

УДК 539.3

## ПОТЕРЯ СТАТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПРЕДНАГРУЖЕННОЙ СОСТАВНОЙ НАНОКОМПОЗИТНОЙ ОБОЛОЧКИ

**К. В. Аврамов,**

д-р техн. наук

[kvavramov@gmail.com](mailto:kvavramov@gmail.com)

ORCID: 0000-0002-8740-693X

**Н. Г. Сахно**[natali.sahno@gmail.com](mailto:natali.sahno@gmail.com)

ORCID: 0000-0003-4179-5316

**Б. В. Успенский,**

канд. техн. наук

[Uspensky.kubes@gmail.com](mailto:Uspensky.kubes@gmail.com)

ORCID: 0000-0001-6360-7430

Институт проблем  
машиностроения  
им. А. Н. Подгорного  
НАН Украины,  
61046, Украина, г. Харьков,  
ул. Пожарского, 2/10

*В статье описывается методика анализа явления потери статической устойчивости преднагруженной нанокompозитной составной оболочки. Большинство работ, посвященных анализу составных конструкций, рассматривает вибрационные процессы, тогда как явление потери устойчивости может быть важным фактором, ограничивающим использование новых материалов в ракетно-космической технике. Рассматривается нанокompозитная оболочка постоянной толщины, состоящая из двух сферических крышек и цилиндрического корпуса, на которую действует внутреннее давление и осевая сжимающая сила. Эта оболочка моделирует топливный бак ракеты-носителя. Исследуются условия, при которых оболочка деформируется несимметрично, теряя статическую устойчивость. Предложена методика, позволяющая разделить задачу на анализ преднагруженного состояния оболочки и анализ потери устойчивости. Дальнейший анализ осуществляется с помощью методики, основанной на сдвиговой теории высокого порядка и методе Рунца. Производится дискретизация задачи путем представления переменных, определяющих состояние оболочки, в форме разложения по базисным функциям с неизвестными коэффициентами. Таким образом, неизвестными задачи становятся коэффициенты разложения. Задача анализа преднапряженного состояния конструкции сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения. Задача анализа потери устойчивости может быть сведена к задаче собственных значений. Решение этой задачи позволяет найти минимальное значение сжимающей нагрузки, при котором оболочка теряет устойчивость, а также формы потери устойчивости. Результаты применения разработанной методики сравнивались с результатами конечно-элементного моделирования на конструкции из простейшего нанокompозитного материала. Результаты сравнения свидетельствуют о высокой точности описанной методики. При этом использование метода конечных элементов для анализа масштабных тонкостенных конструкций из функционально-градиентных материалов чрезвычайно затруднительно, в отличие от предложенной в статье методики. Сравнение различных видов армирования показало, что рациональный выбор типа армирования может существенно повысить критическую нагрузку. При этом на критическую нагрузку также существенно влияет внутреннее давление на оболочку.*

**Ключевые слова:** статическая неустойчивость, составная оболочка, нанокompозитный материал, углеродные нанотрубки, метод Рунца.

### Введение

Современные материалы нашли широкое применение в аэрокосмической отрасли. Использование углеродных нанотрубок (УНТ) в качестве армирующего агента позволяет получать материалы с высокой удельной жесткостью и прочностью по сравнению с базовым материалом (матрицей) [1].

Задача анализа потери статической устойчивости нанокompозитными оболочками решалась в работах [2–13]. Потеря устойчивости цилиндрическими оболочками исследовалась в [5–8, 10–13]. В этих работах рассматривается продольное сжатие оболочки в сочетании с температурным и электромагнитным нагружением. Также в [12] рассмотрена потеря устойчивости предварительно нагруженной оболочки.

Большая часть тонкостенных конструкций, используемых в аэрокосмической отрасли, являются составными. Анализ таких конструкций в научной литературе в основном ограничивается вибрационным анализом и задачами динамики. Так, в [14] построены уравнения движения для конико-цилиндрической оболочки. Конструкции, полученные в результате комбинации сферических и цилиндрических оболочек, рассмотрены в [15, 16]. Здесь задача ограничивается анализом свободных колебаний конструкции. Анализ вибрационной динамики конико-цилиндрических оболочек приведен в [17–19].

Статья доступна по лицензии Creative Commons «Attribution» («Атрибуция») 4.0 Международная.

© К. В. Аврамов, Н. Г. Сахно, Б. В. Успенский, 2021

Большинство работ, посвящённых анализу составных конструкций, рассматривает вибрационные процессы, тогда как явление потери устойчивости может быть важным фактором, ограничивающим использование новых материалов в ракетно-космической технике.

В данной работе рассматривается потеря статической устойчивости составной нанокompозитной конструкцией, находящейся под действием внутреннего давления и внешней осевой нагрузки. Предложена методика определения критической осевой нагрузки на оболочку, основанная на методе Ритца.

### Постановка задачи

Рассматривается напряжённо-деформированное состояние (НДС) тонкостенной конструкции постоянной толщины  $h$  (рис. 1), состоящей из двух сферических крышек и цилиндрического корпуса длиной  $L$ . Такая геометрическая модель используется для представления топливных баков ракет-носителей. В данной работе для упрощения изложения рассматривается симметричная конструкция. Тем не менее, не потребуются никаких принципиальных изменений в изложенной методике для анализа несимметричной конструкции. Радиус крышек обозначим как  $R_s$ , а радиус цилиндра –  $R_c \leq R_s$ . Далее сферические крышки и цилиндрический корпус будем называть геометрическими примитивами. В точке их сопряжения угол между касательной к сфере в плоскости оси конструкции и стенкой цилиндра составляет  $\alpha$ .

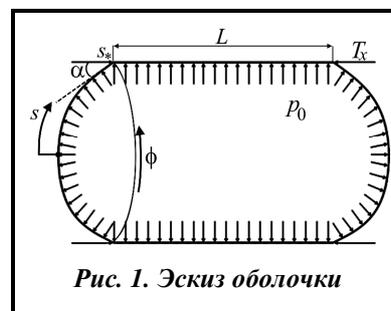


Рис. 1. Эскиз оболочки

Положение точки в оболочке описывается связанной системой координат  $(s, \phi, z)$ : координата  $s$  (рис. 1) направлена вдоль образующей оболочки из полюса одной из крышек; угловая координата  $\phi$  отмеряется в плоскости, перпендикулярной оси оболочки против часовой стрелки; координата  $z$  направлена по нормали к срединной поверхности оболочки.

Конструкция выполнена из нанокompозитного материала, который представляет собой полимер PmPV, армированный направленными нанотрубками вдоль образующей.

На конструкцию действуют два вида нагрузки: внутреннее давление топлива  $p_0$ , равномерно распределённое по поверхности оболочки, и сдвигающая осевая нагрузка  $T_x$ , равномерно приложенная к контуру сопряжения крышек и корпуса. Ставится задача поиска минимальной осевой нагрузки, которая приводит к потере статической устойчивости заданной конструкции при заданном внутреннем давлении. Таким образом, давление  $p_0$  выступает в роли предварительного нагружения в рамках анализа статической устойчивости.

### Свойства материала

Нанокompозитный материал (нанокompозит) представляет собой матрицу, обычно изотропную, армированную УНТ. В данной работе рассматривается нанокompозитный материал, армированный УНТ, направленными вдоль образующей оболочки вращения. Определение характеристик такого материала подробно описано в научной литературе [20, 21]. Нанокompозит является ортотропным материалом, свойства которого могут меняться в зависимости от координаты  $z$  оболочки. Наиболее часто встречаются следующие типы нанокompозитов: UD, FGX, FGO, FGV, FGA. Зависимость объёмного содержания УНТ от координаты  $z$  в этих материалах показана на рис. 2.

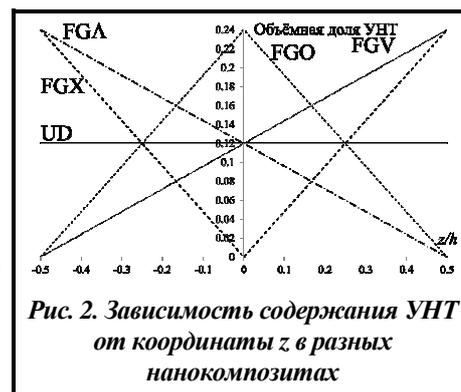


Рис. 2. Зависимость содержания УНТ от координаты  $z$  в разных нанокompозитах

### Метод решения

Проблема потери статической устойчивости составной тонкостенной конструкцией решается в четыре этапа:

- вывод выражений для потенциальной энергии геометрических примитивов конструкции;
- обеспечение непрерывности перемещений на стыках геометрических примитивов;
- применение вариационного подхода для оценки НДС конструкции под действием внутреннего давления;
- расчёт критических продольных нагрузок.

**Модель конструкции**

Деформирование оболочки описывается с помощью сдвиговой теории высокого порядка [22, 23], в которой перемещения произвольной точки оболочки представлены следующими выражениями:

$$u_1 = \left(1 + \frac{z}{R_1}\right)u + z\phi_1 + z^2\psi_1 + z^3\gamma_1; \quad u_2 = \left(1 + \frac{z}{R_2}\right)v + z\phi_2 + z^2\psi_2 + z^3\gamma_2; \quad u_3 = w,$$

где  $u_1, u_2, u_3$  – проекции перемещений произвольной точки оболочки на связанные координатные оси;  $R_1, R_2$  – радиусы кривизны срединной поверхности недеформированной оболочки вдоль соответствующих связанных осей;  $z$  – расстояние от произвольной точки оболочки до срединной поверхности;  $\psi_i, \gamma_i$ ;  $i = 1, 2$  – неизвестные функции, которые подлежат определению. Для определения этих функций используются следующие граничные условия [22]:

$$\gamma_{13}|_{z=\mp 0.5h} = 0; \quad \gamma_{23}|_{z=\mp 0.5h} = 0,$$

где  $\gamma_{13}, \gamma_{23}$  – напряжения сдвига. Таким образом, НДС оболочки описывается пятью независимыми функциями:  $u, \phi_1, v, \phi_2, w$ .

Условия непрерывности перемещений точек оболочки на стыках геометрических примитивов  $s = s_*$  и  $s = s_* + L = L_1$  таковы:

$$\begin{aligned} w^{(2)}|_{s=s_*+0} &= w^{(1)}|_{s=s_*-0} \cos(\alpha) + u^{(1)}|_{s=s_*-0} \sin(\alpha); & u^{(2)}|_{s=s_*+0} &= u^{(1)}|_{s=s_*-0} \cos(\alpha) - w^{(1)}|_{s=s_*-0} \sin(\alpha); \\ v^{(2)}|_{s=s_*+0} &= v^{(1)}|_{s=s_*-0}; & \phi_1^{(2)}|_{s=s_*+0} &= \phi_1^{(1)}|_{s=s_*-0}; & \phi_2^{(2)}|_{s=s_*+0} &= \phi_2^{(1)}|_{s=s_*-0} \cos(\alpha); \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} w^{(2)}|_{s=L_1-0} &= w^{(3)}|_{s=L_1+0} \cos(\alpha) + u^{(3)}|_{s=L_1+0} \sin(\alpha); & u^{(2)}|_{s=L_1-0} &= w^{(3)}|_{s=L_1+0} \sin(\alpha) - u^{(3)}|_{s=L_1+0} \cos(\alpha); \\ v^{(2)}|_{s=L_1-0} &= -v^{(3)}|_{s=L_1+0}; & \phi_1^{(2)}|_{s=L_1-0} &= -\phi_1^{(3)}|_{s=L_1+0}; & \phi_2^{(2)}|_{s=L_1-0} &= -\phi_2^{(3)}|_{s=L_1+0} \cos(\alpha), \end{aligned} \quad (2)$$

где функции с верхним индексом <sup>(1)</sup> и <sup>(3)</sup> соответствуют перемещениям и углам поворота нормали на сферических частях конструкции; <sup>(2)</sup> соответствует цилиндрической части конструкции.

**Модель НДС конструкции**

Анализ деформирования конструкции производится методом Ритца. Строится потенциальная энергия оболочки в предположении, что перемещения оболочки вследствие потери статической устойчивости значительно ниже, чем таковые перемещения вследствие действия внутреннего давления. Тогда эти перемещения могут рассматриваться как независимые величины, подобно подходу, используемому в методе многих масштабов

$$u = u_0 + \mu u_1; \quad v = v_0 + \mu v_1; \quad w = w_0 + \mu w_1; \quad \phi_1 = \phi_{1,0} + \mu \phi_{1,1}; \quad \phi_2 = \phi_{2,0} + \mu \phi_{2,1},$$

где  $\mu$  – малый параметр;  $u_0, v_0, w_0, \phi_{1,0}, \phi_{2,0}$  – перемещения и углы поворота нормали при осесимметричном НДС вследствие действия внутреннего давления;  $u_1, v_1, w_1, \phi_{1,1}, \phi_{2,1}$  – перемещения и углы поворота нормали при осесимметричном НДС вследствие потери устойчивости оболочки. Такой подход позволяет разделить явления статического деформирования оболочки и её статической неустойчивости.

Для анализа НДС оболочки её модель дискретизируется. Для этого перемещения конструкции представляются в виде разложения по базисным функциям, а коэффициенты разложений являются искомыми параметрами, определяющими НДС. Базисные функции выбираются такими, чтобы удовлетворяли условиям непрерывности перемещений (1), (2).

**Анализ осесимметричного НДС**

Анализ осесимметричного НДС оболочки вследствие действия внутреннего давления сводится к минимизации потенциальной энергии по коэффициентам разложений. Поскольку потенциальная энергия является квадратичной формой относительно переменных  $u_0, v_0, w_0, \phi_{1,0}, \phi_{2,0}$ , её локальный экстремум соответствует её минимуму. Таким образом, осесимметричное НДС конструкции может быть определено из системы линейных алгебраических уравнений

$$\frac{\partial \Pi^{(0)}}{\partial A_i} = 0, i = 1, \dots, N_\Omega,$$

где  $\Pi^{(0)}$  – потенциальная энергия конструкции при осесимметричном деформировании;  $A_i$  – коэффициенты разложений переменных  $u_0, v_0, w_0, \phi_{1,0}, \phi_{2,0}$  по заданному базису;  $N_\Omega$  – общее число коэффициентов разложений. Следует заметить, что при осесимметричном НДС  $v_0 \equiv 0; \phi_{2,0} \equiv 0$ . Таким образом, неизвестные коэффициенты следует искать только для переменных  $u_0, w_0, \phi_{1,0}$ .

**Анализ потери статической устойчивости**

Под действием осевой нагрузки цилиндрическая оболочка может потерять устойчивость, что приводит к неосесимметричному деформированию и внезапной потере жёсткости конструкцией [11]. Анализ неосесимметричного НДС вследствие потери оболочки статической устойчивости при действии на неё осевых сил  $T_x$  также начинается с дискретизации системы. Переменные  $u_1, v_1, w_1, \phi_{1,1}, \phi_{2,1}$  представляются в виде разложений по базисным функциям

$$w_1 = \sum_{i=1}^{L_w} B_i R_i^{(w)}(s) \cos(n\phi); w_1 = \sum_{i=1}^{L_u} B_{L_w+i} R_i^{(u)}(s) \cos(n\phi);$$

$$v_1 = \sum_{i=1}^{L_v} B_{L_w+L_u+i} R_i^{(v)}(s) \sin(n\phi); \phi_{1,1} = \sum_{i=1}^{L_x} B_{L_w+L_u+L_v+i} R_i^{(X)}(s) \cos(n\phi); \phi_{2,1} = \sum_{i=1}^{L_y} B_{L_w+L_u+L_v+L_x+i} R_i^{(Y)}(s) \cos(n\phi),$$

где  $R_i^{(w)}, R_i^{(u)}, R_i^{(v)}, R_i^{(X)}, R_i^{(Y)}, i = 1, 2, \dots$  – базисные функции, удовлетворяющие условиям (1), (2);  $(B_1, B_2, \dots, B_M), M = L_w + L_u + L_v + L_x + L_y$  – вектор неизвестных коэффициентов разложений.

Потенциальная энергия системы имеет вид

$$E_\Sigma = \Pi_\Sigma - V_\Sigma; \tag{3}$$

$$V_\Sigma = \frac{T_x}{2} \int_0^L dx \int_0^{2\pi} \left( \left( \frac{\partial w_1^{(2)}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_1^{(2)}}{\partial x} \right)^2 \right) R_c d\phi,$$

где  $\Pi_\Sigma$  – потенциальная энергия оболочки;  $V_\Sigma$  – потенциальная энергия осевой нагрузки  $T_x$  [24]. Положение равновесия системы характеризуется минимумом потенциальной энергии (3), что позволяет сформулировать однородную систему линейных алгебраических уравнений  $\frac{\partial E_\Sigma}{\partial B_i} = 0; i = 1, \dots, M$ , кото-

рая даёт возможность построить задачу собственных значений в виде

$$\begin{bmatrix} K_{11} & \dots & K_{15} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{51} & \dots & K_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_w \\ B_u \\ B_v \\ B_X \\ B_Y \end{bmatrix} = T_x \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} & V_{13} & 0 & 0 \\ V_{21} & V_{22} & V_{23} & 0 & 0 \\ V_{31} & V_{32} & V_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_w \\ B_u \\ B_v \\ B_X \\ B_Y \end{bmatrix}, \tag{4}$$

где  $K_{11}, \dots, K_{55}, V_{11}, \dots, V_{33}$  являются матрицами. Вектор коэффициентов представлен в матричной форме  $(B_1, \dots, B_M) = [B_w B_u B_v B_X B_Y]$ . Поскольку матрица в правой части (4) является вырожденной, задачу собственных значений нельзя решить в форме (4). Это связано с тем, что параметры  $B_w, B_u, B_v$  являются линейно-зависимыми от параметров  $B_X, B_Y$ . Для поиска этой зависимости рассмотрим последние две строки уравнения (4)

$$\begin{bmatrix} K_{41} & K_{42} & K_{43} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_w \\ B_u \\ B_v \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} K_{44} & K_{45} \\ K_{54} & K_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_X \\ B_Y \end{bmatrix}.$$

Таким образом, 
$$\begin{bmatrix} B_x \\ B_y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} K_{44} & K_{45} \\ K_{54} & K_{55} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} K_{41} & K_{42} & K_{43} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_w \\ B_u \\ B_v \end{bmatrix}.$$

Подстановка этого соотношения в первые три строки (4) позволяет построить корректную проблему собственных значений

$$[\Gamma] \begin{bmatrix} B_w \\ B_u \\ B_v \end{bmatrix} = T_x \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} & V_{13} \\ V_{21} & V_{22} & V_{23} \\ V_{31} & V_{32} & V_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_w \\ B_u \\ B_v \end{bmatrix},$$

где 
$$[\Gamma] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_{14} & K_{15} \\ K_{24} & K_{25} \\ K_{34} & K_{35} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{44} & K_{45} \\ K_{54} & K_{55} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} K_{41} & K_{42} & K_{43} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} \end{bmatrix}$$

Из этой задачи собственных значений определяются критические осевые нагрузки и формы потери устойчивости.

### Результаты

Был проведен анализ потери статической устойчивости нанокompозитной оболочки (рис. 3).

Параметры конструкции следующие:  $R_s = R_c = 0.25$  м;  $h = 5$  мм;  $L = 1$  м;  $\alpha = 0^\circ$ . Исследовалась зависимость критического давления от вида наноармирования и значения внутреннего давления.

Проводилось сравнение с результатами расчёта критического давления на конструкцию, полученными с помощью пакета ANSYS для UD нанокompозита. Результаты расчётов приведены на рис. 4.

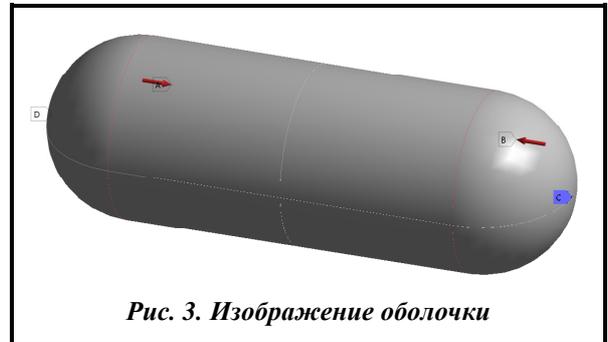


Рис. 3. Изображение оболочки

Сплошной линией показаны результаты расчётов разработанной методикой, маркерами – результаты конечно-элементного анализа. Числа 0,28, 0,17, 0,12 указывают на результаты, соответствующие этим объёмным долям нанотрубок в материале.

Результаты расчётов разработанной методикой и методом конечных элементов близки (рис. 4).

Зависимость критического давления от типа нанокompозита и внутреннего давления для композитов с объёмной долей нанотрубок, составляющей 0,28, приведена на рис. 5. Видно, что тип нанокompозита может существенно (до 1,5 раз) повлиять на критическое давление; при этом вид зависимости критического давления от внутреннего остаётся практически неизменным.

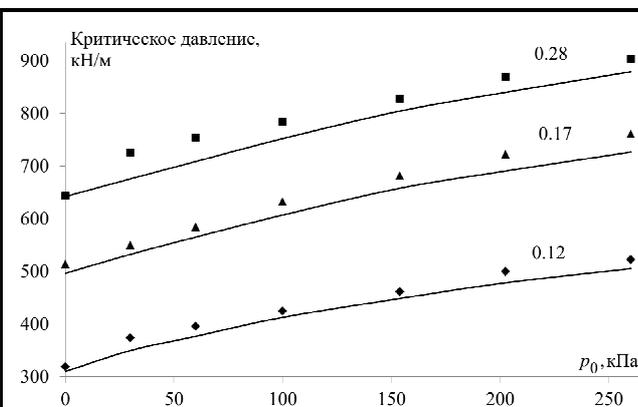


Рис. 4. Сравнение разработанного и конечно-элементного методов

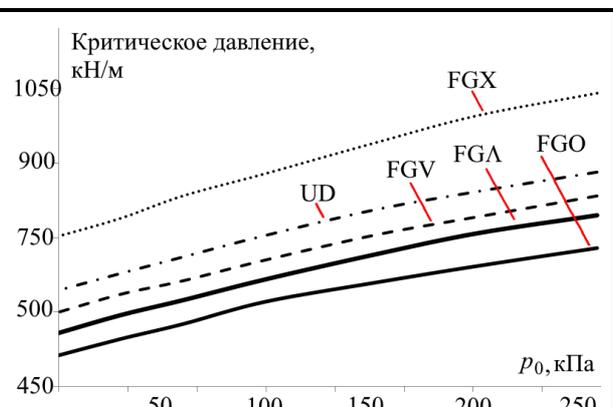


Рис. 5. Зависимость критического давления от типа нанокompозита

## Выводы

Предложен метод анализа потери статической устойчивости преднагруженной нанокомпозитной составной оболочки, находящейся под действием сжимающей осевой нагрузки. Метод основан на сдвиговой теории высокого порядка и методе Ритца. Сравнение этого метода с конечно-элементным расчётом показывает высокую точность результатов.

Анализ зависимости критического давления от типа нанокомпозита показывает, что рациональный выбор типа наноармирования без изменения объёмной доли нанотрубок в нём может повысить критическое давление до полутора раз.

Предложенный метод позволяет анализировать масштабные тонкостенные конструкции, а также конструкции из функционально-градиентных материалов. Эти объекты являются традиционным слабым местом методов конечно-элементного анализа.

## Финансирование

Исследование выполнено при поддержке Национального фонда исследований Украины в рамках конкурса «Підтримка досліджень провідних та молодих учених» (регистрационный номер Проекта: 2020.02/0128).

## Литература

1. Allaoui A., Bai S., Cheng H. M., Bai J. B. Mechanical and electrical properties of a MWNT/epoxy composite. *Composites Sci. and Techn.* 2002. No. 62. P. 1993–1998. [https://doi.org/10.1016/S0266-3538\(02\)00129-X](https://doi.org/10.1016/S0266-3538(02)00129-X).
2. Zhou Z., Ni Y., Tong Z., Zhu S., Sun J., Xu X. Accurate nonlinear stability analysis of functionally graded multilayer hybrid composite cylindrical shells subjected to combined loads. *Materials and Design.* 2019. No. 182. 108035. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2019.108035>.
3. Zhou Z., Ni Y., Tong Z., Zhu S., Sun J., Xu X. Accurate nonlinear buckling analysis of functionally graded porous graphene platelet reinforced composite cylindrical shells. *Intern. J. Mech. Sci.* 2019. No. 151. P. 537–550. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2018.12.012>.
4. Wang Y., Feng C., Zhao Z., Yang J. Buckling of graphene platelet reinforced composite cylindrical shell with cutout. *Intern. J. Structural Stability and Dynamics.* 2018. No. 18 (3). 1850040. <https://doi.org/10.1142/S0219455418500402>.
5. Dong Y. H., He L. W., Wang L., Li Y. H., Yang J. Buckling of spinning functionally graded graphene reinforced porous nanocomposite cylindrical shells: An analytical study. *Aerospace Sci. and Techn.* 2018. No. 82–83. P. 466–478. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2018.09.037>.
6. Shen H.-S., Xiang Y. Postbuckling of functionally graded graphene-reinforced composite laminated cylindrical shells subjected to external pressure in thermal environments. *Thin-Walled Structures.* 2018. No. 124. P. 151–160. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2017.12.005>.
7. Shen H. S. Postbuckling of nanotube-reinforced composite cylindrical shells in thermal environments, Part I: axially-loaded shells. *Composite Structures.* 2011. No. 93. P. 2096–2108. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2011.02.011>.
8. Shen H. S. Postbuckling of nanotube-reinforced composite cylindrical shells in thermal environments, Part II: pressure-loaded shells. *Composite Structures.* 2011. No. 93. P. 2496–2503. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2011.04.005>.
9. Ansari R., Torabi J. Numerical study on the buckling and vibration of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite conical shells under axial loading. *Composites. Part B. Eng.* 2016. No. 95. P. 196–208. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2016.03.080>.
10. Ansari R., Pourashraf T., Gholami R., Shahabodini A. Analytical solution for nonlinear postbuckling of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite shells with piezoelectric layers. *Composites. Part B. Eng.* 2016. No. 90. P. 267–277. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2015.12.012>.
11. Wang Y., Feng C., Zhao Z., Yang J. Eigenvalue buckling of functionally graded cylindrical shells reinforced with graphene platelets (GPL). *Composite Structures.* 2017. No. 202. P. 38–46. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.10.005>.
12. Liu D., Kitipornchai S., Chen W., Yang J. Three-dimensional buckling and free vibration analyses of initially stressed functionally graded graphene reinforced composite cylindrical shell. *Composite Structures.* 2018. No. 189. P. 560–569. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.01.106>.
13. Wang Y., Feng C., Zhao Z., Lu F., Yang J. Torsional buckling of graphene platelets (GPLs) reinforced functionally graded cylindrical shell with cutout. *Composite Structures.* 2018. No. 197. P. 72–79. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.05.056>.
14. Bagheri H., Kiani Y., Eslami M. R. Free vibration of joined conical–cylindrical–conical shells. *Acta Mechanica.* 2018. No. 229. P. 2751–2764. <https://doi.org/10.1007/s00707-018-2133-3>.
15. Pang F., Li H., Cui J., Du Y., Gao C. Application of flügge thin shell theory to the solution of free vibration behaviors for spherical-cylindrical-spherical shell: A unified formulation. *Europ. J. Mech. A/Solids.* 2019. No. 74. P. 381–393. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2018.12.003>.

16. Wu S., Qu Y., Hua H. Vibrations characteristics of joined cylindrical-spherical shell with elastic-support boundary conditions. *J. Mech. Sci. and Techn.* 2013. No. 27 (5). P. 1265–1272. <https://doi.org/10.1007/s12206-013-0207-7>.
17. Qu Y., Chen Y., Long X., Hua H., Meng Guang. A variational method for free vibration analysis of joined cylindrical-conical shells. *J. Vibration and Control*. 2012. No. 19 (16). P. 2319–2334. <https://doi.org/10.1177/1077546312456227>.
18. Ma X., Jin G., Xiong Y., Liu Z. Free and forced vibration analysis of coupled conical–cylindrical shells with arbitrary boundary conditions. *Intern. J. Mech. Sci.* 2014. No. 88. P. 122–137. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2014.08.002>.
19. Caresta M., Kessissoglou N. J. Free vibrational characteristics of isotropic coupled cylindrical–conical shells. *J. Sound and Vibration*. 2010. No. 329. P. 733–751. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2009.10.003>.
20. Wang Q., Cui X., Qin B., Liang Q. Vibration analysis of the functionally graded carbon nanotube reinforced composite shallow shells with arbitrary boundary conditions. *Composite Structures*. 2017. No. 182. P. 364–379. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.09.043>.
21. Shen H.-S. Nonlinear bending of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates in thermal environments. *Composite Structures*. 2009. No. 91. P. 9–19. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2009.04.026>.
22. Reddy J. N. A refined nonlinear theory of plates with transverse shear deformation. *Intern. J. Solids and Structures*. 1984. No. 20. P. 881–896. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(84\)90056-8](https://doi.org/10.1016/0020-7683(84)90056-8).
23. Amabili M., Reddy J. N. A new non-linear higher-order shear deformation theory for large-amplitude vibrations of laminated doubly curved shells. *Intern. J. Non-Linear Mech.* 2010. No. 45. P. 409–418. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2009.12.013>.
24. Sobhaniragh B., Nejadi M., Mansur W. J. Buckling modelling of ring and stringer stiffened cylindrical shells aggregated by graded CNTs. *Composites. Part B. Eng.* 2017. No. 124. P. 120–133. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2017.05.045>.

*Поступила в редакцію 30.01.2021*

### **Втрата статичної стійкості попередньо навантаженої складеної нанокompозитної оболонки**

**К. В. Аврамов, Н. Г. Сахно, Б. В. Успенський**

Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України,  
61046, Україна, м. Харків, вул. Пожарського, 2/10

*У статті описано методику аналізу явища втрати статичної стійкості попередньо навантаженої нанокompозитної складеної оболонки. Більшість робіт, які присвячено аналізу складених конструкцій, розглядають вібраційні процеси. Водночас явище втрати стійкості може стати важливим фактором, що обмежує використання нових матеріалів у ракетно-космічній техніці. Розглянуто нанокompозитну оболонку постійної товщини, яка складається з двох сферичних кришок та циліндричного корпусу. На оболонку діє внутрішній тиск та осьова стискаюча сила. Така оболонка може моделювати паливний бак ракети-носія. Досліджуються умови, за яких оболонка деформується невісесиметрично внаслідок втрати статичної стійкості. Запропоновано методику, яка дозволяє розділити задачу на аналіз попередньо навантаженого стану оболонки та аналіз втрати стійкості. Подальший аналіз здійснюється допомогою методики, яка базується на теорії зсуву високого порядку та методі Рітца. Проводиться дискретизація задачі шляхом подання змінних, що визначають стан оболонки, в формі розкладень за базисними функціями з невідомими коефіцієнтами. Таким чином, невідомими задачі стають коефіцієнти розкладень. Задача аналізу попередньо навантаженого стану конструкції зводиться до розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів розкладень. Задачу аналізу втрати стійкості може бути зведено до задачі власних значень. Розв'язавши цю задачу, можна знайти мінімальне значення стискаючого навантаження, що призводить до втрати стійкості оболонки, а також форми втрати стійкості. Результати застосування розробленої методики було порівняно з результатами скінченноелементного моделювання на конструкції з найпростішого нанокompозитного матеріалу. Результати порівняння свідчать про високу точність описаної методики. При цьому використання методу скінченних елементів для аналізу масштабних тонкостінних конструкцій з функціонально градієнтних матеріалів є надзвичайно ускладненим, на відміну від методики, яку запропоновано у статті. Порівняння різних видів наноармування свідчить про те, що раціональний вибір типу армування може суттєво підвищити критичне навантаження. При цьому на критичне навантаження також значно впливає внутрішній тиск на оболонку.*

**Ключові слова:** статична нестійкість, складена оболонка, нанокompозитний матеріал, вуглецеві нанотрубки, метод Рітца.