УДК 536.24

К РЕШЕНИЮ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Ю. М. Мацевитый, академик НАН Украины
matsevit@ipmach.kharkov.ua
ORCID: 0000-0002-6127-0341

В. В. Ганчин
gan4ingw@gmail.com
ORCID: 0000-0001-9242-6460

Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины,
61046, Украина, г. Харьков,
ул. Пожарского, 2/10

На основе теории регуляризации А. Н. Тихонова разработана методика решения обратных задач теплопроводности по идентификации гладкой внешней границы двухмерной области при известном граничном условии. Для этого идентифицируемая гладкая граница аппроксимируется кубическими сплайнами Шёнберга, в результате чего ее идентификация сводится к определению неизвестных коэффициентов аппроксимации. При известных граничных и начальных условиях температура в теле будет зависеть только от этих коэффициентов. Выразив ее по формуле Тейлора для двух членов ряда и подставив в функционал Тихонова, задачу определения приращений коэффициентов можно свести к решению системы линейных уравнений относительно этих приращений. Выбрав некоторый параметр регуляризации и некоторую функцию, описывающую форму внешней границы, в качестве начального приближения, можно реализовать итерационный процесс. В этом процессе вектор неизвестных коэффициентов для текущей итерации будет равен сумме вектора коэффициентов на предыдущей итерации и вектора приращений данных коэффициентов, полученных в результате решения системы линейных уравнений. Получив вектор коэффициентов в результате сходящегося итерационного процесса, можно определить среднеквадратическую невязку между получаемой температурой и температурой, измеренной в результате проведенного эксперимента. Остается подобрать параметр регуляризации таким образом, чтобы эта невязка была в пределах среднеквадратичной погрешности ошибки измерений. В самой методике и путях ее реализации заключается новизна изложенного в статье материала по сравнению с подходами других авторов к решению обратных геометрических задач теплопроводности. При проверке эффективности использования предложенной методики решен ряд двухмерных тестовых задач для тел с известным расположением внешней границы. Проведен анализ влияния случайных погрешностей измерений на погрешность идентификации формы внешней границы.

Ключевые слова*: геометрическая обратная задача теплопроводности, метод регуляризации А. Н. Тихонова, стабилизирующий функционал, параметр регуляризации, идентификация, аппроксимация, кубические сплайны Шёнберга.*

Введение

На сегодняшний день обратные задачи, то есть такие задачи, в которых причинные характеристики физических процессов определяются по результатам измерений или по другим следственным проявлениям, широко применяются при исследовании физических процессов различной природы, в том числе и теплофизических [1]. Решение геометрических обратных задач теплопроводности (ОЗТ) по идентификации внешней границы тела, на которой известно граничное условие, имеет особое значение на этапе построения математических моделей при наличии экспериментальной информации об исследуемом тепловом процессе. В данной статье геометрическая ОЗТ рассматривается как задача идентификации внешней границы тела с зависящими от температуры коэффициентом теплопроводности и теплоемкостью и с известным граничным условием на этой границе. В работах [1–5] приведены классификации ОЗТ и рассмотрены методы их решения. В монографии [1] дана также классификация геометрических ОЗТ. В настоящей статье согласно [1] рассматривается задача, которая относится к классу геометрических ОЗТ по определению формы и положения границ области. В статье [6] предложен единый методологический подход к постановке и решению геометрических ОЗТ, одним из этапов которого является параметризация искомой геометрической информации, т.е. решение геометрической ОЗТ сводится к определению конечного набора геометрических параметров.

В данной статье поиск искомой границы в двухмерном случае сводится к поиску уравнения гладкой границы в виде $x=f(y)$. Аппроксимировав искомую функцию $f(y)$ линейной комбинацией кубических сплайнов Шёнберга с неизвестными коэффициентами, можно свести решение геометрической ОЗТ к поиску этих коэффициентов. В работе [7] предложен метод решения внутренней ОЗТ (идентификация зависимого от температуры коэффициента теплопроводности), в котором для получения устойчивого решения использовался метод α-регуляризации М. М. Лаврентьева [8], менее гибкий по сравнению с методом регуляризации А. Н. Тихонова [4], так как при его использовании сложнее учесть априорную информацию об искомой функции.

В работе [9] нами использовался итерационный процесс, предложенный в [7], и метод регуляризации А. Н. Тихонова [4], а также подход подбора параметра регуляризации для одновременной идентификации нескольких искомых теплофизических характеристик. С использованием этого подхода в данной работе предлагается методика поиска части гладкой границы путем решения нелинейных геометрических обратных задачах теплопроводности.

Постановка задачи

В данной работе рассматривается двухмерная нелинейная геометрическая обратная задача теплопроводности, которая может быть формализована следующим образом:

$$A[f(y)] = T^{ex},$$

где $f(y)$ – правая часть искомого уравнения внешней границы $x=f(y)$; $T^{ex} = T(x, y, \tau)$ – температура, в большинстве случаев известная из эксперимента (исходные данные); A – оператор, который связывает искомую функцию $f(y)$ с исходными данными.

Такая задача, как и любая другая обратная задача теплопроводности, ввиду нарушения причинно-следственной связи некорректна по Адамару, что является причиной неустойчивости получаемого решения. Для решения такой задачи её либо сводят к условно-корректной, либо оставляют некорректной, но применяют один из методов регуляризации [2–5]. Здесь используется метод регуляризации А. Н. Тихонова [4].

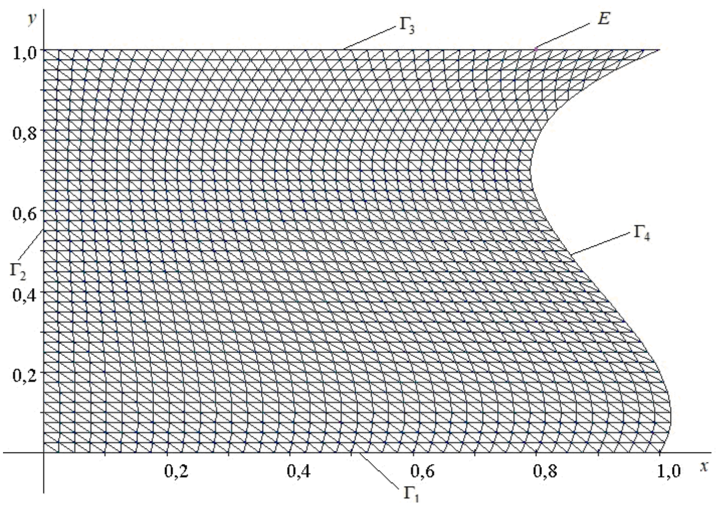

Рис. 1. Геометрия объекта, исследуемого в тестовой задаче, с конечно-элементной сеткой

Рассмотрим тепловой процесс в двухмерном теле (рис. 1).

Этот процесс описывается следующими уравнениями [2, 10]:

$$C(T)\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial y}\right), \quad (x,y) \in D, \tag{1}$$

$$-\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial \nu}\bigg|_{M\in\Gamma_1\cup\Gamma_2} = 0, \tag{2}$$

$$-\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial \nu}\bigg|_{M\in\Gamma_3} = \alpha_1\left(T - T_{S_1}\right), \tag{3}$$

$$-\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial \nu}\bigg|_{M\in\Gamma_4} = \alpha_2\left(T - T_{S_2}\right), \tag{4}$$

$$T(x, y, \tau)\big|_{\tau=0} = T_0, \tag{5}$$

$$\text{при } T(x_k, y_k, \tau_l) = T_{lk}^{ex}, \quad l = \overline{1, n_\tau}, \quad k = \overline{1, m}, \tag{6}$$

где $T = T(x, y, \tau)$ – температура тела; D – область пространства, занимаемая телом; $\Gamma_i, i = \overline{1,4}$ – части границы области D; (x, y) – точка в области D; $\lambda(T)$ и $C(T)$ – зависимые от температуры коэффициент теплопроводности и теплоемкость; α_1 и α_2 – коэффициенты теплоотдачи на поверхностях тела Γ_3 и Γ_4 соответственно; T_{S_1} и T_{S_2} – заданная температуры внешней среды, контактирующей с поверхностями тела Γ_3 и Γ_4 соответственно; ν – внешняя нормаль к границе тела; Γ_4 – идентифицируемая граница тела, описываемая уравнением $x = f(y)$; T_0 – начальная температура тела; n_τ – количество измерений во времени; m – количество точек измерений в теле; (x_k, y_k) – точки области D, в которых измерена температура T_{lk}^{ex}. Ошибка измерений является случайной величиной, распределённой по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ^2.

По данным теплофизического эксперимента определяется уравнение внешней границы $x=f(y)$ с учетом имеющейся априорной информации об этой функции.

Ниже рассматривается методологический подход к решению поставленной задачи.

Регуляризирующий алгоритм решения геометрической ОЗТ

Для решения нелинейной геометрической ОЗТ (1–6) используем принцип регуляризации А. Н. Тихонова, который сводится к минимизации функционала

$$J = \int_0^{\tau_0} \int_D \left[T(x, y, \tau) - T^{ex}(x, y, \tau)\right]^2 dxdyd\tau + \beta \cdot \Omega[f(y)] + \Delta[f(y)], \tag{7}$$

где $T = T(x, y, \tau)$ – температура, получаемая в процессе решения обратной геометрической задачи теплопроводности; $T^{ex}(x, y, \tau)$ – экспериментально полученная температура; τ_0 – момент окончания анализа теплового процесса; β – параметр регуляризации; $\Omega[f(y)]$ – стабилизирующий функционал; $\Delta[f(y)]$ – квадратичный функционал, характеризующий невязку между искомой функцией $f(y)$ и априорно заданной о ней информацией.

Искомую функцию $f(y)$ представим в виде

$$f(y) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k B_3^k(y), \tag{8}$$

где $(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n) = \vec{\Phi}$ – вектор искомых параметров, а $B_3^k(y)$ – кубические сплайны Шёнберга. Тогда идентификация искомой функции сводится к определению неизвестного вектора $\vec{\Phi}$.

Минимизацию функционала (7) проведём итерационным методом [7]. Поскольку температура $T(x, y, \tau)$ зависит от вектора $\vec{\Phi}$, ее на $(p+1)$-й итерации можно записать, используя ряд Тейлора, следующим образом:

$$T^{p+1}\left(x, y, \tau, f^{p+1}(y)\right) \approx T^p\left(x, y, \tau, f^p(y)\right) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial T^p}{\partial \varphi_k} \Delta\varphi_k^{p+1}, \tag{9}$$

где $(\Delta\varphi_1^{p+1}, \Delta\varphi_2^{p+1}, ..., \Delta\varphi_n^{p+1}) = \Delta\overrightarrow{\Phi^{p+1}}$ – вектор приращений $\Delta\overrightarrow{\Phi^{p+1}} = \overrightarrow{\Phi^{p+1}} - \overrightarrow{\Phi^p}$.

Стабилизирующий функционал $\Omega[f(y)]$ на $(p+1)$-й итерации представим в виде

$$\Omega\left[f^{p+1}(y)\right] = \int_0^1 \left(w_0 \left(f^{p+1}\right)^2 + w_1 \left(\frac{\partial f^{p+1}}{\partial y}\right)^2 + w_2 \left(\frac{\partial^2 f^{p+1}}{\partial y^2}\right)^2 \right) dy, \tag{10}$$

где w_0, w_1, w_2 – весовые множители, которые выбираются с использованием априорной информации об искомой функции $f(y)$.

В данной задаче использовалась регуляризация второго порядка [5], когда $w_0 = 0, w_1 = 0$ и $w_2 = 1$.

Квадратичный функционал $\Delta[f(y)]$, характеризующий невязку между значениями искомой функции и ее же значениями, априорно заданными при некоторых значениях переменной y, может быть построен следующим образом.

Пусть $y_1, y_2, \dots, y_s$ – некоторые аргументы искомой функции, а $f_1, f_2, \dots, f_s$ – соответственно априорно заданные значения этой функции. Тогда

$$\Delta[f(y)] = \sum_{\mathrm{j}=1}^{s} P_j \left(f(y_j) - f_j\right)^2, \tag{11}$$

где P_j – весовые множители, которые выбираются, исходя из того, насколько точно заданы априорные значения $f_1, f_2, \dots, f_s$.

Если подставить выражения (8), (10), (11) в функционал (7) и заменить $T(x, y, \tau)$ приближенным значением температуры (9) в точках термометрирования, то, используя необходимое условие минимума функционала (7), можно получить систему линейных уравнений относительно $\Delta\varphi_i^{p+1}$, $i = \overline{1, n}$, на (p+1)-й итерации

$$\left(M_0 + \beta \cdot M_1 + M_2\right)\overrightarrow{\Delta\varphi^{\mathrm{p+1}}} = \overrightarrow{V_0} - \beta \cdot \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2},$$

где $M_0 = \{m_{0ij}\}_{\mathrm{i,\,j\text{-}1}}^{n}$, $M_1 = \{m_{1ij}\}_{\mathrm{i,\,j\text{-}1}}^{n}$, $M_2 = \{m_{2ij}\}_{\mathrm{i,\,j\text{-}1}}^{n}$ – симметричные матрицы размерности n, $\overrightarrow{V_0} = \{v_{0i}\}_{\mathrm{i\text{-}1}}^{n}$, $\overrightarrow{V_1} = \{v_{1i}\}_{\mathrm{i\text{-}1}}^{n}$, $\overrightarrow{V_2} = \{v_{2i}\}_{\mathrm{i\text{-}1}}^{n}$ – векторы размерности n. Соответствующие компоненты матриц и векторов имеют следующий вид:

$$m_{0ij} = \int_0^{\tau_0}\int_D \left[\frac{\partial T^p}{\partial \varphi_i} \cdot \frac{\partial T^p}{\partial \varphi_j}\right] dxdyd\tau,$$

$$m_{1ij} = \int_0^1 \left(w_0 \cdot B_i^3(y) \cdot B_j^3(y) + w_1 \cdot \frac{\partial B_i^3(y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial B_j^3(y)}{\partial y} + w_2 \cdot \frac{\partial^2 B_i^3(y)}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 B_j^3(y)}{\partial y^2}\right) dy,$$

$$m_{2ij} = \sum_{l=1}^{s} z_l \cdot B_i^3(y_l) \cdot B_j^3(y_l),$$

$$v_{0i} = \int_0^{\tau_0}\int_D \left(T^{ex}(x, y, \tau) - T^p(x, y, \tau, f^p(y))\right) \cdot \frac{\partial T^p}{\partial \varphi_i} dxdyd\tau,$$

$$v_{1i} = \int_0^1 \left(w_0 \cdot B_i^3(y) \cdot f^p(y) + w_1 \cdot \frac{\partial B_i^3(y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial f^p(y)}{\partial y} + w_2 \cdot \frac{\partial^2 B_i^3(y)}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 f^p(y)}{\partial y^2}\right) dy,$$

$$v_{2i} = \sum_{l=1}^{s} P_l \cdot \left(f_l - f^p(y_l)\right) \cdot B_i^3(y_l).$$

В эту систему входит параметр регуляризации β, который определяется аналогично работам [9, 11, 12], исходя из условия

$$\left(1 - \sqrt{\frac{2}{N}}\right)\sigma \le \delta \le \left(1 + \sqrt{\frac{2}{N}}\right)\sigma, \tag{12}$$

которое было предложено в [5]. Здесь N – общее количество термометрических измерений; σ – среднеквадратическая ошибка измерения; δ – среднеквадратичное отклонение в точках термометрирования, полученное от измеренной температуры.

Считается, что параметр регуляризации выбран правильно, если для полученного решения по предложенной выше итерационной схеме выполняется двустороннее неравенство (12).

Численный эксперимент

Рассмотрим процесс охлаждения тела (рис. 1) конвективным тепловым потоком. Для проведения численного эксперимента в качестве $f(y)$ на границе Γ_4 возьмем

– зависимость

$$f(y) = 1 + 0{,}4y - 2{,}4y^2 + 2y^3, \tag{13}$$

которая достаточно точно аппроксимируются кубическими сплайнами Шёнберга с небольшим количеством искомых параметров;

– нелинейный коэффициент теплопроводности

$$\lambda(T) = 1 + 3{,}2T - 7T^2 + 4T^3$$

– нелинейную теплоемкость

$$C(T) = 1 - 1{,}2T + 7{,}2T^2 - 5{,}7T^3.$$

Наложим на правую часть уравнения идентифицируемой границы ограничения. Пусть для искомой функции $f(y)$ выполняется двустороннее неравенство

$$F_1 \le f(y) \le F_2,$$

где F_1 и F_2 – выбираются, исходя из технологического процесса. Допустим, что точки термометрирования расположим равномерно по координатам x и y так, чтобы они находились строго в исследуемой области при поиске границы. На полученное численное решение в точках термометрирования наложим случайную ошибку, распределенную по нормальному закону при σ=0,02.

Для решения рассматриваемой геометрической обратной задачи теплопроводности в качестве априорной информации используются значения $f(y)$ на концах интервала $[0,1]$: $f(0)=1$ и $f(1)=1$.

На рис. 2 представлены функции $f(y)$ идентифицированной границы для следующих безразмерных данных: n_τ=400, m=36, $\Delta\tau$=0,0025, α_1=5,0, α_2=5,0, $T_{s_1}=0$, $T_{s_2}=0$, T_0=1,0, n=13, w_0=0, w_1=0, w_2=1, F_1=0,7, F_2=1,2, s=2, y_1=0, y_2=1, f_1=1, f_2=1, $z_1=10^5$, $z_2=10^5$.

Зависимости $T(\tau)$ в точке E (рис. 1), находящейся на внешней границе Γ_3, показаны на (рис. 3).

Подбор параметра регуляризации β начинался с β=80,0. Итерационный процесс подбора β после 4 итераций закончился на $\beta=0{,}8\cdot10^{-4}$ при достижении среднеквадратичной ошибки $\delta\approx0{,}005186$. Все краевые задачи по определению поля температур в исследуемом объекте решались с применением метода конечных элементов и неявной разностной схемы.

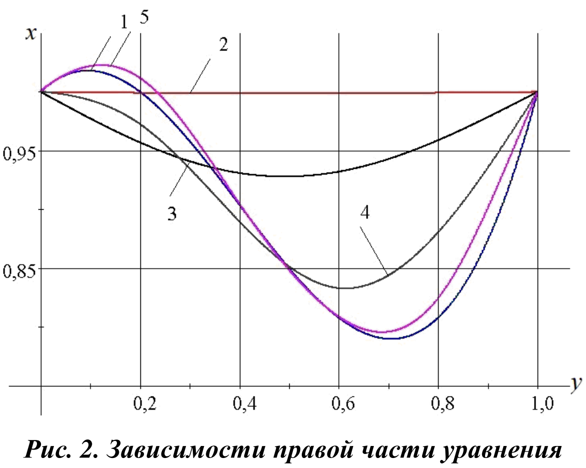

Рис. 2. Зависимости правой части уравнения идентифицируемой границы x=f(y):
1 – в виде (13); 2 – граница на 1-й итерации при β=80; 3 – граница на 2-й итерации при β=0,8; 4 – граница на 3-й итерации при $\beta=0{,}8\cdot10^{-2}$; 5 – граница на 4-й итерации при $\beta=0{,}8\cdot10^{-4}$

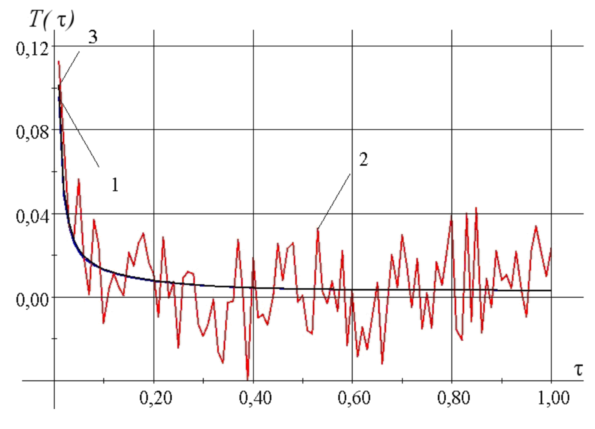

Рис. 3. Зависимости T(τ) в точке E (рис. 1) с координатами x=0,7, y=1:
1 – полученная с использованием уравнения границы Γ_4 в виде (13); 2 – «зашумленное» решение прямой задачи; 3 – полученная путем решении ОЗТ

Выводы

Приведенное решение нелинейной двухмерной обратной геометрической задачи теплопроводности по идентификации части внешней границы свидетельствует о том, что предложенная методика может быть успешно использована при наличии априорной информации об искомой функции даже при достаточно больших ошибках в температурных измерениях (рис. 3).

Хотя статья носит теоретический характер, представленные в ней подходы и методики используются (см. [1]) и могут быть применены при проектировании радиоэлектронной аппаратуры, когда необходимо определять области расположения источников и стоков теплоты. Они могут быть полезны также при исследовании таких технологических процессов, как индукционный нагрев деталей, активационный отжиг полупроводниковой пластины. С их помощью можно также проводить неразрушающую диагностику (например, определять размеры трещин и другие дефекты в исследуемом объекте).

Представленные в статье исследования выполнены в рамках бюджетной темы III-6-20.

Литература

1. Мацевитый Ю. М., Костиков А. О. Геометрические обратные задачи теплообмена. Киев: Наук. думка, 2014. 223 с.
2. Мацевитый Ю. М. Обратные задачи теплопроводности: в 2-х т. Т. 1: Методология. Киев: Наук. думка, 2002. 408 с.
3. Алифанов О. М., Артюхин Е. А., Румянцев С. В. Экстремальные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1988. 288 с.
4. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 288 с.
5. Бек Дж., Блакуэлл Б., Сент-Клэр Ч. (мл.) Некорректные обратные задачи теплопроводности. М.: Мир, 1989. 312 с.
6. Костиков А. О. Единый методологический подход к постановке и решению геометрических обратных задач теплопроводности. *Пробл. машиностроения*. 2004. Т. 7. № 4. С. 52–60.
7. Круковский П. Г. Обратные задачи тепломассопереноса (общий инженерный подход). Киев: Ин-т техн. теплофизики НАН Украины, 1998. 224 с.
8. Лаврентьев М. М. О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: Изд-во Сиб. отд-ния АН СССР, 1962. 68 с.
9. Matsevytyi, Yu. M. & Hanchyn, V. V. Multiparametric identification of several thermophysical characteristics by solving the internal inverse heat conduction problem. *J. Mech. Eng*. 2020. Vol. 23. No. 2. P. 14–20. https://doi.org/10.15407/pmach2020.02.014.
10. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 596 с.
11. Мацевитый Ю. М., Слесаренко А. П., Ганчин В. В. Регионально-аналитическое моделирование и идентификация тепловых потоков с использованием метода регуляризации А. Н. Тихонова. *Пробл. машиностроения*. 1999. Т. 2. № 1–2. С. 34–42.
12. Мацевитый Ю. М., Сафонов Н. А., Ганчин В. В. К решению нелинейных обратных граничных задач теплопроводности. *Пробл. машиностроения*. 2016. Т. 19. № 1. С. 28–36. https://doi.org/10.15407/pmach2016.01.028.

Поступила в редакцию 09.12.2020

До розв’язання геометричних обернених задач теплопровідності

Ю. М. Мацевитий, В. В. Ганчин

Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України,
61046, Україна, м. Харків, вул. Пожарського, 2/10

На основі теорії регуляризації А. М. Тихонова розроблена методика розв'язання обернених задач теплопровідності з ідентифікації гладкої зовнішньої межі двовимірної області за відомих на ній граничних умов. Для цього гладка межа апроксимується кубічними сплайнами Шьонберга, внаслідок чого її ідентифікація зводиться до визначення невідомих коефіцієнтів в цій апроксимації. За відомих граничних і початкових умов температура в тілі буде залежати тільки від цих коефіцієнтів. Виразивши її за формулою Тейлора для двох членів ряду і підставивши в функціонал Тихонова, задачу визначення збільшень коефіцієнтів можна звести до розв’язання системи лінійних рівнянь щодо цих збільшень. Вибравши певний параметр регуляризації і деяку функцію, яка описує форму зовнішньої межі, *як початкове наближення, можна реалізувати ітераційний процес. У цьому процесі вектор невідомих коефіцієнтів для поточної ітерації буде дорівнювати сумі вектора коефіцієнтів з попередньої ітерації і вектора приростів цих коефіцієнтів, отриманих в результаті розв'язання системи лінійних рівнянь. Отримавши вектор коефіцієнтів в результаті збіжного ітераційного процесу, можна визначити середньоквадратичний відхил між одержуваною температурою і температурою, що вимірюється в результаті проведеного експерименту. Залишається підібрати параметр регуляризації таким чином, щоб цей відхил був у межах середньоквадратичної похибки помилки вимірювань. У самій методиці та шляхах її реалізації полягає новизна викладеного у статті матеріалу в порівнянні з підходами інших авторів до розв'язання обернених геометричних задач теплопровідності. Під час перевірки ефективності використання запропонованої методики розв'язано низку двовимірних тестових задач для тіл з відомим розташуванням зовнішньої межі. Проведено аналіз впливу випадкових похибок вимірювань на похибку ідентифікації форми зовнішньої межі.*

Ключові слова: *геометрична обернена задача теплопровідності, метод регуляризації А. М. Тихонова, стабілізуючий функціонал, параметр регуляризації, ідентифікація, апроксимація, кубічні сплайни Шьонберга.*