

УДК 539.375

## УПРУГО- ПЛАСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СТРИНГЕРНОЙ ПЛАСТИНЫ С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ

**М. В. Мир-Салим-заде,**  
канд. физ.-мат. наук  
[minavar.mirsalimzade@imm.az](mailto:minavar.mirsalimzade@imm.az)  
ORCID: 0000-0003-4237-0352

Институт математики и  
механики НАН  
Азербайджана,  
AZ1141, Азербайджан, г. Баку,  
ул. Б. Вахабзаде, 9

*При расчете на прочность машин, конструкций и сооружений, имеющих технологические отверстия, важно учитывать пластические области, возникающие вокруг отверстий. Однако неизвестные форма и размеры пластической области усложняют решение упруго-пластических задач. В настоящей работе дается приближенный метод и решение плоской упруго-пластической задачи о распределении напряжений в тонкой пластине, подкрепленной регулярной системой ребер жесткости (стрингеров). Рассматриваемая стрингерная пластина имеет круговое отверстие, которое целиком охватывается зоной пластических деформаций. На бесконечности пластина подвержена однородному растяжению вдоль ребер жесткости. К контуру кругового отверстия приложена постоянная нормальная нагрузка. Материалы пластины и стрингеров приняты изотропными. Условия нагружения полагаются квазистатическими. Принято, что пластина находится в плоско-напряженном состоянии. В качестве условия пластичности в пластической зоне принимается условие пластичности Треска-Сен-Венана. Используются методы теории возмущений, теории аналитических функций и метод наименьших квадратов. Решение поставленной упруго-пластической задачи состоит из двух этапов. На первом этапе находится напряженно-деформированное состояние для упругой зоны, а затем с помощью метода наименьших квадратов определяется неизвестная граница раздела упругой и пластической зон. Построена в каждом приближении замкнутая система алгебраических уравнений, численное решение которой позволяет исследовать напряженно-деформированное состояние стрингерной пластины с полным охватом отверстия пластической зоной, а также определить величины сосредоточенных сил, заменяющих действие стрингеров. Найдена граница раздела упругих и пластических деформаций. Представленная методика решения может быть развита для решения других упруго-пластических задач. Полученное в работе решение дает возможность рассматривать упруго-пластические задачи для стрингерной пластины с другими критериями пластичности.*

**Ключевые слова:** пластина, стрингеры, упруго-пластическая задача, граница раздела упругих и пластических деформаций.

### Введение

Элементы многих конструкций и сооружений имеют технологические отверстия. При эксплуатации из-за концентрации напряжений вокруг отверстий возникают пластические зоны. Учет этих зон важен при расчете конструкции или сооружения на прочность. Такие задачи усложняются необходимостью определять форму и размер пластической зоны, однако вызывают большой интерес [1–11]. Приближенный способ решения плоских упруго-пластических задач, основанный на методах решения упругой задачи Н. И. Мухелишвили и наименьших квадратов, предложен в [1]. Упруго-пластическая задача для бесконечной пластины, ослабленной двумя одинаковыми квадратными отверстиями с частично неизвестными границами, рассмотрена в [3]. С помощью теории функций комплексного переменного и теории конформных отображений задача была сведена к краевой задаче аналитической теории функций. Метод построения упруго-пластической границы в задаче о растяжении пластины, ослабленной двумя круговыми отверстиями разного диаметра, предложен в [4]. Предложенный метод основан на использовании законов сохранения и применяется для решения аналогичной задачи в [10]. С помощью законов сохранения найдена граница между упругой и пластической областями в ходе решения упруго-пластической задачи о напряженном состоянии в условиях сложного сдвига в теле, ослабленном отверстием, ограниченном кусочногладким контуром [7]. В [6] показан основанный на критерии текучести Треска аналитический метод определения упруго-пластической границы вокруг круглого отверстия в пластине, подвергаемой двухосным нагрузкам растяжения-сжатия на бесконечности. При этом вокруг отверстия возникают две или четыре непересекающиеся пластические области. В обоих случаях используется метод конформного отображения. В [9] метод конформного отображения, а также

Статья доступна по лицензии Creative Commons «Attribution» («Атрибуция») 4.0 Международная.  
© М. В. Мир-Салим-заде, 2021

алгоритм дифференциальной эволюции используются для определения упруго-пластических границ в случае двух одинаковых круглых отверстий в бесконечной пластине.

В [2] рассмотрена плоская упруго-пластическая задача при условии предельного равновесия Кулона и различных коэффициентах бокового распора в нетронутом массиве для выработок эллиптического, сводчатого, квадратного и полигонального поперечных сечений, а также взаимовлияющих выработок. Решение задачи получено методом малого параметра и методом конечных элементов. Приближенный способ решения упруго-пластической задачи для массива горной породы, при действии тектонических и гравитационных усилий, дан в [8]. Считается, что выработка целиком охватывается пластической зоной, а материал массива подчиняется условию пластичности В. В. Соколовского.

Плоская упруго-пластическая задача о распределении напряжений в тонкой пластине с круговым отверстием при наличии зарождения и развития трещины в упругой зоне рассмотрена в [5]. Предполагается, что зона пластических деформаций целиком охватывает отверстие, а в упругой зоне происходит зарождение трещины и разрушение материала пластины. Используются методы теории возмущений и теории сингулярных интегральных уравнений. Возможность зарождения трещин в упругой зоне учитывается при решении плоской упруго-пластической задачи о распределении напряжений в тонкой пластине с круглым отверстием в [11]. Была найдена граница раздела упругих и пластических деформаций, а также расположение и размеры зон зарождения трещин.

В настоящей работе рассматривается плоская упруго-пластическая задача о распределении напряжений в подкрепленной регулярной системой стрингеров тонкой пластине с круговым отверстием, целиком охваченным зоной пластических деформаций.

### Постановка задачи

Рассмотрим бесконечную тонкую пластину, имеющую круговое отверстие (рис. 1). Симметрично относительно поверхности к пластине приклепаны упругие ребра жесткости (стрингеры). Пластина подвергается на бесконечности однородному растяжению вдоль стрингеров напряжением  $\sigma_y^\infty = \sigma_0$ . Под действием внешних растягивающих нагрузок и внутреннего давления на контуре отверстия вокруг последнего возникает целиком охватывающая его область пластических деформаций.

Материал пластины принят изотропным. Условия нагружения считаются квазистатическими. Считается, что пластина находится в плосконапряженном состоянии. К контуру отверстия приложена постоянная нормальная нагрузка

$$\sigma_r = p, \tau_{r\theta} = 0.$$

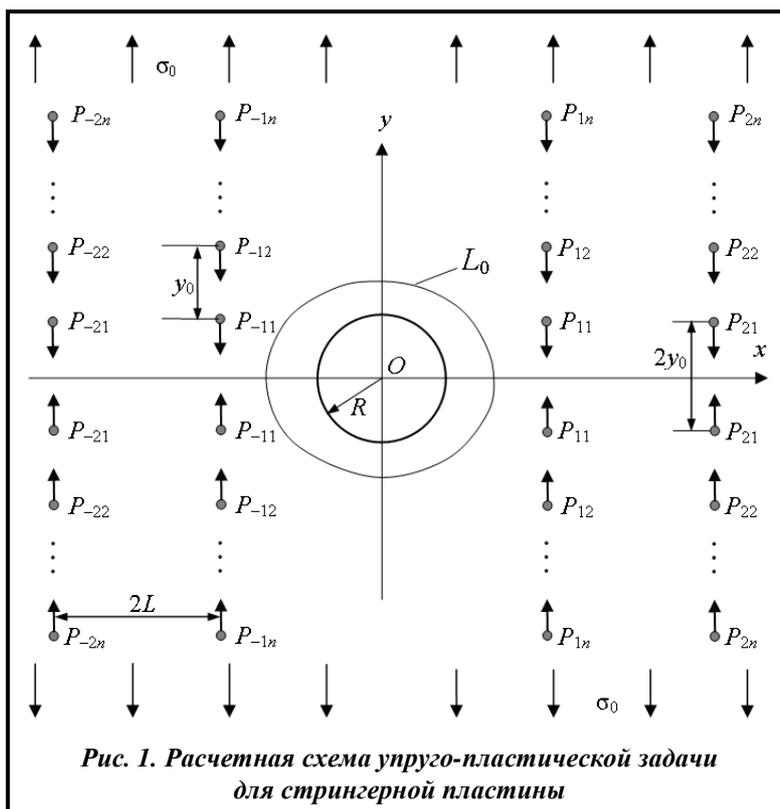


Рис. 1. Расчетная схема упруго-пластической задачи для стрингерной пластины

В качестве условия пластичности в пластической зоне принято условие пластичности Треска-Сен-Венана. Как известно [12–16], плоская задача идеальной пластичности является статически определимой, если граничные условия заданы в напряжениях.

Действие стрингеров заменяется заранее неизвестными эквивалентными сосредоточенными силами  $P_{mn}$ , приложенными в точках  $z = \pm(2m+1)L \pm iky_0$  ( $m=0,1,2,\dots; k=1,2,\dots; i = \sqrt{-1}$ ) их соединения с пластиной.

Необходимо определить границы зоны пластических деформаций вокруг отверстия, напряженно-деформированное состояние стрингерной пластины и величины сосредоточенных сил.

Пусть в пластической области имеет место неравенство  $\sigma_\theta \geq \sigma_r > 0$ . В этом случае [16] характеристики в пластической области будут радиальными прямыми, а напряжения определяться формулами

$$\sigma_r^p = \sigma_s + (p - \sigma_s) \frac{R}{r}, \quad \sigma_\theta^p = \sigma_s, \quad \tau_{r\theta}^p = 0,$$

где  $\sigma_s$  – предел текучести материала пластины на растяжение;  $R$  – радиус отверстия.

Чтобы неравенство  $\sigma_\theta \geq \sigma_r > 0$  выполнялось, очевидно, что нагрузка  $p$  должна удовлетворять условию  $0 \leq p \leq \sigma_s$

На неизвестном контуре  $L_0$ , разделяющем упругую и пластическую области, все напряжения непрерывны. Граничные условия на  $L_0$  имеют вид

$$\sigma_r^e = \sigma_r^p, \quad \sigma_\theta^e = \sigma_\theta^p, \quad \tau_{r\theta}^e = \tau_{r\theta}^p.$$

Следовательно, чтобы определить напряженное состояние в упругой зоне пластины, имеем следующие граничные условия:

$$\sigma_r^e - i\tau_{r\theta}^e = \sigma_r^p - i\tau_{r\theta}^p \quad \text{на } L_0. \quad (1)$$

Для отыскания границы  $L_0$  имеем условие

$$\sigma_\theta^e = \sigma_\theta^p \quad \text{на } L_0. \quad (2)$$

### Решение краевой задачи

Будем искать неизвестный контур  $L_0$  в классе контуров, близких к круговым. Представим его в виде

$$r = \rho(\theta) = c_0 + \varepsilon H(\theta),$$

в котором функция  $H(\theta)$  подлежит определению;  $\varepsilon = R_0/c_0$  – малый параметр. Здесь  $R_0$  – наибольшая высота отклонения профиля неизвестного контура  $L_0$  от окружности  $r = c_0$ .

Не уменьшая общности рассматриваемой задачи, принимается, что искомая функция  $H(\theta)$  симметрична относительно координатных осей и может быть представлена в виде ряда Фурье

$$H(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{2k} \cos 2k\theta.$$

Напряжения и перемещения в упругой зоне, а также сосредоточенные силы ищутся в виде разложений по малому параметру, в которых для упрощения отбрасываются члены, содержащие степени  $\varepsilon$  выше первой

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_n^{(0)} + \varepsilon \sigma_n^{(1)} + \dots, & \sigma_t &= \sigma_t^{(0)} + \varepsilon \sigma_t^{(1)} + \dots, & \tau_{nt} &= \tau_{nt}^{(0)} + \varepsilon \tau_{nt}^{(1)} + \dots, \\ u_n &= u_n^{(0)} + \varepsilon u_n^{(1)} + \dots, & v_n &= v_n^{(0)} + \varepsilon v_n^{(1)} + \dots, \\ P_{mn} &= P_{mn}^{(0)} + \varepsilon P_{mn}^{(1)} + \dots \end{aligned}$$

Каждое из приближений удовлетворяет системе дифференциальных уравнений плоской задачи теории упругости. Компоненты тензора напряжений при  $r = \rho(\theta)$  находим, разлагая в ряд выражения для напряжений в окрестности  $r = c_0$ . В каждом приближении решение находится с помощью теории аналитических функций.

Используя известные формулы [17] для компонент напряжений  $\sigma_n$  и  $\tau_{nt}$ , запишем краевые условия задачи (1)–(2) на контуре  $r = c_0$  в следующем виде:

– для нулевого приближения

$$\sigma_r^{(0)} = \sigma_r^p, \quad \tau_{r\theta}^{(0)} = \tau_{r\theta}^p; \quad (3)$$

– для первого приближения

$$\sigma_r^{(1)} = N, \quad \tau_{r\theta}^{(1)} = 0. \quad (4)$$

Здесь  $N = 2 \frac{\tau_{r\theta}^{(0)}}{c_0} \frac{dH(\theta)}{d\theta} - H(\theta) \frac{\partial \sigma_r^{(0)}}{\partial r}$  при  $r=c_0$ .

На основании формул Колосова-Мусхелишвили [17]

$$\begin{aligned} \sigma_x^e + \sigma_y^e &= \sigma_r^e + \sigma_\theta^e = 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}], \\ \sigma_y^e - \sigma_x^e + 2i\tau_{xy}^e &= e^{-2i\theta} (\sigma_\theta^e - \sigma_r^e + 2i\tau_{r\theta}^e) = 2[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)], \\ 2\mu(u^e + iv^e) &= 2\mu e^{i\theta} (u_r + iv_\theta) = \kappa\varphi(z) - z\overline{\Phi(z)} - \overline{\Psi(z)} \end{aligned}$$

и граничных условий (3) на контурах отверстий задача в нулевом приближении сводится к определению двух аналитических функций  $\Phi^{(0)}(z)$  и  $\Psi^{(0)}(z)$  из краевого условия

$$\Phi_0(z) + \overline{\Phi_0(z)} - e^{2i\theta} [\bar{z}\Phi_0'(z) + \Psi_0(z)] = \sigma_r^p - i\tau_{r\theta}^p. \quad (5)$$

Здесь  $z=c_0 e^{i\theta}$ ;  $\mu$  – модуль сдвига материала пластины;  $\varphi'(z)=\Phi(z)$ ;  $\psi'(z)=\Psi(z)$ ;  $\kappa=(3-\nu)/(1+\nu)$ ;  $\nu$  – коэффициент Пуассона материала среды.

Решение краевой задачи (5) ищем в виде ( $k=0$ )

$$\Phi^{(k)}(z) = \Phi_0^{(k)}(z) + \Phi_1^{(k)}(z), \quad \Psi^{(k)}(z) = \Psi_0^{(k)}(z) + \Psi_1^{(k)}(z). \quad (6)$$

Здесь потенциалы  $\Phi_0^{(0)}(z)$  и  $\Psi_0^{(0)}(z)$  описывают поле напряжений и деформаций в сплошной пластине под действием системы сосредоточенных сил  $P_{mn}^{(0)}$  и  $\sigma_0$  и определяются следующими формулами:

$$\begin{aligned} \Phi_0^{(0)}(z) &= \frac{1}{4}\sigma_0 - \frac{i}{2\pi h(1+\kappa)} \sum'_{m,n} P_{mn}^{(0)} \left[ \frac{1}{z - mL + iny_0} - \frac{1}{z - mL - iny_0} \right], \\ \Psi_0^{(0)}(z) &= \frac{1}{2}\sigma_0 - \frac{i\kappa}{2\pi h(1+\kappa)} \sum'_{m,n} P_{mn}^{(0)} \left[ \frac{1}{z - mL + iny_0} - \frac{1}{z - mL - iny_0} \right] + \\ &+ \frac{i}{2\pi h(1+\kappa)} \sum'_{m,n} P_{mn}^{(0)} \left[ \frac{mL - iny_0}{(z - mL + iny_0)^2} - \frac{mL + iny_0}{(z - mL - iny_0)^2} \right], \end{aligned} \quad (7)$$

где  $h$  – толщина пластины; штрих у знака суммы указывает на то, что при суммировании исключается индекс  $m=n=0$ .

Для определения функций  $\Phi_1^{(0)}(z)$  и  $\Psi_1^{(0)}(z)$  видоизменяем граничное условие (5) и применяем для его решения метод Н. И. Мусхелишвили [17]. В результате находим

$$\begin{aligned} \Phi_1^{(0)}(z) &= \frac{\sigma_0}{2z^2} - iA \sum'_{m,n} P_{mn}^{(0)} \left\{ \frac{A_1 A_2 - 1}{A_1 (zA_1 - 1)^2} - \frac{A_2 A_1 - 1}{A_2 (zA_2 - 1)^2} \right\} + iA\kappa \sum'_{m,n} P_{mn}^{(0)} \left[ \frac{1}{z(zA_1 - 1)} - \frac{1}{z(zA_2 - 1)} \right], \\ \Psi_1^{(0)}(z) &= \frac{\sigma_0}{2z^2} + \frac{iA}{z} \sum'_{m,n} P_{mn}^{(0)} \left[ \frac{1}{zA_1 - 1} - \frac{1}{zA_2 - 1} + \frac{1}{zA_1} - \frac{1}{zA_2} \right] + \frac{\Phi_0^{(0)}(z)}{z^2} - \frac{\Phi_0^{(0)'(z)}(z)}{z}. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь  $A = \frac{1}{2\pi h(1+\kappa)}$ ,  $A_1 = mL - iny_0$ ,  $A_2 = mL + iny_0$ .

В формулах (8) все линейные размеры отнесены к радиусу  $R$ .

Величина сосредоточенных сил определяется с помощью закона Гука. Согласно закону Гука, величина сосредоточенной силы  $P_{mn}^{(0)}$ , действующей на каждую точку крепления со стороны ребра жесткости,

$$P_{mn}^{(0)} = \frac{E_s A_s}{2y_0 n} \Delta v_{mn}^{(0)} \quad (m, n=1, 2, \dots), \quad (9)$$

где  $E_s$  – модуль Юнга материала стрингера;  $2y_0l$  – расстояние между точками крепления;  $\Delta v_{mn}^{(0)}$  – взаимное смещение рассматриваемых точек крепления, равное удлинению соответствующего участка стрингера.

Считается, что стрингеры работают только на растяжение (не подвергаются изгибу), при деформации их толщина неизменна, а напряженное состояние – одноосное. Принято, что в системе стрингеров ферменного типа ослабления стрингеров за счет постановки точек крепления не происходит. Точки крепления (площадки сцепления) одинаковы, с радиусом  $a_0$ , малым по сравнению с их шагом  $2L$  и другими характерными размерами. Пластина и стрингеры взаимодействуют друг с другом в одной плоскости и только в точках крепления.

Примем [18] естественное допущение о том, что взаимное упругое смещение точек  $z=mL+i(ny_0-a_0)$  и  $z=mL-i(ny_0-a_0)$  в рассматриваемой задаче равно взаимному смещению точек крепления  $\Delta v_{mn}^{(0)}$ . Это дополнительное условие совместности перемещений позволяет отыскать решение задачи.

Используя формулы Колосова-Мухелишвили [17], соотношения (6)–(8), после выполнения элементарных выкладок, найдем взаимное смещение  $\Delta v_{mn}^{(0)}$  указанных точек

$$\Delta v_{kr}^{(0)} = \Delta v_{kr}^0 + \Delta v_{kr}^1, \quad (10)$$

$$\Delta v_{kr}^0 = \frac{\sigma_0}{4\mu} (1 + \kappa) d_1 + \frac{1}{2\pi(1 + \kappa)\mu h} \sum_{m,n} P_{mn}^{(0)} \left\{ \kappa \ln \frac{d_3 + a^2}{d_3 + b^2} + \frac{2d_0 d_1 [2k(k-m)L^2 + ab]}{(d_3 + b^2)(d_3 + a^2)} \right\},$$

$$\Delta v_{kr}^1 = \frac{\sigma_0}{2\mu} \left\{ \frac{(1 + \kappa)d_1}{B_2} + \frac{2d_1 kL}{B_2^2} \left( \frac{kL}{B_2} - kL \right) + \frac{k^2 L^2 - d_1^2}{B_2^2} \left( \frac{d_1}{B_2} - d_1 \right) \right\} + \frac{1}{2\pi(1 + \kappa)\mu h} \sum_{m,n} P_{mn}^{(0)} \Pi,$$

где  $b = (r-n)y_0 - a$ ;  $d_0 = b + a$ ;  $d_1 = ry_0 - a$ ;  $d_3 = (k-m)^2 L^2$ ;

$$\Pi = \kappa \left\{ \frac{C_4(DkL - D_1 d_1) - C_2^*(D_1 kL - d_1 D)}{(D_1^2 + D^2)B_2} - \frac{C_4(D_3 kL - D_2 d_1) - C_2^*(D_2 kL - d_1 D_3)}{(D_3^2 + D_2^2)B_2} \right\} -$$

$$- \kappa(d_3 - 1) \left\{ \frac{D_3 d_6 - 2ny_0 mLD_2}{(D_3^2 + D_2^2)D_4} - \frac{Dd_6 - 2ny_0 mLD_1}{(D^2 + D_1^2)D_4} \right\} + \frac{1 + \kappa}{2} \ln \frac{D^2 + D_1^2}{D_3^2 + D_2^2} + \frac{2ny_0(ny_0 - a)}{d_5 B_2} -$$

$$- (d_5 - 1) \left\{ \frac{C_4[mL(D^2 - D_1^2) + 2ny_0 DD_1] - C_2^*[2mLD_1 D - ny_0(D^2 - D_1^2)]}{(D^2 + D_1^2)^2 d_5} - \right.$$

$$\left. - \frac{C_4[mL(D_3^2 - D_2^2) - 2ny_0 D_2 D_3] - C_2^*[ny_0(D_3^2 - D_2^2) + 2mLD_2 D_3]}{(D_3^2 + D_2^2)d_5} \right\};$$

$$d_5 = m^2 L^2 + n^2 y_0^2; \quad d_6 = m^2 L^2 - n^2 y_0^2; \quad B_2 = k^2 L^2 + d_1^2; \quad C_4 = kL + \frac{kL}{B_2}; \quad C_2^* = d_1 \left( 1 + \frac{d_1}{B_2} \right);$$

$$D = kmL^2 + ny_0 d_1 - 1; \quad D_1 = d_1 mL - ny_0 kL; \quad D_2 = d_1 mL + ny_0 kL;$$

$$D_3 = kmL^2 - ny_0 d_1 - 1; \quad D_4 = d_6^2 + 4y_0^2 L^2 m^2.$$

Решая систему (9)–(10), определим величины сосредоточенных сил  $P_{mn}^{(0)}$ , а тем самым и комплексные потенциалы нулевого приближения. По формулам Колосова-Мухелишвили и (6) находят компоненты напряжений в усиленной пластине в нулевом приближении. Зная напряженное состояние в нулевом приближении, находим функции  $N$ .

После нахождения решения в нулевом приближении переходим к решению задачи в первом приближении (4).

Граничные условия задачи для первого приближения запишутся в виде

$$\Phi^{(1)}(\tau) + \overline{\Phi^{(1)}(\tau)} - e^{2i\theta} \left[ \overline{\tau} \Phi^{(1)\prime}(\tau) + \Psi^{(1)}(\tau) \right] = N \quad \text{при } \tau = c_0 e^{i\theta}. \quad (11)$$

Решение краевой задачи (11), аналогично нулевому приближению, ищем в виде (6) при  $k=1$ , где потенциалы  $\Phi_0^{(1)}(z)$  и  $\Psi_0^{(1)}(z)$  описывают поле напряжений и деформаций под действием системы сосредоточенных сил  $P_{mn}^{(1)}$  и определяются формулами, аналогичными (7), в которых следует положить  $\sigma_0$  равными нулю,  $P_{mn}^{(0)}$  заменить на  $P_{mn}^{(1)}$ .

Для определения потенциалов  $\Phi_1^{(1)}(z)$  и  $\Psi_1^{(1)}(z)$  из граничного условия (11) вновь используем метод Н. И. Muskhelishvili. В результате находим

$$\Phi_1^{(1)}(z) = \Phi_{1*}^{(1)}(z) + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} z^{-2k}, \quad \Psi_1^{(1)}(z) = \Psi_{1*}^{(1)}(z) + \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k} z^{-2k}.$$

Здесь  $\Phi_{1*}^{(1)}(z)$  и  $\Psi_{1*}^{(1)}(z)$  определяются формулами, аналогичными (8), в которых следует положить  $\sigma_0$  равным нулю,  $P_{mn}^{(0)}$  заменить на  $P_{mn}^{(1)}$ . Коэффициенты  $a_{2k}$  и  $b_{2k}$  находятся по формулам

$$a_{2n} = C'_{2n} R^{2n} \quad (n=1,2,\dots), \quad a_0=0, \\ b_{2n} = (2n-1)R^2 a_{2n-2} - R^{2n} a_{-2n+2} \quad (n \geq 2), \quad b_0 = 0, \quad b_2 = -C'_0 R^2, \quad N = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C'_{2k} e^{2ik\theta}. \quad (12)$$

Для сосредоточенных сил  $P_{mn}^{(1)}$  имеем

$$P_{mn}^{(1)} = \frac{E_s A_s}{2y_0 n} \Delta v_{mn}^{(1)}. \quad (13)$$

Взаимное смещение  $\Delta v_{mn}^{(1)}$  определяется аналогично нулевому приближению.

Аналогично могут быть построены решения задачи для упругой зоны в последующих приближениях.

Полученные системы уравнений первого приближения не являются пока замкнутыми, так как в правые части этих систем входят коэффициенты  $c_{2k}$  разложения функции  $H(\theta)$  в ряд Фурье. Для построения недостающих уравнений используем граничное условие (2). С помощью полученного решения находим  $\sigma_\theta^e(\theta)$  ( $r=\rho(\theta)$ ) с точностью до величин первого порядка относительно малого параметра  $\varepsilon$

$$\sigma_\theta^e = \sigma_\theta^{e(0)}(\theta)|_{r=c_0} + \varepsilon \left[ H(\theta) \frac{\partial \sigma_\theta^{e(0)}}{\partial r} + \sigma_\theta^{e(1)}(\theta) \right]_{r=c_0}.$$

Напряжения  $\sigma_\theta^e(\theta)$  зависят от коэффициентов ряда Фурье искомой функции  $H(\theta)$ . Для построения недостающих уравнений, позволяющих определить эти коэффициенты, требуем, чтобы обеспечилось условие (2). Для удовлетворения условия (2) используем метод наименьших квадратов.

Напряжение  $\sigma_\theta^e$  на  $L_0$  есть функция независимой переменной полярного угла  $\theta$  и  $(m_1+1)$  параметров  $c_0, c_{2k}$  ( $k=1,2,\dots,m_1$ ). Неизвестные параметры  $c_0, c_{2k}$  постоянны и подлежат определению. Для их определения проводим ряд вычислений. Разбиваем отрезок  $[0, 2\pi]$  изменения  $\theta$  на  $M_1$  частей, где

$$\theta_j = \theta_1 + j\Delta\theta \quad (j=0,1,2,\dots,M_1-1), \quad \Delta\theta = \frac{2\pi}{M_1}, \quad M_1 > m_1 + 1.$$

Вычисляем нормальное тангенциальное напряжение  $\sigma_\theta^e$  в точках разбиения

$$\sigma_\theta^e(\theta_j) = F(\theta_j, c_0, c_{2k}) \quad (j=0,1,2,\dots,M_1-1).$$

Следовательно, требуется найти такие значения неизвестных параметров  $c_0, c_{2k}$ , которые будут обеспечивать значениям функции окружного напряжения  $\sigma_\theta^e$  на  $L_0$  значения  $\sigma_s^p$  наилучшим образом.

Принцип наименьших квадратов утверждает, что наиболее вероятными значениями параметров будут такие, при которых сумма квадратов отклонений будет наименьшей

$$U = \sum_{j=0}^{M_1-1} [F(\theta_j, c_0, c_{2k}) - \sigma_s^p]^2 \rightarrow \min.$$

Записывая необходимое условие экстремума функции  $U$ , получим  $(m_1+1)$  уравнений с  $(m_1+1)$  неизвестными

$$\frac{\partial U_0}{\partial c_0} = 0, \quad \frac{\partial U_0}{\partial c_{2k}} = 0, \quad (k=1,2,\dots,m_1). \quad (14)$$

Система уравнений (14) замыкает полученные алгебраические системы задачи (12), (13). Перечисленные системы должны решаться совместно.

Отметим, что вопросы сходимости метода возмущений при решении упруго-пластических задач и теории неоднородной упругости подробно обсуждались в монографиях [19, 20].

Напомним, что комплексные потенциалы первого приближения зависят от компонент напряжений нулевого приближения и коэффициентов  $c_0, c_{2k}$ . Для определения напряжений в первом приближении (см. граничное условие (11)) используются коэффициенты  $c_0, c_{2k}$ . При этом приходится решать совместно системы уравнений (12)–(14).

### Анализ результатов

Совместное численное решение полученных систем алгебраических уравнений (12)–(14) дает возможность при заданной внешней нагрузке найти сосредоточенные силы, комплексные потенциалы и коэффициенты  $c_0, c_{2k}$  ( $k = 1, 2, \dots, m_1$ ).

Расчеты проводились для следующих значений свободных параметров:  $a_0/L=0,01$ ;  $y_0/L=0,25$ . Стрингеры считались выполненными из композита А1-сталь, а пластина – из сплава В95,  $E=7,1 \cdot 10^4$  МПа,  $E_s=11,5 \cdot 10^4$  МПа. Для упрощения было принято  $A_s/y_0h=1$ . Принималось, что число стрингеров и точек крепления конечно и равно 14, а величина  $M_1=72$ . Принималось, что  $p/\sigma_s=0,6$ ;  $\sigma_0/\sigma_s=0,75$ . Результаты расчетов коэффициентов разложения функции  $H(\theta)$  приводятся ниже.

$c_0$	$c_2$	$c_4$	$c_6$	$c_8$	$c_{10}$	$c_{12}$
1,903	0,798	0,511	0,384	0,267	0,188	0,139

### Выводы

Найдено решение плоской упруго-пластической задачи о распределении напряжений вокруг кругового отверстия, полностью охваченного зоной пластических деформаций для растягиваемой стрингерной пластины. Получена замкнутая система алгебраических уравнений, численное решение которой позволяет исследовать напряженное состояние стрингерной пластины с целиком охваченным пластической зоной отверстием. Построенные уравнения позволяют при заданных механических и геометрических характеристиках стрингерной пластины численными расчетами найти границу раздела упругих и пластических деформаций.

Предложенная методика решения упруго-пластической задачи для стрингерной пластины может быть развита для решения других упруго-пластических задач. Полученное в работе решение дает возможность рассматривать задачи с другими критериями пластичности, а также особо сложные упруго-пластические задачи, учитывающие зарождение и развитие трещин в упругой зоне. Стрингерная пластина может иметь не одно, а несколько отверстий или целую систему, поэтому дальнейшее исследование может быть продолжено в этом направлении.

### Литература

1. Мирсалимов В. М. Об одном способе решения плоских упругопластических задач. *Механика предельного состояния и смежные вопросы*: Материалы Всерос. науч. шк.-конф, посв. 85-летию профессора Д. Д. Ивлева. Ч. 1. Чебоксары: Чебоксар. пед. ун-т им. И. Я. Яковлева, 2015. С. 31–36.
2. Протосеня А. Г., Карасев М. А., Беляков Н. А. Упруго-пластическая задача для выработок различных форм поперечных сечений при условии предельного равновесия Кулона. *Физико-техн. пробл. разработки полезных ископаемых*. 2016. № 1. С. 71–81. <https://doi.org/10.1134/S1062739116010125>.
3. Abashidze Z. Elastoplastic problem for a plate with partially unknown boundary. *Transactions A. Razmadze Mathematical Institute*. 2017. Vol. 171. Iss. 1. P. 1–9. <https://doi.org/10.1016/j.trmi.2017.01.004>.
4. Senashov S. I., Gomonova O. V. Construction of elastoplastic boundary in problem of tension of a plate weakened by holes. *Int. J. Non-Linear Mechanics*. 2019. Vol. 108. P. 7–10. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2018.09.009>.
5. Мирсалимов В. М. Упругопластическая задача о растяжении пластины с круговым отверстием с учетом зарождения трещины в зоне упругой деформации. *Прикл. механика и техн. физика*. 2020. Т. 61. № 4. С. 162–173. <https://doi.org/10.1134/S0021894420040185>.

6. Ma Y., Lu A., Cai H. Analytical method for determining the elastoplastic interface of a circular hole subjected to biaxial tension-compression loads. *Mech. Based Design Structures and Machines*. 2020. <https://doi.org/10.1080/15397734.2020.1801461>.
7. Сенашов С. И., Савостьянова И. Л. Упругопластическая задача в условиях сложного сдвига. *Вестн. Чуваш. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева*. Сер: Механика предельного состояния. 2020. № 1(43). С. 66–72. <https://doi.org/10.37972/chgpu.2020.43.1.007>.
8. Мирсалимов В. М., Калантарлы Н. М. Решение упругопластической задачи для массива, ослабленного круговой выработкой при действии тектонических и гравитационных сил. *Изв. Тул.ун-та. Науки о Земле*. 2021. № 1. С. 207–216.
9. Ma Y., Lu A., Cai H., Zeng X. An analytical method for determining the plastic regions around two circular holes in an infinite medium. *Appl. Math. Modelling*. 2021. Vol. 89. Part 1. P. 636–653. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2020.07.033>.
10. Гомонова О. В., Сенашов С. И. Определение областей упругого и пластического деформирования в задаче об одноосном растяжении пластины, ослабленной отверстиями. *Прикл. механика и техн. физика*. 2021. Т. 62. № 1. С. 179–186. <https://doi.org/10.15372/PMTF20210119>.
11. Mirsalimov V. M. Elastic–plastic problem for a circular hole plate with regard to crack initiation in elastic zone. *Archive Appl. Mechs*. 2021. Vol. 91. P. 1329–1342. <https://doi.org/10.1007/s00419-020-01825-w>.
12. Галин Л. А. Упруго-пластические задачи. М.: Наука, 1984. 304 с.
13. Аннин Б. Д., Черепанов Г. П. Упругопластическая задача. Новосибирск: Наука, 1983. 239 с.
14. Мирсалимов В. М. Неоднородные упругопластические задачи. М.: Наука. 1987. 256 с.
15. Остросаблин Н. И. Плоское упругопластическое распределение напряжений около круговых отверстий. Новосибирск: Наука, 1984. 113 с.
16. Соколовский В. В. Теория пластичности. М.: Высш. шк., 1969. 608 с.
17. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
18. Мирсалимов В. М. Некоторые задачи конструкционного торможения трещины. *Физико-хим. механика материалов*. 1986. Т. 22. № 1. С. 84–88.
19. Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. М.: Наука, 1978. 208 с.
20. Ломакин В. А. Теория упругости неоднородных тел. М.: МГУ, 1976. 368 с.

*Поступила в редакцию 16.05.2021*

## **Пружно-пластична задача для стрингерної пластини з круговим отвором**

**М. В. Мір-Салім-заде**

Інститут математики і механіки НАН Азербайджану,  
AZ1141, Азербайджан, м. Баку, вул. Б. Вахабадзе, 9

*При розрахунку на міцність машин, конструкцій і споруд, що мають технологічні отвори, важливо враховувати пластичні області, що виникають навколо отворів. Однак невідомі форма і розміри пластичної області ускладнюють розв'язання пружно-пластичних задач. У даній роботі дається наближений метод і розв'язок плоскої пружно-пластичної задачі про розподіл напружень в тонкій пластині, підкріпленій регулярно системою ребер жорсткості (стрингерів). Вже згадана стрингерна пластина має круговий отвір, який цілком охоплюється зоною пластичних деформацій. На нескінченності пластина схильна до однорідного розтягування уздовж ребер жорсткості. До контуру кругового отвору прикладене постійне нормальне навантаження. Матеріали пластини і стрингерів прийняті ізотропними. Умови навантаження припускаються квазістатичними. Прийнято, що пластина знаходиться в плоско-напруженому стані. Як умова пластичності в пластичній зоні приймається умова пластичності Треска-Сен-Венана. Використовуються методи теорії збурень, теорії аналітичних функцій і метод найменших квадратів. Розв'язок поставленої пружно-пластичної задачі складається з двох етапів. На першому етапі знаходиться напружено-деформований стан для пружної зони, а потім за допомогою методу найменших квадратів визначається невідомою межа розділу пружною і пластичною зонами. Побудована в кожному наближенні замкнута система алгебраїчних рівнянь, числовий розв'язок якої дозволяє досліджувати напружено-деформований стан стрингерної пластини з повним охопленням отвору пластичною зоною, а також визначити величини зосереджених сил, які замінюють дію стрингерів. Знайдена межа розділу пружних і пластичних деформацій. Наведена методика розв'язання може бути розвита для розв'язання інших пружно-пластичних задач. Отриманий в роботі розв'язок дає можливість розглядати пружно-пластичну задачу для стрингерної пластини з іншими критеріями пластичності.*

**Ключові слова:** пластина, стрингери, пружно-пластична задача, межа розділу пружних і пластичних деформацій.