

УДК 517.95+518.517

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВИНТОВ С ШЕСТИГРАННОЙ ГОЛОВКОЙ ДЛЯ РЕАЛИЗАЦИИ НА 3D-ПРИНТЕРЕ

<sup>1</sup> **Т. И. Шейко**, д-р техн. наук  
[sheyko@ipmach.kharkov.ua](mailto:sheyko@ipmach.kharkov.ua)  
 ORCID: 0000-0003-3295-5998

<sup>1,2</sup> **К. В. Максименко-Шейко**, д-р техн. наук  
[m-sh@ipmach.kharkov.ua](mailto:m-sh@ipmach.kharkov.ua)  
 ORCID: 0000-0002-7064-2442

<sup>1</sup> Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины, 61046, Украина, г. Харьков, ул. Пожарского, 2/10

<sup>2</sup> Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, 61022, Украина, г. Харьков, площадь Свободы, 4

*В данной статье на основе теории R-функций разработаны методики и построены уравнения для моделирования винтов с шестигранной головкой и шлицами Bristol, Pentalobe, Polydrive и др., применяемые как в персональных компьютерах, так и в другом оборудовании высокого класса, для их последующей печати на 3D-принтере. Шлиц Bristol имеет четыре или шесть радиальных лучей-углублений. Преимуществом конструкции данного шлица является правильный перпендикулярный, а не касательный вектор приложения силы при вращении шлица инструментом, что минимизирует опасность его срыва. По этой причине шлиц Bristol используется в винтах из мягких металлов. По сравнению с внутренним шестигранником шлиц Bristol допускает заметно больший крутящий момент, лишь немногим более такового у шлица Torx. Этот тип шлицов используется в авиации, телекоммуникационном оборудовании высокого класса, камерах, воздушных тормозах, сельхозтехнике, астрономическом оборудовании и зарубежной военной технике. Разновидности со штифтом в центре встречаются в игровых приставках, для предотвращения использования плоской шлицевой отвертки как импровизированного ключа. Шлиц Pentalobe – пятилучевой шлиц, разработанный компанией Apple и используемый ею в своих продуктах для ограничения несанкционированной разборки. Впервые использован в середине 2009 года для крепежа аккумулятора MacBook Pro. Миниатюрная версия использовалась в iPhone 4 и последующих моделях, в MacBook Air (в моделях с конца 2010), в MacBook Pro с экранами Retina. Шлиц Polydrive представляет собой звездообразный шлиц с закругленными вершинами звезды. Применяется в автомобильной промышленности для задач, требующих высокого момента затяжки. Шлиц Torq-set – крестообразный шлиц для крепежа с высоким моментом затяжки. Пазы немного смещены и не пересекаются в одной точке. Крепеж с данным видом шлица используется в военной авиации, например в E-3, P-3, F-16, Airbus, Embraer и Bombardier Inc. Компания Phillips Screw Company владеет торговой маркой и производит крепеж с данным видом шлица. Стандартами, описывающими конструкцию шлица, являются National Aerospace Standard NASM 33781 и NASM 14191 для ребристой версии. Полученные уравнения для поверхностей винтов были проверены в ходе моделирования последних перед печатью на 3D-принтере. Технология 3D-печати позволяет снизить себестоимость и трудоемкость изготовления продукции, в том числе винтов со сложными шлицами. Аналитическая запись проектируемых объектов дает возможность использовать буквенные геометрические параметры, сложные суперпозиции функций, что, в свою очередь, позволяет оперативно изменять их конструктивные элементы. Свойство положительности построенных функций во внутренних точках объекта весьма удобно для реализации 3D-печати.*

**Ключевые слова:** R-функции, математическая модель, винт, шлиц, 3D-печать.

### Введение

Одной из новых технологий, которая в последнее время получает растущую популярность, стала 3D-печать. Она позволяет создавать объемные модели любых предметов при помощи специального оборудования – 3D-принтера. Преимущества использования современных 3D-принтеров: снижение себестоимости изготовления продукции и сокращение сроков ее появления на рынке, моделирование объектов любой формы и сложности, быстрота и высокая точность изготовления, воз-

Статья доступна по лицензии Creative Commons «Attribution» («Атрибуция») 4.0 Международная.  
 © Т. И. Шейко, К. В. Максименко-Шейко, 2021

возможность использования различных материалов. Однако возникает проблема задания информации для печати. В процессе подготовки к печати на 3D-принтере необходимо создать компьютерную 3D-модель желаемого объекта. В исследованиях по компьютерному моделированию сплошных тел, выполненных в работах А. G. Requicha [1–3], выделены восемь основных схем представления: 1) инженерные чертежи; 2) каркасное представление; 3) представление примитивами; 4) воксельное представление; 5) дискретные модели; 6) конструктивная сплошная (блочная) геометрия (Constructive Solid Geometry, CSG); 7) схемы представления разверткой; 8) граничное представление (Brep). Анализ приведенных выше классических представлений показал, что их практическое применение ограничено или требует значительных усилий для построения моделей сложных геометрических объектов. С точки зрения универсальности одним из наиболее перспективных выглядит функциональное представление, в основе которого лежит использование языка неявных математических функций с конструктивными возможностями теории R-функций, разработанной академиком Рвачевым В. Л. [4].

**Целью** статьи является разработка методик на основе теории R-функций и построение уравнений поверхностей винтов с различными видами шлицев с их последующей реализацией на 3D-принтере.

Шлиц крепёжного изделия – углубление в головке резьбовых крепёжных изделий для передачи этому изделию крутящего момента от инструмента. Шлицы могут быть прямыми, крестообразными, квадратными, из комбинации квадратов, внутренними шестигранниками, пятилучевыми, звездообразными, комбинированными и др. Помимо распространенных, широко используемых видов, существуют малораспространенные типы, используемые как антивандальные или для ограничения несанкционированного доступа. Антивандальными называют типы шлицов, задача которых как осложнить несанкционированный доступ в общественных местах, так и осложнить самостоятельное вскрытие и ремонт электронных устройств. Антивандальность часто базируется на том, что отвертки для необходимого шлица отсутствуют в стандартных наборах инструментов и найти их в продаже достаточно сложно. В некоторых случаях производитель может заменить редкий, но стандартизированный тип шлица на свой собственный, проприетарный, защищенный патентом, что позволяет не только максимально осложнить несанкционированное откручивание, но и преследовать любого независимого производителя отверток, не имеющего лицензии на производство от держателя патента. Примерами проприетарных шлицов можно назвать T-Groove, Slot-Lok, Pentagon, Tork-Nut, T-Slope.

**Основная часть**

При построении математических моделей методом R-функций будут использованы как про-

стейшие R-операции  $\begin{cases} x \wedge_0 y \equiv x + y - \sqrt{x^2 + y^2} \\ x \vee_0 y \equiv x + y + \sqrt{x^2 + y^2} \\ \bar{x} \equiv -x \end{cases}$ , так и R-операции для сглаживания острых кромок и

углов  $\begin{cases} x \wedge_\rho y = x + y - \sqrt{x^2 + y^2 + \frac{SR}{8\rho^2}(SR + |SR|)} \\ x \vee_\rho y = x + y + \sqrt{x^2 + y^2 + \frac{SR}{8\rho^2}(SR + |SR|)} \\ \bar{x} = -x \\ SR = \rho^2 - x^2 - y^2 \end{cases}$ , где  $\rho$  – радиус скругления углов.

При построении уравнений, соответствующих геометрическим объектам с точечной симметрией циклического типа, для сокращения количества R-операций будут использованы результаты следующей теоремы [5].

*Теорема.* Пусть трансляционная область  $\Sigma_0 = [\sigma_0(x, y) \geq 0]$  симметрична относительно оси абсцисс, а область  $\Sigma_1 = [\sigma_0(x - r_0, y) \geq 0]$  может быть размещена внутри сектора  $-\alpha \leq \theta \leq \alpha$ ,  $0 < \alpha < \frac{\pi}{n}$ . Области  $\Sigma_k = [\sigma_0(r \cos(\theta - \frac{2\pi k}{n}) - r_0, r \sin(\theta - \frac{2\pi k}{n})) \geq 0]$   $k = 0, 1, \dots, n - 1$  получены в результате поворо-

та области  $\Sigma_1 = [\sigma_0(x - r_0, y) \geq 0]$  вокруг начала координат на углы  $\frac{2\pi k}{n}$  ( $k = 0, 1, \dots, n-1$ ). Тогда уравнение границы  $\partial\Omega$  области  $\Omega = \bigcup_{k=0}^{n-1} \Sigma_k$  имеет вид  $\omega(x, y) \equiv \sigma_0(r \cos \mu(\theta, n) - r_0, r \sin \mu(\theta, n)) = 0$ ,

$$\left( r = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \arctg \frac{y}{x} \right), \text{ где } \mu(n\theta) = \frac{8}{n\pi} \sum_k (-1)^{k+1} \frac{\sin \left[ (2k-1) \frac{n\theta}{2} \right]}{(2k-1)^2}.$$

Для снятия фаски в работе мы используем уравнение конической поверхности, для которой направляющая описывается уравнением  $\omega(x, y) = 0$ , а вершина находится в точке  $A(x_0, y_0, z_0)$ . В итоге уравнение конической поверхности получается путем замены переменных

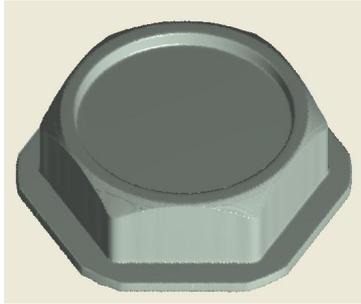
$$\begin{cases} x \leftarrow x_0 - z_0 \frac{x - x_0}{z - z_0} \\ y \leftarrow y_0 - z_0 \frac{y - y_0}{z - z_0} \end{cases} \quad \text{В}$$

уравнении  $\omega(x, y) = 0$ , а именно  $\omega \left( x_0 - z_0 \frac{x - x_0}{z - z_0}, y_0 - z_0 \frac{y - y_0}{z - z_0} \right) = 0$  [5].

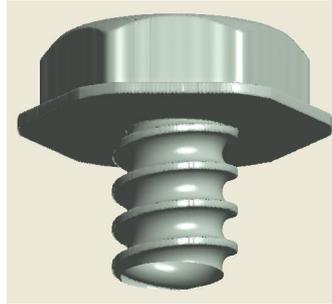
Построим математическую модель винта 6-32 (UTS) с шестигранной головкой и шлицем для крестовой отвёртки, применяемого в персональных компьютерах.

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2}; \theta = \arctg \frac{y}{x}; \mu = \frac{8}{n\pi} \sum_k (-1)^{k+1} \frac{\sin \left[ (2k-1) \frac{n\theta}{2} \right]}{(2k-1)^2}; \\ f1 &= 3 - \rho \cos \mu; \overline{f1} = 3.7 - \rho \cos \mu; x_0 = 0; y_0 = 0; z_0 = 4; n = 6; r = 1; r_1 = 1.8; \\ xk &= x_0 - z_0 \frac{x - x_0}{z - z_0}; yk = y_0 - z_0 \frac{y - y_0}{z - z_0}; \omega k = 16 - xk^2 - yk^2 \wedge_0 z + 1 \geq 0; \\ f2 &= (f1 \wedge_0 (1 - z^2) / 2) \wedge_0 \omega k \geq 0; f4 = (2.6^2 - x^2 - y^2) / 5.2 \wedge_0 z - 0.6 \geq 0; \\ f5 &= ((16 - x^2 - y^2) / 8 \wedge_0 (-1 - z)(1.3 + z)) \wedge_0 \overline{f1} \geq 0; h = 1; r_i = 1.6; \\ \mu 1 &= \frac{4h}{\pi^2} \sum_k (-1)^{k+1} \frac{\sin \left[ (2k-1) \left( \frac{\pi z}{h} - \frac{\theta}{2} \right) \right]}{(2k-1)^2}; \overline{ff3} = 0.4^2 - (\rho - 1.6)^2 - \mu 1^2 \geq 0; \overline{fi} = r_i^2 - \rho^2 \geq 0; \\ kk &= (\overline{fi} \wedge_0 \overline{ff3}) \wedge_0 (-1 - z)(6 + z) \geq 0; \\ \left\{ \begin{aligned} t1 &= (0.25^2 - x^2) / 0.5; t2 = (0.25^2 - y^2) / 0.5; \\ f31 &= t1 \vee_\rho t2 \geq 0; \rho = 1; f3 = f31 \wedge_0 (4 - x^2 - y^2) / 4 \geq 0; fs1 = f2 \wedge_0 -f3 \geq 0; \end{aligned} \right. \quad (1) \\ fs2 &= fs1 \wedge_0 -f4 \geq 0; fs = fs2 \vee_0 f5 \geq 0; \\ res &= (((\overline{fi} \wedge_0 \overline{ff3}) \wedge_0 (-1 - z)(6 + z))) \vee_0 fs \geq 0. \end{aligned}$$

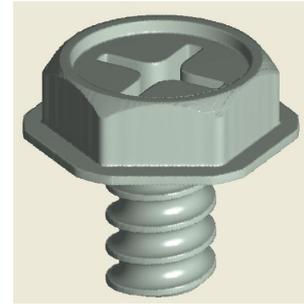
На рис. 1 приведены шестигранная головка винта с шестигранной шайбой, построенные по формуле  $(f2 \vee_0 f5) \wedge_0 \overline{f4} \geq 0$ . К головке винта по формуле  $((f2 \vee_0 f5) \wedge_0 \overline{f4}) \vee_0 kk \geq 0$  прикреплен стержень с наружной резьбой (рис. 2), уравнение которой можно построить согласно результатам работы [6]. Подставляя формулу для крестообразного шлица (1), окончательно получаем модель винта 6-32 (UTS) (рис. 3).



**Рис. 1. Шестигранная головка винта с шестигранной шайбой**



**Рис. 2. Винт со стержнем с наружной резьбой**



**Рис. 3. Модель винта 6-32 (UTS)**

Заменяв (1) на

$$t1 = 1 - \frac{\rho^2 \sin^2 \mu}{0.25^2} - \frac{\rho^2 \cos^2 \mu}{2^2} \geq 0; t2 = 0.8^2 - x^2 - y^2 \geq 0; f31 = t1 \vee_p t2 \geq 0; fs1 = f2 \wedge_0 - f31 \geq 0,$$

получаем винт с шестигранной головкой и шлицем типа Torx (рис. 4).

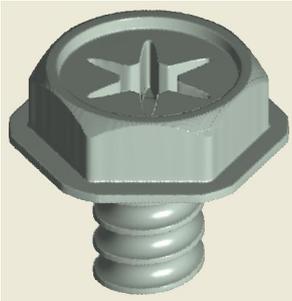
Заменяв (1) на

$$nol = 5; \mu1 = \frac{8}{nol\pi} \sum_k (-1)^{k+1} \frac{\sin \left[ (2k-1) \frac{nol\theta}{2} \right]}{(2k-1)^2};$$

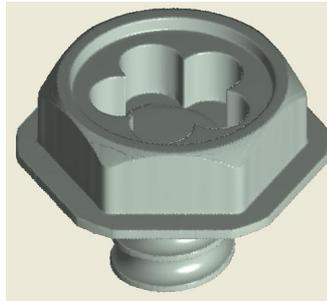
$$f31 = 0.8^2 - (ro \cos \mu1 - 1.3)^2 - (ro \sin \mu1)^2; f3 = f31 \vee_0 1.3^2 - x^2 - y^2 \geq 0,$$

получаем винт с шестигранной головкой и шлицем типа Pentalobe (рис. 5), который используется фирмами Apple и Meizu в персональных компьютерах.

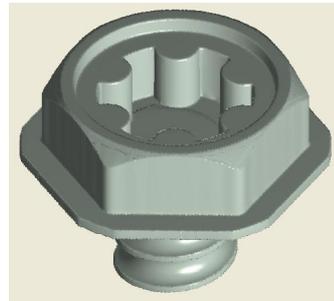
Заменяв (1) на  $f31 = -0.6^2 + (ro \cos \mu - 2)^2 + (ro \sin \mu)^2 \geq 0; f3 = f31 \wedge_0 2^2 - x^2 - y^2 \geq 0$ , получаем винт с шестигранной головкой и шлицем типа Polydrive (рис. 6).



**Рис. 4. Винт со шлицем типа Torx**



**Рис. 5. Винт со шлицем типа Pentalobe**



**Рис. 6. Винт со шлицем типа Polydrive**

Винт с бристольским шлицем (рис. 7) получим, заменяв (1) на

$$f31 = (0.5^2 - (ro \sin \mu)^2) \wedge_0 (2^2 - (ro \cos \mu)^2 - (ro \sin \mu)^2)((ro \cos \mu)^2 + (ro \sin \mu)^2 - 1.5^2) \geq 0;$$

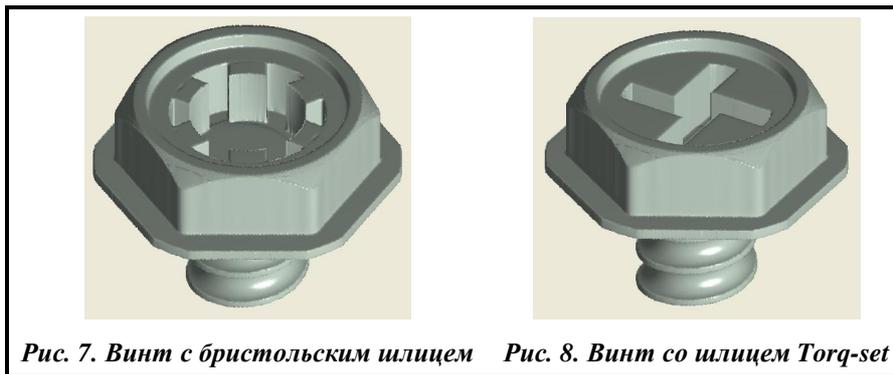
$$f3 = -f31 \wedge_0 2^2 - x^2 - y^2 \geq 0,$$

а со шлицем Torq-set (рис. 8) – на

$$d1 = (3-x)(x+0.7) \wedge_0 (0.7-y)y \geq 0; d2 = (x+0.7)(-x) \wedge_0 (3-y)y \geq 0;$$

$$d3 = (x+3)(0.7-x) \wedge_0 (0.7+y)(-y) \geq 0; d4 = (0.7-x)x \wedge_0 (0.7-y)(3+y) \geq 0;$$

$$f31 = ((d1 \vee_0 d2) \vee_0 d3) \vee_0 d4 \geq 0; f3 = f31 \wedge_0 2^2 - x^2 - y^2 \geq 0.$$



*Рис. 7. Винт с бристольским шлицем    Рис. 8. Винт со шлицем Torq-set*

Таким образом, построив модель основы винта в виде шестигранной головки с шестигранной шайбой и стержнем с наружной резьбой, а затем, включая в формулу основного блока винта лишь логическую формулу необходимого шлица, получаем искомый результат. При этом затраты на построение и изготовление минимизируются.

На рис. 9 приведены результаты 3D-печати некоторых из построенных моделей винтов.



*Рис. 9. Результаты 3D-печати моделей винтов*

### Выводы

Построение математической модели – это центральный этап исследования или проектирования любой системы. От качества модели зависит весь последующий анализ объекта. Модель должна быть достаточно точной, адекватной и удобной для использования.

Подводя итог, следует сказать, что в работе впервые, благодаря теории R-функций, разработаны методики и построены уравнения винтов с шестигранной головкой и шлицами различных типов, применяемые как в персональных компьютерах, так и в другом оборудовании высокого класса для реализации на 3D-принтере. Аналитическая запись проектируемых объектов дает возможность использовать буквенные геометрические параметры, сложные суперпозиции функций, что, в свою очередь, позволяет оперативно изменять их конструктивные элементы.

Предложенный метод задания формы изделий с помощью ограниченного числа параметров может существенно сократить трудоемкость работ в тех случаях, когда требуется просмотреть боль-

шое количество вариантов конструкции в поисках оптимального решения. При параметрическом задании изменение расчетных областей производится практически мгновенно.

С помощью R-функций разработан и реализован алгоритм поэтапного построения уравнений винтов, что позволяет проверять и вносить коррективы в модель на каждом этапе ее построения.

Достоверность полученных результатов, их адекватность проектируемым объектам подтверждается визуализацией как в условиях эксплуатации программы RFPReview, так и реализацией на 3D-принтере.

### Литература

1. Requicha A. A. G. Representations for rigid solids: theory, methods, and systems. *Computing Surveys*. 1980. Vol. 12. No. 4. P. 437–464. <https://doi.org/10.1145/356827.356833>.
2. Requicha A. A. G., Voelcker H. B. Solid modeling: a historical summary and contemporary assessment. *IEEE Computer Graphics and Appl.* 1982. Vol. 2. Iss. 2. P. 9–24. <https://doi.org/10.1109/MCG.1982.1674149>.
3. Requicha A. A. G., Voelcker H. Solid modeling: current status and research directions. *IEEE Computer Graphics and Appl.* 1983. Vol. 3. Iss. 7. P. 25–37. <https://doi.org/10.1109/MCG.1983.263271>.
4. Рвачев В. Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. Киев: Наук. думка, 1982. 552 с.
5. Максименко-Шейко К. В. R-функции в математическом моделировании геометрических объектов и физических полей. Харьков: ИПМаш НАН Украины, 2009. 306 с.
6. Sheyko T. I., Maksymenko-Sheiko K. V., Morozova A. I. Screw-type symmetry in machine components and design at implementation on a 3D printer. *J. Mech. Eng. – Problemy Mashynobuduvannia*. 2019. Vol. 22. No. 1. P. 60–66. <https://doi.org/10.15407/pmach2019.01.060>.

Поступила в редакцію 26.07.2021

## Математичне та комп'ютерне моделювання гвинтів з шестигранною голівкою для реалізації на 3D-принтері

<sup>1</sup> Т. І. Шейко, <sup>1,2</sup> К. В. Максименко-Шейко

<sup>1</sup> Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України, 61046, Україна, м. Харків, вул. Пожарського, 2/10

<sup>2</sup> Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, 61022, Україна, м. Харків, майдан Свободи, 4

У даній статті на основі теорії R-функцій розроблено методику і побудовано рівняння для моделювання гвинтів із шестигранною голівкою та шліцями типу Bristol, Pentalobe, Polydrive та ін., які застосовуються як в персональних комп'ютерах, так і в іншому обладнанні високого класу, для їхнього подальшого друку на 3D-принтері. Шліць типу Bristol має чотири або шість радіальних променів-заглиблень. Перевагою конструкції даного шліця є правильний перпендикулярний, а не дотичний вектор прикладання сили при обертанні шліця інструментом, що мінімізує небезпеку його зриву. Через це шліць Bristol використовується в гвинтах з м'яких металів. Порівняно з внутрішнім шестигранником шліць Bristol допускає помітно більший крутний момент, лише трохи більше такого, ніж у шліцах Torx. Цей тип шліців використовується в авіації, телекомунікаційному обладнанні високого класу, камерах, повітряних гальмах, сільгосптехніці, астрономічному обладнанні та зарубіжній військовій техніці. Різновиди зі штифтом в центрі зустрічаються в ігрових приставках, для запобігання використанню плоскої шліцьової викрутки як імпровізованого ключа. Шліць Pentalobe – n'ятипроменевий шліць, розроблений компанією Apple і використовуваний нею в своїх продуктах для обмеження несанкціонованого розбирання. Вперше використаний в середині 2009 року для кріплення акумулятора MacBook Pro. Мініатюрна версія використовувалася в iPhone 4 і подальших моделях, в MacBook Air (в моделях з кінця 2010 р.), в MacBook Pro з екранами Retina. Шліць Polydrive – зіркоподібний шліць з заокругленими вершинами зірки. Застосовується в автомобільній промисловості для задач, що вимагають високого моменту затягування. Шліць Torq-set – хрестоподібний шліць для кріплення з високим моментом затяжки. Пази трохи зміщені і не перетинаються в одній точці. Кріплення з даним видом шліця використовується у військовій авіації, наприклад в E-3, P-3, F-16, Airbus, Embraer і Bombardier Inc. Компанія Phillips Screw Company володіє торговою маркою і виробляє кріплення з даним видом шліця. Стандартами, що описують конструкцію шліця, є National Aerospace Standard NASM 33781 і NASM 14191 для ребристої версії. Отримані рівняння для поверхонь гвинтів було перевірено в ході моделювання останніх перед друком на

*3D-принтері. Технологія 3D-друку дозволяє знизити собівартість і трудомісткість виготовлення продукції, в тому числі гвинтів зі складними шліцями. Аналітичний запис проєктованих об'єктів дає можливість використовувати буквені геометричні параметри, складні суперпозиції функцій, що, в свою чергу, дозволяє оперативно змінювати їх конструктивні елементи. Властивість позитивності побудованих функцій у внутрішніх точках об'єкта є дуже зручною для реалізації 3D-друку.*

**Ключові слова:** *R-функції, математична модель, гвинт, шліц, 3D-друк.*