УДК 539.3

АНАЛІТИЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ СИМЕТРИЧНОГО ТЕРМОНАПРУЖЕНОГО СТАНУ ТОВСТИХ ПЛАСТИН НА ОСНОВІ ТРИВИМІРНОЇ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

В. П. Ревенко,
д-р. фіз.-мат. наук
victorrev@ukr.net
ORCID: 0000-0002-2616-8747

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України,
79060, Україна, м. Львів,
вул. Наукова, 3-б

Важливе місце серед задач термопружності займає плоска проблема теорії пружності, яка отримана із загальної тривимірної задачі, після використання гіпотез плоского напруженого стану для тонких пластин. У двовимірній постановці ця задача набула широкого поширення під час дослідження впливу температурних навантажень на напружений стан тонких термочутливих пластин. У статті запропоновано загальний тривимірний розв'язок статичної задачі термопружності у формі, зручній для практичного застосування. Для його побудови до раніше знайденого автором загального розв'язку рівнянь Ляме через три гармонічні функції добавлено частковий розв'язок неоднорідного рівняння – термопружний потенціал переміщень. Показано що використання запропонованого розв'язку дозволяє задовольнити співвідношення статичної тривимірної теорії термопружності і крайові умови та побудувати замкнуту систему рівнянь у частинних похідних на введені двовимірні функції без використання гіпотез про плоский напружений стан пластини. Термопружний напружений стан тонкої або товстої пластини розділений на дві частини: перша враховує тепловий вплив, викликаний зовнішнім нагріванням і внутрішніми джерелами тепла; друга визначається симетричними силовими навантаженнями. Термопружні напруження виражені через деформації і відому температуру. Використано подання тривимірного термопружного напружено-деформованого стану і точно задоволено нульові крайові умови на зовнішніх плоских поверхнях пластини. Це дозволило показати, що введені двовимірні функції будуть гармонічними. Після інтегрування по товщині пластини вздовж нормалі до серединної поверхні виражено нормальні і зсувні зусилля через три невідомі двовимірні функції. Тривимірний напружений стан симетрично навантаженої термочутливої пластини спрощено до двовимірного стану. При цьому зведенні використано тільки гіпотезу, що перпендикулярні серединній поверхні нормальні напруження є незначними в порівнянні із повздовжніми та поперечними напруженнями. Переміщення і напруження в пластині виражено через дві двовимірні гармонічні функції і частковий розв'язок, який визначається заданою температурою на поверхнях пластини. Введені гармонічні функції визначаються із крайових умов на бічній поверхні товстої пластини. Запропонована методика дає змогу розв'язок тривимірних крайових задач для товстих термочутливих пластин зводити до двовимірного випадку.

Ключові слова: *товста термопружна пластина, термочутливий матеріал, напружений стан.*

Вступ

Тонкі і товсті пластини, до яких прикладені силові навантаження і для яких задані температурні поля і внутрішні джерела тепла, широко використовують в енергетичному машинобудуванні, технологічних та інженерних конструкціях [1–3]. У працях [2, 4] зроблено огляд літератури з подання рівнянь плоскої теорії термопружності з використанням гіпотез плоских напружень для тонких пластин.

Мета роботи полягає у розробці ефективного математичного підходу для зведення тривимірної термопружної рівноваги пластин, які знаходяться під впливом силових та температурних навантажень, до дослідження двовимірних рівнянь простого вигляду без накладання додаткових обмежень на компоненти напружень і значення термопружних характеристик матеріалу.

Формулювання задачі і подання розв’язку

Розглянемо тривимірну статичну термопружну задачу для товстої пластини товщини h, серединна поверхня якої займає область S з контуром L і лежить на площині Oxy декартової системи координат: $x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z$. Припустимо, що на обох плоских поверхнях пластини ($z = h_j$, $h_1 = h/2$,

$h_2 = -h/2$) відсутні нормальні і дотичні навантаження, а задані тільки температури $T^- = T^+$, де знаки «+», «–» відповідно описують функції на верхній $z = h_1$ або нижній $z = -h_1$ поверхнях. Вважатимемо, що функція температури $T(x, y, z)$ відома, а на бічній поверхні пластини, яка відповідає контуру *L*, задані крайові умови в напруженнях. Розглянемо симетричний стиск-розтяг вздовж серединної поверхні товстої термочутливої пластини

$$u_i(x, y, -z) = u_i(x, y, z), \; i = \overline{1,2}, \;\; u_3(x, y, -z) = -u_3(x, y, z), \tag{1}$$

де u_i – переміщення у напрямку відповідних осей. Із умов (1) випливає, що нормальні напруження будуть симетричні: $\sigma_j(x, y, -z) = \sigma_j(x, y, z)$, $j = \overline{1,3}$. Термопружні напруження для задачі (1) виразимо через деформації [1, 3]

$$\sigma_k = 2G\left[\varepsilon_k + \frac{\nu}{1-2\nu}e - \frac{1+\nu}{1-2\nu}\alpha T\right], \quad \tau_{kj} = G\gamma_{kj}, k \neq j, \tag{2}$$

де $e = \frac{1-2\nu}{E}\Theta + 3\alpha T$ – об'ємне розширення, $\Theta = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$.

Співвідношення (2) підставимо у рівняння рівноваги і запишемо рівняння стаціонарної термопружності в переміщеннях [1, 3]

$$(1-2\nu)\nabla^2 u_k + \frac{\partial e}{\partial x_k} = 2(1+\nu)\alpha\frac{\partial T}{\partial x_k}, \quad k = \overline{1,3}, \tag{3}$$

$$\nabla^2 T = 0, \; \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}, \tag{4}$$

де ν – коефіцієнт Пуассона, α – коефіцієнт теплового розширення, а відома температура $T(x, y, z)$ задовольняє рівняння (4).

Подамо частковий розв'язок рівняння (3), який дістав назву термопружного потенціалу переміщень [1, 3], у такому вигляді:

$$u_1 = \frac{\partial\psi}{\partial x_1}, \quad u_2 = \frac{\partial\psi}{\partial x_2}, \quad u_3 = \frac{\partial\psi}{\partial x_3}, \tag{5}$$

де функція ψ задовольняє рівняння

$$\nabla^2\psi = \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha T. \tag{6}$$

Загальний розв'язок рівняння (6), частковий розв'язок якого враховує вплив відомої температури, матиме вигляд

$$\psi = \beta z\Omega + \Psi, \tag{7}$$

де $\beta = \frac{1+\nu}{2(1-\nu)}\alpha$; Ω, Ψ – тривимірні гармонічні функції, $\Omega = \int_0^z T dz$, $\frac{\partial\Omega}{\partial z} = T$.

Додамо до розв'язку рівнянь Ляме [5, 6] співвідношення (5), (7) і одержимо загальний розв'язок рівнянь (3) у такому вигляді:

$$u_x = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad u_y = \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad u_z = \frac{\partial P}{\partial z} - 4(1-\nu)\Phi, \tag{8}$$

де $P = z(\Phi + \beta\Omega) + \Psi$; Φ, Ψ, Q –тривимірні гармонічні функції переміщень, Ω, T – відомі гармонічні функції. Бігармонічна функція P задовольняє рівняння

$$\Delta P + \frac{\partial^2}{\partial z^2}P = 2\frac{\partial}{\partial z}(\Phi + \beta\Omega), \tag{9}$$

де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – двовимірний оператор Лапласа.

З умов (2), (8) випливає, що функції P, Ψ, Q, T будуть парними відносно змінної z, а функція Φ – непарною. Запишемо умови симетричності

$$\frac{\partial P^+}{\partial z} = -\frac{\partial P^-}{\partial z},\ \frac{\partial \Phi^+}{\partial z} = \frac{\partial \Phi^-}{\partial z},\ \frac{\partial Q^+}{\partial z} = -\frac{\partial Q^-}{\partial z},\ \Phi^- = -\Phi^+. \tag{10}$$

Врахуємо подання переміщень (8) і знайдемо деформації, а згідно з формулою (2) визначимо загальний вираз нормальних

$$\sigma_j = 2G\left[\frac{\partial^2 P}{\partial x_j^2} - (-1)^j \frac{\partial^2 Q}{\partial x_1 \partial x_2} - 2\nu \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} - 2\beta T\right],\ j = \overline{1,2},$$

$$\sigma_3 = 2G\left[\frac{\partial^2 P}{\partial x_3^2} - 2(2-\nu)\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} - 2\beta T\right], \tag{11}$$

та дотичних

$$\tau_{12} = G\left[2\frac{\partial^2 P}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x_1^2}\right],$$

$$\tau_{j3} = G\left[\frac{\partial}{\partial x_j}\left[2\frac{\partial P}{\partial x_3} - 4(1-\nu)\Phi\right] - (-1)^j \frac{\partial^2 Q}{\partial x_{3-j}\partial x_3}\right],\quad j = \overline{1,2} \tag{12}$$

напружень, де $G = E/2(1+\nu)$, E – модулі зсуву і Юнга. Виразимо об’ємне розширення і суму нормальних напружень Θ

$$e = -2(1-2\nu)\frac{\partial}{\partial z}\Phi + 2\beta T,\ \ \Theta = -2E\left(\frac{\partial}{\partial z}\Phi + \frac{\alpha T}{1-\nu}\right). \tag{13}$$

На поверхнях пластини задамо тривимірні крайові умови

$$\sigma_3(x, y, h_j) = 0,\ \ \tau_{3\mathrm{k}}(x, y, h_j) = 0,\quad j,k = \overline{1,2}. \tag{14}$$

Підставимо рівняння (11) у співвідношення (14), врахуємо співвідношення (10), (13) і те, що напруження $\sigma_3 << \sigma_1, \sigma_2$, та одержимо

$$\frac{\partial P^+}{\partial z} = 2(2-\nu)\Phi^+ + 2\beta\Omega^+, \tag{15}$$

де $\Omega^+ = \int\limits_0^{\mathrm{h}_1} T dz$.

Використаємо подання (11) і запишемо умови (14) про відсутність дотичних навантажень на поверхнях пластини

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\partial P^+}{\partial x_3} - 2(1-\nu)\Phi^+\right] - \frac{(-1)^j}{2}\frac{\partial^2 Q^+}{\partial x_{3-j}\partial x_3} = 0,\quad j = \overline{1,2}. \tag{16}$$

Врахуємо співвідношення (15) і спростимо рівняння (16)

$$4\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\Phi^+ + \beta\Omega^+\right) = (-1)^j \frac{\partial^2 Q^+}{\partial x_{3-j}\partial x_3},\quad j = \overline{1,2}. \tag{17}$$

Із рівнянь (17) випливають такі умови гармонічності на введені функції:

$$\Delta\left(\Phi^+ + \beta\Omega^+\right) = 0,\quad \Delta\frac{\partial Q^+}{\partial z} = 0. \tag{18}$$

Отже, функції $\Phi^+ + \beta\Omega^+$, $\dfrac{\partial Q^+}{\partial x_3}$ – гармонічні, якщо знаємо Φ^+, то знаємо $\dfrac{\partial Q^+}{\partial x_3}$.

Використаємо співвідношення (10), (11), (15) і виразимо зусилля в пластині. Для цього підставимо у відомі вирази нормальних і дотичних зусиль [7] подання напруження (11), (12) і одержимо

$$T_1 = 2G\left[\frac{\partial^2 \tilde{P}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{Q}}{\partial x \partial y} - 4\nu\Phi^+ - 4\beta\Omega^+\right],\ T_2 = 2G\left[\frac{\partial^2 \tilde{P}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \tilde{Q}}{\partial x \partial y} - 4\nu\Phi^+ - 4\beta\Omega^+\right],$$

$$S_{12} = S_{21} = 2G\left[\frac{\partial^2 \tilde{P}}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \tilde{Q}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \tilde{Q}}{\partial x^2}\right)\right], \tag{19}$$

де $\tilde{P} = \int\limits_{-h_1}^{h_1} P dz$, $\tilde{Q} = \int\limits_{-h_1}^{h_1} Q dz$, $\tilde{T} = \int\limits_{-h_1}^{h_1} T dz = \int\limits_{-h_1}^{h_1} \frac{\partial \Omega}{\partial z} dz = 2\Omega^+$. Після інтегрування рівняння (9), врахування гармонічності функцій (18) і умови (15) запишемо ключові рівняння теорії пластин для базових функцій $\tilde{P}$, $\tilde{Q}$, Φ^+

$$\Delta\tilde{P} = -4(1-\nu)\Phi^+,\ \ \Delta\tilde{Q} = -2\frac{\partial}{\partial z}Q^+. \tag{20}$$

Співвідношення (20) узгоджені з виразами (19) і співпадають із ключовими рівняннями плоского напруженого стану [5, 7].

Відзначимо, якщо у рівняння рівноваги пластини в зусиллях [7] підставити співвідношення (19), то одержимо рівняння в часткових похідних четвертого порядку

$$\Delta\Delta\tilde{P} = 4\beta(1-\nu)\Delta\Omega^+. \tag{21}$$

Рівняння (21) також випливає із одержаних співвідношень (18), (20).

Подання термопружних напружень через гармонічні функції

Із рівняння (18) визначимо подання функції Φ^+

$$\Phi^+ = -h\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \beta\Omega^+, \tag{22}$$

де φ – невідома гармонічна функція. Використаємо вираз (22), співвідношення (17) між гармонічними функціями та одержимо таку просту залежність:

$$\frac{\partial Q^+}{\partial z} = 4h\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}. \tag{23}$$

Врахуємо подання (22), (23) і запишемо загальний розв’язок рівнянь (20)

$$\tilde{P} = 2(1-\nu)h\left[y\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \beta\omega_1\right] + hg_1(x,y),\ \tilde{Q} = -4yh\frac{\partial \varphi}{\partial x} + hg_2(x,y), \tag{24}$$

де ω_1 – частковий розв'язок рівняння $h\Delta\omega_1 = 2\Omega^+$; g_j – гармонічні функції, які можна подати

$$g_1 = (1+\nu)h\left[\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\right],\quad g_2 = (1+\nu)h\left[\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\right], \tag{25}$$

ϕ, ψ – гармонічні функції.

Підставимо функції (22), (24), (25) у співвідношення (19), виразимо зусилля через введені функції і побачимо, що функція ϕ не входить у подання зусиль (20), так що її можна не враховувати.

Отже, функції (24) набудуть такого вигляду:

$$\tilde{P} = 2(1-\nu)h\left[y\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \beta\omega_1\right] - (1+\nu)h\frac{\partial \psi}{\partial x},\ \tilde{Q} = -4hy\frac{\partial \varphi}{\partial x} + (1+\nu)h\frac{\partial \psi}{\partial y},\ \ \Phi^+ = -h\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \beta\frac{h}{2}\Delta\omega_1, \tag{26}$$

де функції ω_1, Ω^+ описують вплив температури на напружений стан пластини, а гармонічні функції φ, ψ відповідають плоскому напруженому стану [5].

Виразимо зусилля, які залежать тільки від температури. Для цього в співвідношення (19) підставимо вирази (26). Після перетворень одержимо такі прості формули

$$T_1 = -Eh\alpha \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial y^2},\ T_2 = -Eh\alpha \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x^2},\ S_{12} = S_{21} = Eh\alpha \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x \partial y}. \tag{27}$$

Використаємо подання напружень в плоскій задачі [5], співвідношення (27) і запишемо загальне подання напружень через три базові функції ω_1, φ, ψ

$$\sigma_x = 2E\left\{ y\frac{\partial^3\varphi}{\partial y^3} + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^3\psi}{\partial y^2 \partial x} - \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2\omega_1}{\partial y^2} \right\},$$

$$\sigma_y = 2E\left\{ y\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3\psi}{\partial x^3} - \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2\omega_1}{\partial x^2} \right\}, \tag{28}$$

$$\tau_{xy} = -2E\left\{ y\frac{\partial^3\varphi}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^3\psi}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2\omega_1}{\partial x \partial y} \right\}.$$

Гармонічні функції φ, ψ визначимо із крайових умов (14), заданих на бічній поверхні пластини, які після інтегрування зведемо до умов на контурі L області S. Використаємо напруження (28) і запишемо крайові умови згідно з [5, 7]

$$\{\sigma_y \sin^2\theta + \sigma_x \cos^2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta\}|_L = \sigma_n, \qquad [\frac{\sin 2\theta}{2}(\sigma_y - \sigma_x) + \tau_{xy}\cos 2\theta]|_L = \tau_n, \tag{29}$$

де θ – кут між нормаллю до контуру L і віссю Ox, $\sigma_n = \frac{1}{h}\int_{-h_1}^{h_1} \sigma_n(x,y,z)dz|_L$, $\tau_n = \frac{1}{h}\int_{-h_1}^{h_1} \tau_n(x,y,z)dz|_L$.
Переміщення і деформації в пластині знайдемо після усереднення формул (8).

Одержані вирази напружень (28) і крайові умови (29) дають змогу розв'язувати різноманітні крайові задачі для товстих термопружних пластин.

Висновки

На основі тривимірної теорії пружності побудована, без використання гіпотез про нульові дотичні та нормальні напруження всередині пластини, двовимірна теорія тонких і товстих термопружних пластин, навантажених тільки на їх бічних сторонах симетрично і паралельно серединній поверхні. Встановлено: знайдені напруження і переміщення точно дорівнюють відповідним усередненим значенням тривимірної теорії термопружності; із одержаних формул випливають подання напружень плоскої задачі теорії пружності.

Література

1. Коваленко А. Д. Основы термоупругости. Киев: Наук. думка, 1970. 307 с.
2. Meleshko V.V. Selected topics in the history of the two-dimensional biharmonic problem. *Appl. Mech. Reviews.* 2003. Vol. 56. No. 1. P. 33–85. https://doi.org/10.1115/1.1521166.
3. Hetnarski R. B., Eslami M. R. Thermal stresses – Advanced theory and applications. Switzerland AG, Springer, 2019. 568 p. https://doi.org/10.1007/978-3-030-10436-8.
4. Tokovyy Y. Plane thermoelasticity of inhomogeneous solids. / In: Altenbach H., Öchsner A. (eds.) Encyclopedia of continuum mechanics. Berlin-Heidelberg: Springer, 2019. P. 1–13. https://doi.org/10.1007/978-3-662-53605-6_361-1.
5. Revenko V. P., Revenko A. V. Determination of plane stress-strain states of the plates on the basis of the three-dimensional theory of elasticity. *Materials Sci.* 2017. Vol. 52. No. 6. P. 811–818.
6. Revenko V. P. Solving the three-dimensional equations of the linear theory of elasticity. *Int. Appl. Mech.* 2009. Vol. 45. No. 7. P. 730–741. https://doi.org/10.1007/s10778-009-0225-4.
7. Donell, L. H. (1976). Beams, plates and shells. New York: McGraw-Hill, 568 p.

Надійшла до редакції 16.10.2020

Аналитическое решение задачи симметричного термонапряженного состояния толстых пластин на основе трехмерной теории упругости

В. П. Ревенко

Институт прикладных проблем механики и математики им. Я. С. Подстригача НАН Украины,
79060, Украина, г. Львов, ул. Научная, 3-б

Важное место среди задач термоупругости занимает плоская проблема теории упругости, полученная из общей трехмерной задачи, после использования гипотез плоского напряженного состояния для тонких пластин. В двухмерной постановке эта задача получила широкое распространение при исследовании влияния температурных нагрузок на напряженное состояние тонких термочувствительных пластин. В статье предложено общее трехмерное решение статической задачи термоупругости в форме, удобной для практического применения. Для его построения в ранее найденное автором общее решение уравнений Ламе через три гармонические функции добавлено частное решение неоднородного уравнения – термоупругий потенциал перемещений. Показано что использование предложенного решения позволяет удовлетворить соотношение статической трехмерной теории термоупругости и краевые условия и построить замкнутую систему уравнений в частных производных на введенные двухмерные функции без использования гипотез о плоском напряженном состоянии пластины. Термоупругое напряженное состояние толстой или тонкой пластины разделено на две части: первая учитывает тепловое воздействие, вызванное внешним нагревом и внутренними источниками тепла; вторая определяется симметричной силовой нагрузкой. Термоупругие напряжения выражены через деформации и известную температуру. Использовано представление трехмерного термоупругого напряженно-деформированного состояния и точно удовлетворены нулевые краевые условия на внешних плоских поверхностях пластины. Это позволило показать, что введенные двухмерные функции будут гармоническими. После интегрирования по толщине пластины вдоль нормали к срединной поверхности выражено нормальные и сдвигающие усилия через три неизвестные двухмерные функции. Трехмерное напряженное состояние симметрично нагруженной термочувствительной пластины упрощено к двухмерному состоянию. Для этого использовали только гипотезу, что перпендикулярные срединной поверхности нормальные напряжения незначительны по сравнению с продольными и поперечными напряжениями. Перемещение и напряжения в пластине выражено через две двухмерные гармонические функции и частное решение, которое определяется заданной температурой на поверхностях пластины. Введенные гармонические функции определяются из краевых условий на боковой поверхности толстой пластины. Предложенная методика позволяет решение трехмерных краевых задач для толстых термочувствительных пластин свести к двухмерному случаю.

Ключевые слова: *толстая термоупругая пластина, термочувствительный материал, напряженное состояние.*