dt = F^{(1)}(x). \quad (18)$$

Используя процедуру алгебраизации [28–30], сингулярное интегральное уравнение (18) при условии

$$K_1^{(1)} = 0 \text{ на краю отверстия,}$$

сводим, аналогично нулевому приближению, к системе  $M$  линейных алгебраических уравнений для определения  $M$  неизвестных  $g^{(1)}(\tau_m)$  ( $m=1, 2, \dots, M$ )

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^M A_{mk} g_k^{(1)} = f_0^{(1)}(\eta_m) + f_1^{(1)}(\eta_m) \\ \sum_{k=1}^M (-1)^{k+M} g_k^{(1)} \operatorname{tg} \frac{\theta_k}{2} = 0 \end{cases}, \quad (19)$$

где  $m=1, 2, \dots, M-1$ ;  $g_k^{(1)} = g^{(1)}(\tau_k)$ .

Для коэффициента интенсивности напряжений в окрестности вершины трещины в первом приближении имеем

$$K_I^{(1)} = \sqrt{\pi(l-R)} \sum_{m=1}^M (-1)^{m+M} g^{(1)}(t_m) \operatorname{ctg} \frac{2m-1}{4M} \pi.$$

В правые части полученных систем уравнений первого приближения входят коэффициенты  $d_{2k}$  разложения функции  $H(\theta)$  в ряд Фурье. Таким образом, для замкнутости полученных систем следует построить недостающие уравнения, используя условия (1) и (2). С помощью полученного решения находим  $\sigma_t$  в поверхностном слое контура  $L_0$  ( $r=r(\theta)$ ) с точностью до величин первого порядка относительно малого параметра  $\varepsilon$

$$\sigma_t = \sigma_t^{(0)}(\theta) \Big|_{r=R} + \varepsilon \left[ \frac{H(\theta) \partial \sigma_t^{(0)}(\theta)}{\partial r} + \sigma_t^{(1)}(\theta) \right] \Big|_{r=R}.$$

Напряжения  $\sigma_t^{(1)}(\theta)$  зависят от коэффициентов  $d_{2k}$  ряда Фурье искомой функции  $H(\theta)$ . Требуя, чтобы обеспечивалось распределение напряжений на контуре отверстия, близкое к равномерному, получаем недостающие уравнения, позволяющие определить коэффициенты  $d_{2k}$ .

Снижение концентрации напряжений на контуре отверстия осуществляется путем минимизации критерия

$$U = \sum_{i=1}^M [\sigma_t(\theta_i) - \sigma_*]^2 \rightarrow \min.$$

Здесь  $\sigma_*$  – неизвестное оптимальное значение нормального тангенциального напряжения в поверхностном слое отверстия для упругой пластины.

Необходимо найти значения неизвестных коэффициентов  $d_{2k}$ , обеспечивающие наилучшим образом величины функции  $\sigma_t(\theta_i)$  согласно условию (1) при дополнительном условии (2). Функция  $U$  и коэффициент интенсивности напряжений зависят от коэффициентов  $d_{2k}$ , и, таким образом, приходим к задаче на условный экстремум функции  $U_0(\sigma_*, d_{2k})$ , когда коэффициенты  $d_{2k}$  связаны с дополнительным условием (2).

Необходимо найти минимальное значение функции  $U_0(\sigma_*, d_{2k})$ , причем  $k+1$  аргумента этой функции не являются независимыми, а подчинены дополнительному условию (2).

Для решения задачи на условный экстремум используем метод неопределенных множителей Лагранжа. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$U_0 = U + \lambda K_I^I$$

с неопределенным множителем  $\lambda$ .

$k+1$  необходимых условий экстремума имеют вид

$$\frac{\partial U_0}{\partial d_{2k}} = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n), \quad \frac{\partial U_0}{\partial \sigma_*} = 0. \quad (20)$$

Полученные  $n+1$  уравнений с добавочным уравнением (2) составляют систему уравнений с  $n+1+1$  неизвестными  $\sigma_*$ ,  $d_{2k}$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ),  $\lambda$ . Добавляя эту систему уравнений к полученным ранее алгебраическим системам (17), (19), получаем замкнутую алгебраическую систему для определения всех неизвестных, в том числе  $\sigma_*$  и коэффициентов  $d_{2k}$ .

Система уравнений (20) совместно с полученными алгебраическими системами задачи теории упругости в нулевом и первом приближениях позволяет определить форму равнопрочного отверстия, напряженно-деформированное состояние подкрепленной пластины и в случае упругой пластины также оптимальное значение нормального тангенциального напряжения  $\sigma_*$ .

Расчеты проводились для значений свободных параметров:  $a_0/L=0,01$ ;  $y_0/L=0,25$ . Принималось, что  $E=7,1 \cdot 10^4$  МПа,  $E_s=11,5 \cdot 10^4$  МПа, стрингеры выполнены из композита Al-сталь, а пластина – из сплава В95. Для упрощения было принято:  $A_s/y_0h=1$ . Число стрингеров и точек крепления считалось равным 14, а величина  $M=72$ . Результаты расчетов коэффициентов разложения искомой функции  $H(\theta)$  приводятся ниже.

$d_2$	$d_4$	$d_6$	$d_8$	$d_{10}$	$d_{12}$	$d_{14}$
0,1307	-0,1041	0,0773	0,0594	-0,0365	0,0139	0,0108

## Выводы

Найдено решение задачи по отысканию равнопрочного контура отверстия в усиленной регулярной системой стрингеров пластине. Найденный контур обеспечивает неподвижность исходящей из отверстия прямолинейной поверхностной трещины и отсутствие концентрации напряжений вблизи отверстия. Для отысканной равнопрочной формы отверстия построена замкнутая система алгебраических уравнений. Полученное решение обратной задачи позволяет повысить прочность пластины, а также ее надежность и несущую способность.

## Литература

1. Черепанов Г. П. Обратная упругопластическая задача в условиях плоской деформации. *Изв. АН СССР. Механика и машиностроение*. 1963. № 2. С. 57–60.
2. Черепанов Г. П. Обратные задачи плоской теории упругости. *Прикл. математика и механика*. 1974. Т. 38. Вып. 6. С. 963–979.
3. Мирсалимов В. М. Об оптимальной форме отверстия для перфорированной пластины при изгибе. *Прикл. механика и техн. физика*. 1974. Т. 15. № 6. С. 133–136.
4. Мирсалимов В. М. Обратная задача теории упругости для анизотропной среды. *Прикл. механика и техн. физика*. 1975. Т. 16. № 4. С. 190–193.
5. Вигдергауз С. Б. Интегральное уравнение обратной задачи плоской теории упругости. *Прикл. математика и механика*. 1976. Т. 40. Вып. 3. С. 566–569.
6. Вигдергауз С. Б. Об одном случае обратной задачи двумерной теории упругости. *Прикл. математика и механика*. 1977. Т. 41. Вып. 5. С. 902–908.
7. Мирсалимов В. М. Обратная двоякопериодическая задача термоупругости. *Изв. АН СССР. Механика твёрдого тела*. 1977. Т. 12. №4. С. 147–154.
8. Мирсалимов В. М. Равнопрочная выработка в горном массиве. *Физико-техн. проблемы разработки полезных ископаемых*. 1979. Т. 15. №4. С. 24–28.
9. Баничук Н. В. Оптимизация форм упругих тел. М.: Наука, 1980. 255 с.
10. Остросаблин Н. И. Равнопрочное отверстие в пластине при неоднородном напряженном состоянии. *Прикл. механика и техн. физика*. 1981. № 2. С. 155–163.
11. Бондарь В. Д. Равнопрочное отверстие в условиях геометрической нелинейности. *Прикл. механика и техн. физика*. 1996. № 6. С. 148–155.
12. Саврук М. П., Кравец В. С. Применение метода сингулярных интегральных уравнений для определения контуров равнопрочных отверстий в пластинах. *Физико-хим. механика материалов*. 2002. Т. 38. № 1. С. 31–40.
13. Мир-Салим-заде М. В. Обратная упругопластическая задача для клепаной перфорированной пластины. *Совр. проблемы прочности, пластичности и устойчивости: сб. статей*. Тверь: Тверск. ун-т, 2007. С. 238–246.
14. Bantsuri R., Mzhavanadze Sh. The mixed problem of the theory of elasticity for a rectangle weakened by unknown equi-strong holes. *Proc. of A. Razmadze Math. Institute*. 2007. Vol. 145. P. 23–34.
15. Мир-Салим-заде М. В. Определение формы равнопрочного отверстия в изотропной среде, усиленной регулярной системой стрингеров. *Материалы, технологии, инструменты*. 2007. Т. 12. №4. С. 10–14.
16. Vigdergauz S. Stress-smoothing holes in an elastic plate: From the square lattice to the checkerboard. *Mathematics and Mechanics of Solids*. 2012. Vol. 17. Iss. 3. P. 289–299. <https://doi.org/10.1177/1081286511411571>.
17. Cherepanov G. P. Optimum shapes of elastic bodies: equistrong wings of aircrafts and equistrong underground tunnels. *Phys. Mesomechanics*. 2015. Vol. 18. Iss. 4. P. 391–401. <https://doi.org/10.1134/S1029959915040116>.

18. Vigdergauz S. Simply and doubly periodic arrangements of the equi-stress holes in a perforated elastic plane: The single-layer potential approach. *Mathematics and Mechanics of Solids*. 2018. Vol. 23. Iss. 5. P. 805–819. <https://doi.org/10.1177/1081286517691807>.
19. Zeng X., Lu A., Wang Sh. Shape optimization of two equal holes in an infinite elastic plate. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*. 2020. Vol. 48, Iss. 2. P. 133–145. <https://doi.org/10.1080/15397734.2019.1620111>.
20. Калантарлы Н. М. Равнопрочная форма отверстия для торможения роста трещины продольного сдвига. *Пробл. машиностроения*. 2017. Т. 20. №. 4. С. 31–37. <https://doi.org/10.15407/pmach2017.04.031>.
21. Мирсалимов В. М. Максимальная прочность выработки в горном массиве, ослабленном трещиной. *Физико-техн. проблемы разработки полезных ископаемых*. 2019. Т. 55. №1. С. 12–21. <https://doi.org/10.15372/FTPPI20190102>.
22. Mirsalimov V. M. Inverse problem of elasticity for a plate weakened by hole and cracks. *Math. Problems in Eng.* Vol. 2019. Article ID 4931489, 11 p. <https://doi.org/10.1155/2019/4931489>.
23. Mir-Salim-zade M. V. Minimization of the stressed state of a stringer plate with a hole and rectilinear cracks. *J. Mech. Eng.* 2019. Vol. 22. No. 2. P. 59–69. <https://doi.org/10.15407/pmach2019.02.059>.
24. Mirsalimov V. M. Minimizing the stressed state of a plate with a hole and cracks. *Eng. Optimization*. 2020. Vol. 52. Iss. 2. P. 288–302. <https://doi.org/10.1080/0305215X.2019.1584619>.
25. Мир-Салим-заде М. В. Равнопрочная форма отверстия для стрингерной пластины с трещинами. *Вестн Том. ун-та. Математика и механика*. 2020. №. 64. С. 121–135. <https://doi.org/10.17223/19988621/64/9>.
26. Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д. Математическая теория пластичности. М.: Физматлит. 2001. 704 с.
27. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
28. Каландия А. И. Математические методы двумерной упругости. М.: Наука. 1973. 304 с.
29. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацьшин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наук. думка, 1976. 443 с.
30. Мирсалимов В. М. Неодномерные упругопластические задачи. М.: Наука. 1987. 256 с.
31. Мирсалимов В. М. Некоторые задачи конструкционного торможения трещины. *Физико-хим. механика материалов*. 1986. Т. 22. № 1. С. 84–88.

Поступила в редакцию 25.04.2020

## Визначення форми рівномірного отвору для стрингерної пластини, ослабленої поверхневою тріщиною

М. В. Мір-Салім-заде

Інститут математики і механіки НАН Азербайджану,

AZ1141, Азербайджан, м. Баку, вул. Б. Вахабзаде, 9

На основі принципу рівномірності дається розв'язок оберненої задачі з визначення оптимальної форми контура отвору для пластини, ослабленої поверхневою прямолінійною тріщиною. Пластина підкріплена регулярною системою пружних ребер жорсткості (стрингерів). Тріщина виходить з контура отвору перпендикулярно приклепанам стрингерам. Пластина піддається на нескінченності однорідному розтягуванню уздовж ребер жорсткості. Пластина, що розглядається, припускається пружною або пружно-пластичною. Критерієм, що визначає оптимальну форму отвору, служить умова відсутності концентрації напруження на поверхні отвору і вимога рівності нулю коефіцієнта інтенсивності напружень в околі вершини тріщини. У разі пружно-пластичної пластини пластична область у момент зародження має охоплювати відразу увесь контур отвору, не проникаючи вглиб. Поставлена задача полягає у визначенні такої форми отвору, за якої тангенціальне нормальне напруження, що діє на контурі, є сталим, а коефіцієнт інтенсивності напруження в околі вершини тріщини дорівнює нулю, а також у визначенні величин зосереджених сил, що замінюють дію стрингерів, і напружено-деформованого стану підкріпленої пластини. Використовувалися метод малого параметра, теорія аналітичних функцій і метод прямого розв'язання сингулярних інтегральних рівнянь. Поставлена задача зводиться до задачі з відшукування умовного екстремуму. Застосовувався метод невизначених множників Лагранжа. Отриманий розв'язок оберненої задачі дозволяє підвищити несучу здатність пластини стрингера.

**Ключові слова:** пластина, стрингери, рівномірний отвір, тріщина.