

УДК 624.074.4:681.3

## ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ОДНОСЛОЙНЫХ ОРЕБРЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

**Г. В. Филатов**, д-р техн. наук[gvmfilatov@gmail.com](mailto:gvmfilatov@gmail.com)

ORCID: 0000-0003-4526-1557

ГВУЗ Украинский  
государственный химико-  
технологический  
университет,  
49005, Украина, г. Днепр,  
пр. Гагарина, 8

*В статье рассматривается применение метода случайного поиска для оптимального проектирования однослойных подкрепленных цилиндрических оболочек, работающих в нейтральной среде. При постановке задачи математического программирования в качестве целевой функции рассматривается минимальный вес оболочки. Критические напряжения определяются по линейной теории в упругой области работы материала. В качестве ограничений, накладываемых на область допускаемых решений, принимаются ограничения: по прочности, общей и частной потери устойчивости оболочки. Целью настоящей работы является исследование весовой эффективности различных типов подкрепления оболочки и их влияния на параметры сжатой в осевом направлении оптимальной в весовом отношении оболочки. Проведен численный эксперимент. Исследовались зависимости веса оболочки, толщины ее стенки, параметров подкрепления от величины сжимающей нагрузки для оболочки с различными типами подкрепления. В результате проведенного численного эксперимента установлено, что с ростом величины сжимающей нагрузки намечается тенденция к увеличению толщины стенки оптимальной оболочки, растет толщина продольных ребер жесткости (стрингеров), количество ребер незначительно уменьшается. Кроме того, следует отметить, что определяющими при выборе оптимальных параметров оболочки оказались общий случай потери устойчивости и первый частный.*

**Ключевые слова:** подкрепленная цилиндрическая оболочка, оптимальное проектирование, случайный поиск.

### Введение

Опыт исследований, проектирования и эксплуатации, показывает, что наиболее рациональными в весовом отношении являются подкрепленные системой ребер тонкостенные оболочки. Несущая способность таких оболочек значительно выше гладких неподкрепленных оболочек с той же толщиной стенки. Однако расчет подкрепленных системой ребер оболочек гораздо сложнее. Критические напряжения, возникающие в оптимальных сжатых подкрепленных цилиндрических оболочках, являются функцией не только параметров обшивки и подкрепления, но и числа полуволн в окружном и меридиональном направлениях, которые образуются при потере устойчивости. В данной работе задача оптимального проектирования подкрепленной оболочки решалась при использовании приближенной зависимости параметров критических напряжений от параметров обшивки и подкрепления. Зона применения уравнений для параметров критических напряжений определялась в результате сравнительных расчетов, которые были выполнены в работе [1]. В отмеченной зависимости путем соответствующих преобразований и гипотез исключались параметры волнообразования.

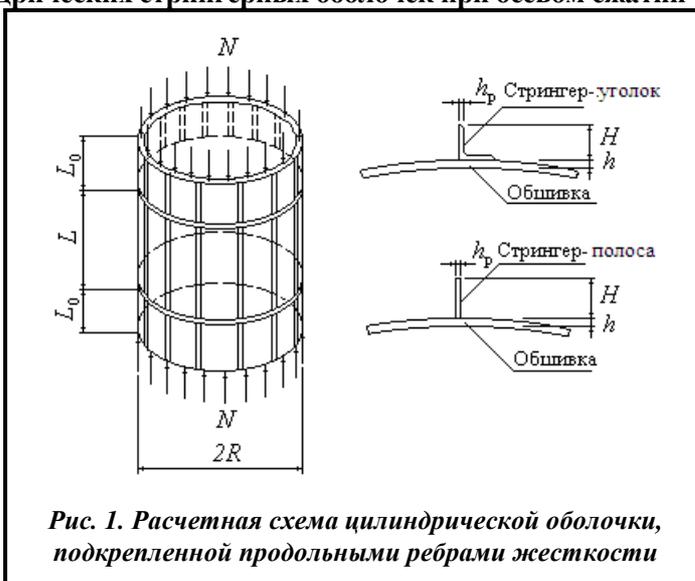
Среди современных методов решения задач оптимального проектирования конструкций, кроме аналитических методов существуют численные вариационные методы поиска экстремума функции многих переменных, метод декомпозиции, генетические методы, построенные на имитации эволюционного процесса при особом акценте на генетические механизмы [2]. Решение, полученное на их основе, субоптимально, но это не мешает применять их для поиска глобальных экстремумов при оптимизации строительных конструкций. В основе этих методов при создании начальной популяции лежит метод Монте Карло. Этим методом, использующим равномерное распределение случайных чисел, экстремум целевой функции можно определить лишь путем перебора бесконечного числа возможных вариантов и можно лишь «прощупать» область допускаемых параметров, но невозможно организовать целенаправленный поиск. В связи с этим при оптимальном проектировании конструкций предлагается применять алгоритмы случайного поиска [3] из класса независимых, например, алгоритм «независимого» глобального поиска с адаптацией распределения проб или из класса блуждающих алгоритмов, таких, например, как алгоритм с направляющей сферой или с направляющим конусом. В данной работе для оптимального проектирования подкрепленной стрингерами оболочки предлагается стохастический алгоритм поиска глобального экстремума функции с управляемыми границами интервала оптимизируемых параметров [4].

Статья доступна по лицензии Creative Commons «Attribution» («Атрибуция») 4.0 Международная.

© Г. В. Филатов, 2021

**Оптимальное проектирование упругих цилиндрических стрингерных оболочек при осевом сжатии**

Рассмотрим шарнирно опертую по краям круговую цилиндрическую оболочку радиуса  $R$  и длиной  $L$ , подкрепленную продольными ребрами жесткости (стрингерами) и сжатую заданной осевой нагрузкой, которая осуществляется в виде равномерно распределенных по торцам оболочки сжимающих напряжений (Рис. 1). Расстояние  $L_0$  – расстояние от торцов оболочки до шпангоутов, при котором характер нагружения практически не сказывается на торцах оболочки. Как отмечалось выше, критические напряжения определяются по линейной теории в упругой области работы материала, характеристики которого: модуль упругости  $E$ , предел пропорциональности  $\sigma_{\text{мп}}$ , коэффициент Пуассона  $\mu$  известны. Стрингеры представляют собой тонкостенные стержни



*Рис. 1. Расчетная схема цилиндрической оболочки, подкрепленной продольными ребрами жесткости*

открытого профиля (в виде прямоугольной полосы или равнобокого уголка), расположенные центрально относительно срединной поверхности оболочки. Требуется найти такие значения толщины обшивки  $h$ , толщины ребер  $h_p$  (высота ребра  $H$  является зависимой величиной и определяется по нормативному значению  $\lambda = \frac{H}{h_p}$ , которое обеспечивает местную устойчивость стрингера), а также число ребер  $k$ , чтобы при заданной нагрузке оболочка имела минимальный объем и одновременно выполнялись условия прочности и устойчивости

Таким образом, нужно найти минимум функции:

$$V = (2\pi R h + F k) L, \tag{1}$$

где  $F$  – площадь поперечного сечения ребра, при таких условиях:

$$(2\pi R h + k F) \sigma_{\text{мп}} \geq N, \tag{2}$$

$$2\pi E \eta h \left( 1 + k \frac{F}{2\pi R h} \right) \geq N. \tag{3}$$

Условие (2) – условие прочности, а условие (3) – ограничение по критической нагрузке потери устойчивости. В работе [5] показано существование нескольких форм потери устойчивости для сжатой оболочки с дискретным расположением ребер. Следуя работе [1], выражения для параметра  $\eta$  получаем для таких случаев:

1) Общий случай потери устойчивости, когда стрингеры изгибаются и закручиваются:

$$\eta_1 = \frac{1}{1 + k \frac{F}{2\pi R h}} \left[ \frac{1}{\sqrt{3(1-\mu^2)}} + \frac{\pi k J}{2h^3 R z} + \frac{k G J_{\text{кр}}}{2\pi R E h^3} \left( \pi \sqrt{12(1-\mu^2)} \frac{1}{z} - \frac{\pi^2}{z} \right) \right], \tag{4}$$

где  $z = \frac{L^2}{R h}$ ;  $J$  и  $J_{\text{кр}}$  – моменты инерции стрингера соответственно при изгибе и кручении.

2) Стрингеры только изгибаются:

$$\eta_2 = \frac{2 \sqrt{\frac{k^5 J}{\pi h R^3}}}{\left( 1 + k \frac{F}{2\pi R h} \right) \sqrt{12(1-\mu^2)}}. \tag{5}$$

3) Стрингеры только закручиваются:

$$\left. \begin{aligned} \eta_3 &= \frac{1}{\sqrt{12(1-\mu^2)}} \left[ 2 + \frac{3C^2 k J_{кр} G(1-\mu^2)}{\pi R E h^3} \right], & \text{если } C \leq 1 \\ \eta_3 &= \frac{1}{\sqrt{12(1-\mu^2)}} \left[ C^2 + \frac{1}{C^2} + \frac{3C^2 k J_{кр} G(1-\mu^2)}{\pi R E h^3} \right], & \text{если } C > 1 \end{aligned} \right\}, \quad (6)$$

где  $C = \frac{2k}{\sqrt{\frac{R}{h} \sqrt[4]{12(1-\mu^2)}}}$ .

Используя обозначения:  $x_1 = h$ ;  $x_2 = h_p$ ;  $x_3 = k$ ;  $A_1 = 2\pi RL$ ;  $A_2 = L(2\lambda - 1)$ ;  $A_3 = L\lambda$ ;  
 $B_1 = \frac{2\pi R \sigma_{\text{мн}}}{N}$ ;  $B_2 = \frac{\sigma_{\text{мн}}}{N} (2\lambda - 1)$ ;  $B_3 = \frac{\sigma_{\text{мн}}}{N} \lambda$ ;  $D_1 = \frac{2\pi E}{N}$ ;  $D_2 = \frac{2\lambda - 1}{2\pi R}$ ;  $D_3 = \frac{\lambda}{2\pi R}$ ;  $D_4 = \frac{1}{\sqrt{3(1-\mu^2)}}$ ;  
 $D_5 = \frac{1,1\pi D_2}{3L\varphi(1+\mu)}$ ;  $D_6 = \frac{\pi}{L^2 D_5} \left[ \frac{\lambda^2(1-\lambda)}{10} - \frac{2\lambda-1}{12(1+\mu)} \right]$ ;  $D_7 = \frac{1\pi D_3}{3L\varphi(1+\mu)}$ ;  $D_8 = \frac{\pi \lambda^3 E}{24L^2 D_7}$ ;  $D_9 = \frac{2}{\sqrt{12(1-\mu^2)}}$ ;  
 $D_{10} = \frac{\lambda^2(\lambda-1)}{5\pi R^3}$ ;  $D_{11} = 2D_2$ ;  $D_{12} = \frac{1,1D_2 \sqrt{12(1-\mu^2)}}{6R(1+\mu)}$ ;  $D_{13} = \frac{R}{8}$ ;  $D_{14} = 2\varphi^4$ ;  $D_{15} = \frac{3D_2}{R^2(1+\mu)}$ ;  $D_{16} = \frac{\lambda^2 D_3}{6R^2}$ ;  
 $D_{17} = 2D_3$ ;  $D_{18} = \frac{D_3 \sqrt{12(1-\mu^2)}}{6R(1+\mu)}$ ;  $D_{19} = \frac{3D_3}{R^2(1+\mu)}$ ;  $\varphi = \frac{2}{\sqrt{R} \sqrt[4]{12(1-\mu^2)}}$  и, подставляя их в выражения

(1)–(6), получаем две задачи (соответственно для подкрепления в виде уголка и подкрепления в виде полосы) частично целочисленного нелинейного программирования ( $x_3$  может принимать только целые значения).

А. Стрингеры в виде равнобоких уголков. Требуется найти неотрицательные значения  $x_1, x_2$  и  $x_3$ , которые минимизируют функцию:

$$V = A_1 x_1 + A_2 x_2^2 x_3 \quad (7)$$

и удовлетворяют ограничениям:

$$B_1 x_1 + B_2 x_2^2 x_3 \geq 1, \quad (8)$$

$$\eta D_1 x_1^2 \left( 1 + D_2 \frac{x_2^2 x_3}{x_1} \right) \geq 1. \quad (9)$$

Величина  $\eta$  является наименьшей из следующих значений:

$$1) \eta_1 = \frac{1}{1 + D_2 \frac{x_2^2 x_3}{x_1}} \left[ D_4 + D_5 \frac{x_2^4 x_3}{x_1^2} \left( D_6 + \frac{1}{\sqrt{x_1}} \right) \right];$$

$$2) \eta_2 = D_9 \frac{\sqrt{D_{10} \frac{x_2^4 x_3^5}{x_1} + 1}}{1 + D_{11} \frac{x_2^2 x_3}{x_1}};$$

$$3) \eta_3 = \begin{cases} D_9 \left( 1 + D_{12} \frac{x_2^4 x_3^3}{x_1^2} \right), & \text{если } C \leq 1 \\ \frac{D_{12}}{x_1 x_3^2} \left( 2 + D_{14} x_1^2 x_3^4 + D_{15} \frac{x_2^4 x_3^5}{x_1} \right), & \text{если } C > 1, \end{cases}$$

где  $C = \varphi x_3 \sqrt{x_1}$ .

Б. Стрингеры в виде прямоугольной полосы. Найти неотрицательные значения  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$ , минимизирующие функцию:

$$V = A_1x_1 + A_3x_2^2x_3 \quad (10)$$

и удовлетворяющие ограничениям:

$$B_1x_1 + B_3x_2^2x_3 \geq 1, \quad (11)$$

$$\eta D_1x_1^2 \left( 1 + D_3 \frac{x_2^2x_3}{x_1} \right) \geq 1, \quad (12)$$

где  $\eta$  также берется наименьшим из следующих значений:

$$1) \eta_1 = \frac{1}{1 + D_3 \frac{x_2^2x_3}{x_1}} \left[ D_4 + D_7 \frac{x_2^4x_3}{x_1^2} \left( D_8 + \frac{1}{\sqrt{x_1}} \right) \right];$$

$$2) \eta_2 = D_9 \frac{\sqrt{D_{16} \frac{x_2^4x_3^5}{x_1} + 1}}{1 + D_{17} \frac{x_2^2x_3}{x_1}};$$

$$3) \eta_3 = \begin{cases} D_9 \left( 1 + D_{18} \frac{x_2^4x_3^3}{x_1^2} \right), & \text{если } C \leq 1 \\ \frac{D_{13}}{x_1x_3^2} \left( 2 + D_{14}x_1^2x_3^4 + D_{19} \frac{x_2^4x_3^5}{x_1} \right), & \text{если } C > 1. \end{cases}$$

Поставленная задача (7)–(12) решалась с применением стохастического метода поиска глобального экстремума функции с управляемыми границами интервала оптимизируемых параметров [4].

Для иллюстрации рассматривалась задача отыскания оптимальных параметров цилиндрической стрингерной оболочки при таких данных:  $R=0,5$  м;  $L=0,387$  м;  $E=6,87 \cdot 10^4$  МПа;  $\sigma_{\text{тн}}=148$  МПа;  $N=264$  кН;  $\lambda=16,34$ . Стрингеры были изготовлены: а) из равнобоких уголков, б) из прямоугольной полосы. Ограничения на варьируемые параметры выбирались следующие (в м):  $0,0001 \leq h \leq 0,001$ ;  $0,001 \leq h_p \leq 0,005$ ,  $4 \leq k \leq 50$  (шт.). Учитывался целочисленный характер переменной  $k$  (число ребер).

Результаты решения приведены в таблице 1.

В таблице 1 дано сравнение результатов, полученных в данной работе, с результатами, приведенными в работе [1], где для подкрепления был использован равнобокий уголок, а в качестве критерия оптимальности принималось наибольшее отношение  $\frac{N_p}{N}$ , где  $N_p$ ,  $N$  – критические силы соответственно для ребристой и гладкой оболочки одинаковой площади поперечного сечения.

**Таблица 1. Результаты оптимального проектирования подкрепленной стрингерами оболочки**

Метод решения	Вид подкрепления	Объем оболочки $V$ , см <sup>3</sup>	Оптимальные параметры			Параметры критического напряжения		
			$h$ , мм	$h_p$ , мм	$k$ , шт.	$\eta_1$	$\eta_2$	$\eta_3$
Случайный поиск	Стрингер-полоса	691,0	0,28	1,26	34	4,99	3,805	3,860
Случайный поиск	Стрингер уголок	917,0	0,35	1,24	26	2,35	2,360	2,518
По данным работы [1]	Стрингер уголок	1006,0	0,39	1,27	27	2,97	3,820	2,774

Сравнение результатов, полученных методом случайного поиска, и результатов, приведенных в работе [1], позволяет сделать вывод, что метод случайного поиска позволяет более эффективно проектировать подкрепленные цилиндрические оболочки, экономия материала при этом достигает 10%. Зна-

чительный интерес приобретает также сравнение параметров критических напряжений, полученных в работе [1], и полученных методом случайного поиска. Согласно работе [1] наиболее опасным является частный случай потери устойчивости, когда стрингеры только закручиваются. Метод случайного поиска дает несколько иную картину – наиболее опасным является общий случай потери устойчивости. При этом параметры критических напряжений для всех трех случаев потери устойчивости, полученных методом случайного поиска, имеет более низкие значения по сравнению с наименьшим значением параметра  $\eta$  в работе [1]. Последнее обстоятельство достаточно существенно с точки зрения более полного использования материала в подкрепленной оболочке.

Определенный интерес вызывает сравнение эффективности оптимального подкрепления в виде уголка и в виде полосы. Для подкрепления в виде стрингера-полосы определяющими являются частные случаи потери устойчивости. При этом толщина стенки оболочки уменьшается, а число стрингеров увеличивается по сравнению со случаем подкрепления в виде уголка. Вес оболочки с подкреплением в виде уголка значительно выше веса оболочки, подкрепленной продольными ребрами в виде полосы.

В этой связи были выполнены исследования поведения параметров оболочки при изменении величины осевой сжимающей силы  $N$ . Так, принимая значение  $N=264$  кН за  $N_0=1$ , будем нагружать оболочку последовательно силами, имеющими безразмерную величину  $N_0=0,5 \dots 4,0$ , для двух случаев подкрепления: а) в форме стрингера–уголка и б) в форме стрингера-полосы.

В таблицах 2 и 3 приведены значения оптимальных параметров оболочки, объемы, параметры критических напряжений, значения критических и нормальных напряжений, полученных для упомянутых выше значений сжимающей силы.

**Таблица 2. Результаты оптимизации параметров оболочки с подкреплением в виде уголка при разных значениях сжимающей силы**

$N_0$	$V, \text{ см}^3$	$h, \text{ мм}$	$h_p, \text{ мм}$	$k, \text{ шт.}$	$\eta_1$	$\eta_2$	$\eta_3$	$\sigma_{кр}, \text{ МПа}$	$\sigma_{н}, \text{ МПа}$
0,5	674,7	0,160	1,00	39	4,203	3,496	13,40	76,7	73,0
0,6	698,3	0,180	1,00	39	3,640	3,620	10,80	90,5	87,5
0,8	793,7	0,196	1,06	40	3,870	3,970	12,71	102,3	98,0
1,0	917,6	0,351	1,24	26	2,350	2,360	2,51	120,6	123,0
1,2	969,0	0,297	1,24	32	3,130	3,270	5,65	124,0	127,0
1,4	1043,0	0,312	1,30	32	3,700	3,640	8,27	157,0	137,0
2,0	1380,0	0,411	1,55	34	5,130	4,000	13,83	170,0	145,0
3,0	2071,0	0,401	2,22	26	8,330	3,140	15,48	173,0	147,0
4,0	2758,0	0,482	2,83	22	11,470	2,720	17,29	180,0	148,0

**Таблица 3. Результаты оптимизации параметров оболочки с подкреплением в виде полосы при разных значениях сжимающей силы**

$N_0$	$V, \text{ см}^3$	$h, \text{ мм}$	$h_p, \text{ мм}$	$k, \text{ шт.}$	$\eta_1$	$\eta_2$	$\eta_3$	$\sigma_{кр}, \text{ МПа}$	$\sigma_{н}, \text{ МПа}$
0,5	479,0	0,171	1,00	43	5,970	4,550	7,740	107,0	107,0
0,6	502,0	0,174	1,00	46	5,870	5,152	9,038	123,0	122,0
0,8	573,0	0,226	1,07	41	4,761	4,613	5,264	143,0	143,0
1,0	691,0	0,286	1,26	34	4,990	3,805	3,860	147,0	147,5
1,2	830,0	0,325	1,24	45	4,390	6,388	5,303	196,0	147,5
1,4	966,0	0,198	1,63	43	17,440	5,807	38,570	158,0	148,0
2,0	1382,0	0,509	2,46	20	10,930	2,456	3,550	172,0	147,5
3,0	2068,0	0,359	3,28	24	39,310	3,354	33,200	165,0	148,0
4,0	2763,0	0,416	4,34	19	60,810	2,594	37,320	143,0	148,0

На рис. 2, а показана зависимость объема оболочки от величины сжимающей силы для подкрепления в виде уголка и подкрепления в виде полосы. Хорошо видно, что при небольшой нагрузке, оболочка, подкрепленная стрингерами в виде полосы, легче, чем оболочка, подкрепленная стрингерами в виде уголка. В дальнейшем с ростом нагрузки эта разница в весе исчезает.

На рис. 2, б приведены графики изменения толщины стрингеров в виде полосы и в виде уголка в зависимости от величины нагрузки  $N_0$ .

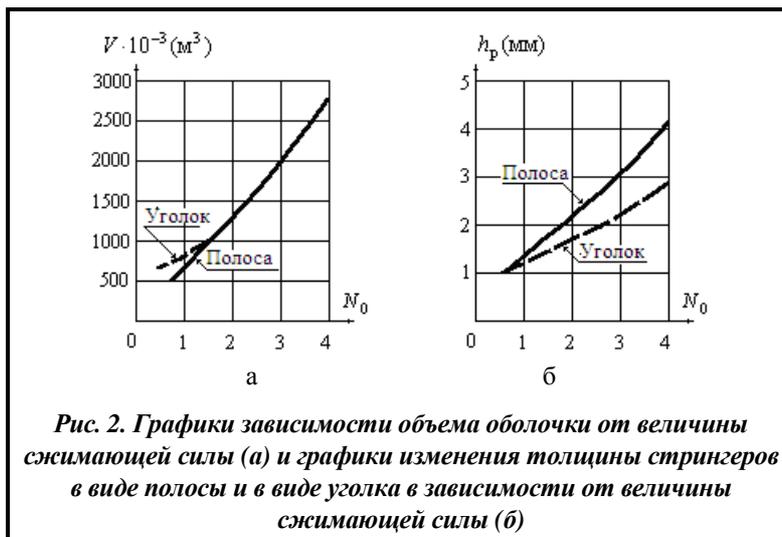


Рис. 2. Графики зависимости объема оболочки от величины сжимающей силы (а) и графики изменения толщины стрингеров в виде полосы и в виде уголка в зависимости от величины сжимающей силы (б)

### Выводы

1. Применение метода случайного поиска к оптимальному проектированию оребренной оболочки позволило снизить ее массу на 10%.
2. Установлено, что параметры критического напряжения для всех трех случаев потери устойчивости, полученных методом случайного поиска, имеют более низкие значения в сравнении с наименьшими значениями параметра  $\eta$  в работе [1].
3. Сравнение эффективности оптимального подкрепления в виде уголка и в виде полосы, позволяет сделать вывод, что подкрепление в виде стрингера-уголка является менее эффективным, чем подкрепление в виде полосы. Вес оболочки с подкреплением в виде уголка значительно выше, чем вес оболочки, подкрепленной продольными ребрами в виде полосы.
4. Исследование влияния изменения величины осевой сжимающей силы на поведение параметров оболочки позволяет сделать вывод, что с увеличением сжимающей силы: растет толщина стенки оптимальной оболочки, увеличивается толщина стрингеров при незначительном уменьшении их количества, объем оболочки растет, но при небольшой нагрузке ( $N_0=0,5\dots 0,8$ ) объем оболочки, подкрепленной стрингером-уголком, является больше объема, полученного при той же нагрузке для оболочки, подкрепленной стрингером-полосой. При увеличении нагрузки объемы оболочки для обоих случаев подкрепления выравниваются. Следует отметить, что определяющими при выборе оптимальных параметров оболочки оказались общий случай потери устойчивости и первый частный.

### Литература

1. Пальчевский А. С. Расчет цилиндрических стрингерных оболочек минимального веса при осевом сжатии. *Прикл. механика*. 1966. Т. 11. Вып. 9. С. 65–71.
2. Riedel J. Genetik als alternative Optimierungsstrategien 4. Institutskolloquium, Bauhaus – Universität Weimar: Bericht 3/98, Institut für Strukturmechanik. – Weimar: Bauhaus – Universität, 1998. P. 19–33.
3. Растрингин Д. А. Статистические методы поиска. М.: Наука, 1968. 376 с.
4. Филатов Г. В. Стохастический метод поиска глобального экстремума функции с управляемыми границами интервала оптимизируемых параметров. *Вопр. химии и химич. технологии*. 2000. № 1. С. 334–338.
5. Аміро І. Я. Дослідження стійкості ребристої циліндричної оболонки при поздовжньому тиску. *Прикл. механіка*. 1960. Т. IV. Вип. 3. С. 16–23.

Поступила в редакцию 23.03.2020

**Оптимальне проектування одношарових ребрених циліндричних оболонок****Г. В. Філатов**ДВНЗ Український державний хіміко-технологічний університет,  
49005, Україна, м. Дніпро, пр. Гагаріна, 8

*У статті розглядається застосування методу випадкового пошуку для оптимального проектування одношарових підкріплених циліндричних оболонок, що працюють в нейтральному середовищі. Під час постановки задачі математичного програмування як цільова функція розглядається мінімальна вага оболонки. Критичні напруження визначаються за лінійною теорією у пружній зоні роботи матеріалу. Як обмеження, що накладаються на зону допустимих розв'язків, приймаються обмеження: з міцності, загальної і окремої втрати стійкості оболонки. Метою цієї роботи є дослідження вагової ефективності різних типів підкріплення оболонки і їхнього впливу на параметри стиснутої в осьовому напрямку оптимальної у ваговому відношенні оболонки. Проведено числовий експеримент. Досліджувалися залежності ваги оболонки, товщини її стінки, параметрів підкріплення від величини стискаючого навантаження для оболонки з різними типами підкріплення. Внаслідок проведеного числового експерименту встановлено, що зі збільшенням величини стискаючого навантаження намічається тенденція до збільшення товщини стінки оптимальної оболонки, зростає товщина поздовжніх ребер жорсткості (стрингерів), кількість ребер незначно зменшується. Крім того, слід зазначити, що визначальними під час вибору оптимальних параметрів оболонки виявилися загальний випадок втрати стійкості і перший окремий.*

**Ключові слова:** підкріплена циліндрична оболонка, оптимальне проектування, випадковий пошук.