

УДК 539.3

КОЛЕБАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СЭНДВИЧ-ОБОЛОЧКИ С НАПОЛНИТЕЛЕМ, ИЗГОТОВЛЕННЫМ С ПОМОЩЬЮ ТЕХНОЛОГИИ FDM

¹ **Б. В. Успенский**, канд. техн. наук
Uspensky.kubes@gmail.com
ORCID: 0000-0001-6360-7430

¹ **К. В. Аврамов**, д-р техн. наук
kvavramov@gmail.com
ORCID: 0000-0002-8740-693X

^{1,2} **И. И. Деревянко**, канд. техн. наук
dereviankoi2406@gmail.com
ORCID: 0000-0002-1477-3173

¹ Институт проблем
машиностроения
им. А. Н. Подгорного
НАН Украины,
61046, Украина, г. Харьков,
ул. Пожарского, 2/10

² Государственное предприятие
«Конструкторское бюро
«Южное» им. М. К. Янгеля»,
49008, Украина, г. Днепр,
ул. Криворожская, 3

Представлена модель динамического деформирования трёхслойной цилиндрической оболочки с сотовым наполнителем, изготовленным с помощью технологии FDM, и обшивками, армированными направленными углеродными нанотрубками. Рассматривается сотовый наполнитель, изготовленный из термопластика ULTEM 9085. Для анализа напряжённо-деформированного состояния сотового наполнителя использована процедура конечно-элементной гомогенизации. В результате этой процедуры динамический отклик сотового наполнителя моделируется однородным ортотропным материалом, механические свойства которого соответствуют свойствам наполнителя. В основе предложенной модели лежит теория высокого порядка, расширенная для анализа сэндвич-конструкций. Проекции перемещений обшивок раскладываются по поперечной координате вплоть до квадратичных слагаемых. Проекции перемещений сотового наполнителя раскладываются по поперечной координате вплоть до кубических слагаемых. Для обеспечения целостности конструкции используются условия непрерывности перемещений оболочки на стыке слоёв. Исследование линейных колебаний оболочки производится с помощью метода Рэлея-Ритца. Для его применения выводится потенциальная и кинетическая энергии конструкции. Рассмотрены собственные частоты и формы колебаний цилиндрической сэндвич-оболочки, закреплённой с одной стороны. Исследована зависимость форм и частот колебаний от толщины сотового наполнителя и направления армирования обшивок оболочки. Обнаружено, что для собственных форм сэндвич-оболочки характерно меньшее число волн в окружном направлении, а также намного более раннее появление осесимметричных форм. Это означает, что при анализе резонансных колебаний сэндвич-оболочки необходимо учитывать осесимметричные формы. Изменение направления армирования обшивок углеродными нанотрубками позволяет существенно влиять на частоты собственных колебаний оболочки, характеризующихся ненулевым числом волн в окружном направлении. Обнаружено, что этот параметр не влияет на частоты осесимметричных форм рассматриваемой оболочки.

Ключевые слова: цилиндрическая сэндвич-оболочка, аддитивные технологии, сотовый наполнитель, нанокompозитная обшивка, собственные формы, осесимметричная форма колебаний.

Введение

Многослойные тонкостенные сэндвич-конструкции с сотовым наполнителем широко используются при создании объектов с высоким соотношением прочности и массы в аэрокосмических, морских, энергетических и оборонных приложениях. Поэтому исследования таких структур проводились множеством учёных. Целая серия работ посвящена исследованию тонкостенных сэндвич-конструкций, в которых наполнитель или обшивки усиливаются графеновыми нанотрубками. Свободные колебания сэндвич-панелей двойной кривизны с функционально-градиентными обшивками рассмотрены в [1]. Нелинейные свободные и вынужденные колебания цилиндрических сэндвич-панелей с ауксетическим сотовым наполнителем и обшивками, армированными углеродными нанотрубками, освещены в [2]. Свободные колебания скрученных конических сэндвич-панелей с функционально градиентными обшивками, армированными графеном, и однородным сотовым наполнителем исследованы в [3]. Анализ потери устойчивости сэндвич-пластины с сотовым наполнителем и нанокompозитными обшивками описан в [4].

Существуют работы, в которых рассмотрены колебания цилиндрических сэндвич-оболочек с композитными обшивками. В работе [5] теория Флюгге применяется для анализа динамики тонко-

Статья доступна по лицензии Creative Commons «Attribution» («Атрибуция») 4.0 Международная.
© Б. В. Успенский, К. В. Аврамов, И. И. Деревянко, 2021

стенной цилиндрической сэндвич-оболочки. Нелинейные колебания цилиндрических композитных ауксетических сэндвич-панелей рассмотрены в [6]. Исследование различных свойств колебаний тонкостенных сэндвич-конструкций приведено в [7–11].

В работе [12] предложена расширенная теория высокого порядка для анализа свободных колебаний сэндвич-пластины. В ней колебания каждого слоя конструкции описываются отдельной системой пяти независимых функций. Проекция перемещений наполнителя описывается полиномами вплоть до третьей степени по поперечной координате этого слоя.

В данной статье теория, описанная в [12], применяется для исследования колебаний трехслойных цилиндрических оболочек. Перемещения каждого слоя цилиндрической сэндвич-оболочки описываются своим набором переменных, который состоит из трёх проекций перемещений и двух углов поворота нормали к срединной поверхности слоя. Таким образом, основные неизвестные включают в себя пятнадцать переменных. Проекция перемещений обшивок раскладывается по поперечной координате вплоть до квадратичных слагаемых. Проекция перемещений сотового наполнителя раскладывается по поперечной координате вплоть до кубических слагаемых. Для исследования линейных колебаний оболочки применяется метод Релея-Ритца. Свойства линейных колебаний цилиндрических сэндвич-оболочек исследуются с помощью численного моделирования.

Постановка задачи

Рассматривается трёхслойная цилиндрическая сэндвич-оболочка (рис. 1) длины L с внутренним радиусом R . Срединным слоем цилиндрической оболочки является сотовый наполнитель, изготовленный с помощью технологии FDM. Эскиз одной ячейки сотового наполнителя и её геометрические размеры приведены на рис. 2. Наполнитель состоит из правильных шестиугольников. С наружной и внутренней сторон оболочки к сотовому слою крепятся верхняя и нижняя обшивки, изготовленные из композита, армированного углеродными нанотрубками (УНТ). Толщина слоёв оболочки (внешнего, среднего и внутреннего) обозначается как h_t , h_c , h_b . В дальнейшем всюду индекс t соответствует внешней обшивке, индекс c – слою сотового наполнителя, индекс b – внутренней обшивке оболочки. Предполагается, что соединения между слоями конструкции являются абсолютно жёсткими.

Для описания напряженно-деформированного состояния трёхслойной конструкции воспользуемся цилиндрической системой координат. Продольную и окружную координаты оболочки обозначим через x и φ (рис. 1). Для внешнего, среднего и внутреннего слоев оболочки введем свои локальные поперечные координаты z_t , z_c , z_b соответственно. Таким образом, трёхслойная цилиндрическая оболочка анализируется в трех цилиндрических системах координат (x, φ, z_i) ; $i=t, c, b$. Каждый слой изучается в своей системе координат.

В данной статье рассмотрены линейные колебания трёхслойной цилиндрической оболочки. Связь между напряжениями и деформациями является линейной и описывается законом Гука. Деформации и перемещения являются малыми, а связь между ними – линейной.

Для исследования колебаний оболочки сотовый наполнитель заменяется эквивалентным однородным ортотропным слоем, параметры которого рассчитываются с помощью процедуры гомогенизации упругого сотового наполнителя. Различные подходы к этой процедуре описаны в [13, 14]. Закон Гука для однородного ортотропного материала имеет вид

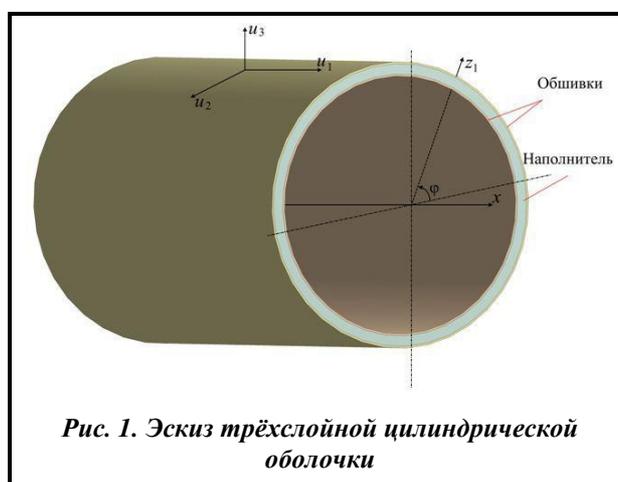


Рис. 1. Эскиз трёхслойной цилиндрической оболочки

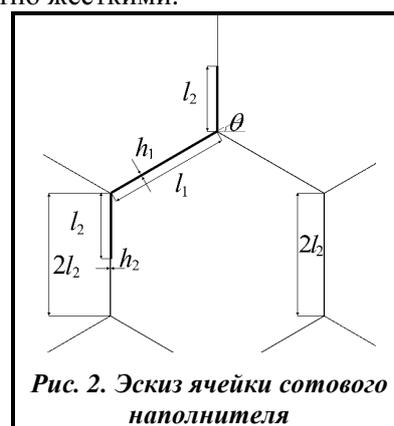


Рис. 2. Эскиз ячейки сотового наполнителя

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx}^{(c)} \\ \sigma_{\varphi\varphi}^{(c)} \\ \sigma_{zz}^{(c)} \\ \sigma_{\varphi z}^{(c)} \\ \sigma_{xz}^{(c)} \\ \sigma_{x\varphi}^{(c)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx}^{(c)} \\ \epsilon_{\varphi\varphi}^{(c)} \\ \epsilon_{zz}^{(c)} \\ 2\epsilon_{\varphi z}^{(c)} \\ 2\epsilon_{xz}^{(c)} \\ 2\epsilon_{x\varphi}^{(c)} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где $\sigma_{xx}^{(c)}, \sigma_{\varphi\varphi}^{(c)}, \sigma_{zz}^{(c)}, \sigma_{\varphi z}^{(c)}, \sigma_{xz}^{(c)}, \sigma_{x\varphi}^{(c)}$ – элементы тензора напряжений; $\epsilon_{xx}^{(c)}, \epsilon_{\varphi\varphi}^{(c)}, \epsilon_{zz}^{(c)}, \epsilon_{\varphi z}^{(c)}, \epsilon_{xz}^{(c)}, \epsilon_{x\varphi}^{(c)}$ – элементы тензора деформаций. Элементы упругой матрицы C_{11}, C_{12}, \dots получены с помощью процедуры гомогенизации сотового наполнителя, основанной на конечно-элементном анализе и описанной в [13].

Рассмотрим свойства композита, представляющего собой матрицу, армированную УНТ, из которого состоят обшивки рассматриваемой оболочки. УНТ считаются расположенными вдоль координатных линий x . В данной работе рассматривается нанокompозит с распределением УНТ по толщине. Объёмная доля УНТ в композите обозначается V_{CNT}^* .

Механические свойства нанокompозитного материала могут быть рассчитаны с помощью расширенного правила смешивания [15, 16]

$$E_{11}(z) = \eta_1 V_{CNT}(z) E_{11}^{CNT} + V_m(z) E^m; \quad E_{22}(z) = \frac{\eta_2 E_{22}^{CNT} E^m}{V_{CNT}(z) E^m + V_m(z) E_{22}^{CNT}};$$

$$G_{12}(z) = \frac{\eta_3 G_{12}^{CNT} G^m}{V_{CNT}(z) G^m + V_m(z) G_{12}^{CNT}}; \quad \nu_{12}(z) = V_{CNT}(z) \nu_{12}^{CNT} + V_m(z) \nu^m;$$

$$\nu_{21}(z) = \nu_{12}(z) E_{22}(z) / E_{11}(z); \quad \rho(z) = V_{CNT}(z) \rho^{CNT} + V_m(z) \rho^m; \quad V_m(z) = 1 - V_{CNT}(z),$$

где $E_{11}^{CNT}, E_{22}^{CNT}, G_{12}^{CNT}$ – модули Юнга и модуль сдвига УНТ; ν_{12}^{CNT} – коэффициент Пуассона УНТ; η_1, η_2, η_3 – параметры эффективности наноармирования; E^m, G^m – модуль Юнга и модуль сдвига вещества матрицы; ρ^{CNT}, ρ^m – плотности УНТ и матрицы.

Для учёта сдвиговых деформаций обшивок модуль сдвига нанокompозита принимаются [17] $G_{13}(z) = G_{12}(z); G_{23}(z) = G_{12}(z)$. Закон Гука для обшивок имеет вид

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}(z) & Q_{12}(z) \\ Q_{12}(z) & Q_{22}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{\varphi\varphi} \end{bmatrix};$$

$$\sigma_{\varphi z} = G_{23}(z) \epsilon_{\varphi z}; \quad \sigma_{xz} = G_{13}(z) \epsilon_{xz}; \quad \sigma_{x\varphi} = G_{12}(z) \epsilon_{x\varphi},$$

где

$$Q_{11}(z) = \frac{E_{11}(z)}{1 - \nu_{12}(z) \nu_{21}(z)}; \quad Q_{22}(z) = \frac{E_{22}(z)}{1 - \nu_{12}(z) \nu_{21}(z)}; \quad Q_{12}(z) = \frac{\nu_{21}(z) E_{11}(z)}{1 - \nu_{12}(z) \nu_{21}(z)};$$

$\epsilon_{x\varphi}, \epsilon_{\varphi z}, \epsilon_{xz}$ – деформации сдвига; $\epsilon_{xx}, \epsilon_{\varphi\varphi}, \epsilon_{\varphi z}, \epsilon_{xz}, \epsilon_{x\varphi}$ – элементы тензора деформаций; $\sigma_{x\varphi}, \sigma_{\varphi z}, \sigma_{xz}$ – напряжения сдвига; $\sigma_{xx}, \sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{\varphi z}, \sigma_{xz}, \sigma_{x\varphi}$ – элементы тензора напряжений.

Напряжённо-деформированное состояние сэндвич-оболочки

Для исследования линейных колебаний конструкций используется метод Рэлея-Ритца. Для применения этого метода необходимо рассмотреть динамическое деформирование пластины и вывести кинетическую и потенциальную энергии конструкции.

Проекция перемещений точек i -го слоя конструкции на координатные линии (x, φ, z_i) обозначим $u^{(i)}_1(x, \varphi, z_i, \tau), u^{(i)}_2(x, \varphi, z_i, \tau), u^{(i)}_3(x, \varphi, z_i, \tau), i = \{t, c, b\}$, где τ – время. Проекция перемещений внешней и внутренней обшивок принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} u^{(i)}_1(x, \varphi, z_i, \tau) &= u^{(i)}(x, \varphi, \tau) + z_i \varphi^{(i)}_{1,1}(x, \varphi, \tau) + z_i^2 \varphi^{(i)}_{1,2}(x, \varphi, \tau); \\ u^{(i)}_2(x, \varphi, z_i, \tau) &= v^{(i)}(x, \varphi, \tau) + z_i \varphi^{(i)}_{2,1}(x, \varphi, \tau) + z_i^2 \varphi^{(i)}_{2,2}(x, \varphi, \tau); \\ u^{(i)}_3(x, \varphi, z_i, \tau) &= w^{(i)}(x, \varphi, \tau), \quad i = \{t, b\}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $u^{(i)}, v^{(i)}, w^{(i)}, i=\{t, b\}$ – проекции перемещений срединной поверхности на координатные линии (x, φ, z_i) ; $\varphi^{(i)}_{1,1}, \varphi^{(i)}_{2,1}, i=\{t, b\}$ – углы поворота нормали к срединной поверхности. Функции $\varphi^{(i)}_{1,2}, \varphi^{(i)}_{2,2}$ определяются из граничных условий, которые рассматриваются ниже.

Проекции перемещений наполнителя раскладываются по степеням z_c так:

$$\begin{aligned} u^{(c)}_1(x, \varphi, z_c, \tau) &= u^{(c)}(x, \varphi, \tau) + z_c \varphi^{(c)}_{1,1}(x, \varphi, \tau) + z_c^2 \varphi^{(c)}_{1,2}(x, \varphi, \tau) + z_c^3 \varphi^{(c)}_{1,3}(x, \varphi, \tau); \\ u^{(c)}_2(x, \varphi, z_c, \tau) &= v^{(c)}(x, \varphi, \tau) + z_c \varphi^{(c)}_{2,1}(x, \varphi, \tau) + z_c^2 \varphi^{(c)}_{2,2}(x, \varphi, \tau) + z_c^3 \varphi^{(c)}_{2,3}(x, \varphi, \tau); \\ u^{(c)}_3(x, \varphi, z_c, \tau) &= w^{(c)}(x, \varphi, \tau) + z_c \varphi^{(c)}_{3,1}(x, \varphi, \tau) + z_c^2 \varphi^{(c)}_{3,2}(x, \varphi, \tau), \end{aligned} \quad (3)$$

где $u^{(c)}, v^{(c)}, w^{(c)}$ – проекции перемещений срединной поверхности наполнителя; $\varphi^{(c)}_{1,1}, \varphi^{(c)}_{2,1}$ – углы поворота нормали к срединной поверхности. Функции $\varphi^{(c)}_{1,2}, \varphi^{(c)}_{2,2}, \varphi^{(c)}_{3,2}, \varphi^{(c)}_{1,3}, \varphi^{(c)}_{2,3}, \varphi^{(c)}_{3,1}$ определяются из условий непрерывности перемещений, которые рассматриваются ниже.

Таким образом, напряженно-деформированное состояние конструкции описывается пятнадцатью функциями

$$u^{(i)}(x, \varphi, \tau), v^{(i)}(x, \varphi, \tau), w^{(i)}(x, \varphi, \tau), \varphi^{(i)}_{1,1}(x, \varphi, \tau), \varphi^{(i)}_{2,1}(x, \varphi, \tau), i=\{t, b, c\}. \quad (4)$$

Связь между деформациями и перемещениями слоев оболочки представим так [18]:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{(i)}_{xx} &= \frac{\partial u^{(i)}_1}{\partial x}; \quad \varepsilon^{(i)}_{\varphi\varphi} = \frac{1}{1 + \frac{z_i}{R_i}} \left(\frac{1}{R_i} \frac{\partial u^{(i)}_2}{\partial \varphi} + \frac{u^{(i)}_3}{R_i} \right); \quad \varepsilon^{(i)}_{zz} = \frac{\partial u^{(i)}_3}{\partial z_i}; \\ \varepsilon^{(i)}_{\varphi z} &= \frac{\partial u^{(i)}_2}{\partial z_i} + \frac{1}{R_i \left(1 + \frac{z_i}{R_i} \right)} \left(\frac{\partial u^{(i)}_3}{\partial \varphi} - u^{(i)}_2 \right); \quad \varepsilon^{(i)}_{xz} = \frac{\partial u^{(i)}_1}{\partial z_i} + \frac{\partial u^{(i)}_3}{\partial x}; \\ \varepsilon^{(i)}_{\varphi x} &= \frac{\partial u^{(i)}_2}{\partial x} + \frac{1}{R_i \left(1 + \frac{z_i}{R_i} \right)} \frac{\partial u^{(i)}_1}{\partial \varphi}, \quad i=\{t, c, b\}, \end{aligned}$$

где радиусы срединных поверхностей слоев определяются следующим образом:

$$R_b = R + h_b/2; \quad R_c = R + h_b + h_c/2; \quad R_t = R + h_b + h_c + h_t/2.$$

Для расчета слагаемых разложений (2) используем граничные условия [18]

$$\sigma^{(t)}_{xz}(x, \varphi, h_t/2, \tau) = \sigma^{(t)}_{\varphi z}(x, \varphi, h_t/2, \tau) = 0; \quad \sigma^{(b)}_{xz}(x, \varphi, -h_b/2, \tau) = \sigma^{(b)}_{\varphi z}(x, \varphi, -h_b/2, \tau) = 0. \quad (5)$$

Условия непрерывности перемещений в точках соединения наполнителя с обшивками имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} u^{(i)}_i(x, \varphi, -h_i/2, \tau) &= u^{(i)}_i(x, \varphi, h_i/2, \tau), \quad i=\{1, 2, 3\}; \\ u^{(b)}_i(x, \varphi, h_b/2, \tau) &= u^{(c)}_i(x, \varphi, -h_c/2, \tau), \quad i=\{1, 2, 3\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Подстановка (2), (3) в (6) и (5), позволяет выразить разложения (2), (3) через искомые функции (4). Тогда компоненты тензора деформаций можно представить в следующей форме:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{(j)}_{xx} &= \varepsilon^{(j)}_{xx,0} + z_j k^{(j)}_{xx,0} + z_j^2 k^{(j)}_{xx,1} + z_j^3 k^{(j)}_{xx,2}; \\ \varepsilon^{(j)}_{\varphi\varphi} &= \varepsilon^{(j)}_{\varphi\varphi,0} + z_j k^{(j)}_{\varphi\varphi,0} + z_j^2 k^{(j)}_{\varphi\varphi,1} + z_j^3 k^{(j)}_{\varphi\varphi,2}; \\ \varepsilon^{(j)}_{x\varphi} &= \varepsilon^{(j)}_{x\varphi,0} + z_j k^{(j)}_{x\varphi,0} + z_j^2 k^{(j)}_{x\varphi,1} + z_j^3 k^{(j)}_{x\varphi,2}; \\ \varepsilon^{(j)}_{xz} &= \varepsilon^{(j)}_{xz,0} + z_j k^{(j)}_{xz,0} + z_j^2 k^{(j)}_{xz,1} + z_j^3 k^{(j)}_{xz,2}; \\ \varepsilon^{(j)}_{\varphi z} &= \varepsilon^{(j)}_{\varphi z,0} + z_j k^{(j)}_{\varphi z,0} + z_j^2 k^{(j)}_{\varphi z,1} + z_j^3 k^{(j)}_{\varphi z,2}; \\ j &= \{t, b, c\}; \\ \varepsilon^{(c)}_{zz} &= \varepsilon^{(c)}_{zz,0} + z_c k^{(c)}_{zz,0}, \end{aligned} \quad (7)$$

где коэффициенты разложения по $z_j, j=\{t, b, c\}$ являются линейными функциями переменных (4) и их частных производных по x и φ .

Кинетическая энергия трёхслойной конструкции представляется в виде суммы кинетических энергий каждого из слоев в отдельности

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=\{t,c,b\}} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h_i}{2}}^{\frac{h_i}{2}} \rho_i(z_i) \left(\dot{u}^{(i)}_1)^2 + (\dot{u}^{(i)}_2)^2 + (\dot{u}^{(i)}_3)^2 \right) (R_i + z_i) dz_i d\varphi dx,$$

где точка означает производную по времени; $\rho_i(z_i)$ – плотность i -го слоя.

После интегрирования по z_i , кинетическая энергия всей конструкции принимает форму

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=\{t,b\}} \int_0^L \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^4 \left(r^{(i)}_k T^{(i)}_k \right) d\varphi dx + \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \left(T^{(c)}_0 + T^{(c)}_2 + T^{(c)}_4 \right) d\varphi dx, \quad (8)$$

где $r^{(i)}_j = \int_{-\frac{h_i}{2}}^{\frac{h_i}{2}} z_i^j \rho_i(z_i) dz_i$, $i=\{t,b\}$; $T^{(i)}_k$, $i=\{t,b\}$, $k=0\dots 4$, $T^{(c)}_k$, $k=\{2,4,6\}$ – квадратичные формы производных по времени функций (4) и их частных производных по x и φ .

Потенциальную энергию среднего слоя представим в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Pi^{(c)} = & \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} \left(\sigma^{(c)}_{xx} \epsilon^{(c)}_{xx} + \sigma^{(c)}_{\varphi\varphi} \epsilon^{(c)}_{\varphi\varphi} + \sigma^{(c)}_{zz} \epsilon^{(c)}_{zz} + 2\sigma^{(c)}_{x\varphi} \epsilon^{(c)}_{x\varphi} + \right. \\ & \left. + 2\sigma^{(c)}_{\varphi z} \epsilon^{(c)}_{\varphi z} + 2\sigma^{(c)}_{xz} \epsilon^{(c)}_{xz} \right) (R_c + z_c) dz_c d\varphi dx. \end{aligned} \quad (9)$$

В выражении (9) учтем закон Гука (1) и (7). После интегрирования по z_c потенциальная энергия представляется в виде

$$\Pi^{(c)} = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \left(\Pi^{(c)}_0 + \Pi^{(c)}_2 + \Pi^{(c)}_4 \right) d\varphi dx,$$

где $\Pi^{(c)}_k$, $k=\{2,4,6\}$ – квадратичные формы коэффициентов разложений (7).

Аналогично, потенциальная энергия обшивок представляется следующим образом:

$$\begin{aligned} \Pi^{(i)} = & \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h_i}{2}}^{\frac{h_i}{2}} \left(\sigma^{(i)}_{xx} \epsilon^{(i)}_{xx} + \sigma^{(i)}_{\varphi\varphi} \epsilon^{(i)}_{\varphi\varphi} + \sigma^{(i)}_{x\varphi} \epsilon^{(i)}_{x\varphi} + \sigma^{(i)}_{\varphi z} \epsilon^{(i)}_{\varphi z} + \sigma^{(i)}_{xz} \epsilon^{(i)}_{xz} \right) (R_i + z_i) dz_i d\varphi dx = \\ & = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h_i}{2}}^{\frac{h_i}{2}} \left(Q_{11} \left(\epsilon^{(i)}_{xx} \right)^2 + 2Q_{12} \epsilon^{(i)}_{\varphi\varphi} \epsilon^{(i)}_{xx} + Q_{22} \left(\epsilon^{(i)}_{\varphi\varphi} \right)^2 + G_{23} \left(\epsilon^{(i)}_{\varphi z} \right)^2 + \right. \\ & \left. + G_{13} \left(\epsilon^{(i)}_{xz} \right)^2 + G_{12} \left(\epsilon^{(i)}_{x\varphi} \right)^2 \right) (R_i + z_i) dz_i d\varphi dx, \quad i=\{t,b\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Произведем интегрирование (10) по z_i . Тогда потенциальную энергию представим в следующем виде:

$$\Pi^{(i)} = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \sum_{j=0}^4 \Pi^{(i)}_j(x, \varphi) R_i d\varphi dx, \quad i=\{t,b\},$$

где $\Pi^{(i)}_j$, $i=\{t,b\}$, $j=0\dots 4$ – квадратичные формы функций (4) и их частных производных по x и φ .

Потенциальная энергия конструкции равняется сумме потенциальных энергий трех ее слоев

$$\Pi = \Pi^{(t)} + \Pi^{(c)} + \Pi^{(b)}. \quad (11)$$

В дальнейшем рассматриваются консольные цилиндрические оболочки, которые защемлены при $x=0$. На защемленной стороне выполняются геометрические граничные условия, а на свободной – только силовые граничные условия. Так как в дальнейшем анализе используется метод Релея-Ритца, то учитываются только геометрические граничные условия, которые принимают следующий вид:

$$u^{(i)}|_{x=0} = v^{(i)}|_{x=0} = w^{(i)}|_{x=0} = \varphi^{(i)}|_{1,1}|_{x=0} = \varphi^{(i)}|_{2,1}|_{x=0} = 0; \quad i=\{t,c,b\}. \quad (12)$$

Свободные колебания цилиндрической сэндвич-оболочки

Линейные колебания конструкции исследуются методом Рэля-Ритца. Проекция перемещений срединной поверхности и углы поворота нормали к ней выражаются следующим образом:

$$\begin{bmatrix} u^{(i)} \\ v^{(i)} \\ w^{(i)} \\ \varphi^{(i)}_{1,1} \\ \varphi^{(i)}_{2,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_i(x, \varphi) \\ V_i(x, \varphi) \\ W_i(x, \varphi) \\ \Phi_i(x, \varphi) \\ \Psi_i(x, \varphi) \end{bmatrix} \cos(\omega\tau), \quad i=\{t, c, b\}, \quad (13)$$

где ω – частота собственных колебаний; $U_i(x, \varphi)$, $V_i(x, \varphi)$, $W_i(x, \varphi)$, $\Phi_i(x, \varphi)$, $\Psi_i(x, \varphi)$ – функции, которые удовлетворяют граничным условиям (12). Эти функции представим в виде

$$U_i = \cos(n\varphi) \sum_{m=1}^{N^{(i)}_u} U^{(i)}_m F^{(u)}_m(x); \quad V_i = \sin(n\varphi) \sum_{m=1}^{N^{(i)}_v} V^{(i)}_m F^{(v)}_m(x); \quad W_i = \cos(n\varphi) \sum_{m=1}^{N^{(i)}_w} W^{(i)}_m F^{(w)}_m(x);$$

$$\Phi_i = \cos(n\varphi) \sum_{m=1}^{N^{(i)}_\Phi} \Phi^{(i)}_m F^{(\Phi)}_m(x); \quad \Psi_i = \sin(n\varphi) \sum_{m=1}^{N^{(i)}_\Psi} \Psi^{(i)}_m F^{(\Psi)}_m(x), \quad i=\{t, c, b\}, \quad (14)$$

где $F^{(u)}_m(x)$, $F^{(v)}_m(x)$, $F^{(w)}_m(x)$, $F^{(\Phi)}_m(x)$, $F^{(\Psi)}_m(x)$ – базисные функции, удовлетворяющие граничным условиям (12); n – число волн в окружном направлении. Неизвестные коэффициенты разложения (14) $U^{(i)}_m$, $V^{(i)}_m$, $W^{(i)}_m$, $\Phi^{(i)}_m$, $\Psi^{(i)}_m$ представим в виде одного вектора размерности N : $\mathbf{a}=(A_1, \dots, A_N)$.

Разложения (13), (14) введем в кинетическую и потенциальные энергии конструкции (8), (11). После вычисления интегралов в (8) и (11) значение энергии можно представить в следующем виде:

$$T = \omega^2 \sin^2(\omega\tau) T^*(\mathbf{a}); \quad \Pi = \cos^2(\omega\tau) \Pi^*(\mathbf{a}). \quad (15)$$

Функции $T^*(\mathbf{a})$, $\Pi^*(\mathbf{a})$ являются квадратичными формами относительно компонент вектора неизвестных \mathbf{a} . Движения конструкции доставляют минимальное значение функционала

$$\int_0^{2\pi/\omega} (T - \Pi) d\tau \rightarrow \min. \quad (16)$$

Представление (15) введем в (16) и произведем интегрирование. Тогда движение конструкции описывается минимумом следующей функции:

$$\Pi^*(\mathbf{a}) - \omega^2 T^*(\mathbf{a}) \rightarrow \min.$$

Этот минимум описывается системой уравнений $\frac{\partial}{\partial A_j} (\Pi^*(\mathbf{a}) - \omega^2 T^*(\mathbf{a})) = 0; \quad j=1, 2, \dots, N$, которые сводятся к проблеме собственных значений:

$$\mathbf{K}\mathbf{a} = \omega^2 \mathbf{M}\mathbf{a},$$

где \mathbf{K} , \mathbf{M} – матрицы жесткости и масс.

Численный анализ линейных колебаний

Результаты расчетов линейных свободных колебаний цилиндрической сэндвич-оболочки с упругим сотовым наполнителем рассмотрены ниже.

Геометрия одной ячейки сотового наполнителя показана на рис. 2. Участок наполнителя приводится на рис. 3. С помощью процедуры гомогенизации сотовый наполнитель заменяется однородным ортотропным материалом. Процедуры гомогенизации для расчета механических характеристик материала обсуждаются в [13–14].

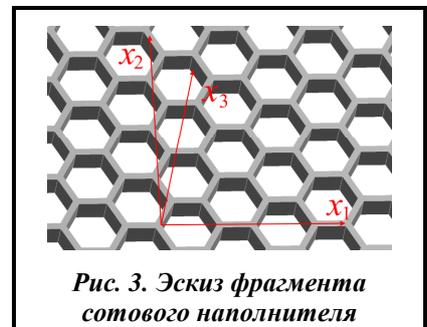


Рис. 3. Эскиз фрагмента сотового наполнителя

Закон Гука для гомогенизированного наполнителя имеет вид (1). Рассмотрен наполнитель, изготовленный из пластика ULTEM 9085 с помощью технологии FDM. Соты печатаются с помощью технологии FDM так, что нить печати идет вдоль стенки ячейки соты. Его геометрические параметры таковы: $l_1=6,0476$ мм; $l_2=3,0238$ мм; $h=0,5$ мм; $h_2=h_1=h$; $h_c=10-20$ мм; $\theta=60^\circ$.

Механические свойства деталей, напечатанных с помощью технологии FDM, разделяются по трём ортогональным направлениям: направление укладки нити экструдером, направление, ортогональное слоям печати и направление, перпендикулярное двум предыдущим. Механические характеристики материала ULTEM 9085 определялись экспериментально. Результаты экспериментального анализа представлены в статье [19]. Механические характеристики ULTEM 9085 таковы:

$$E_{11}=2,25 \text{ ГПа}; E_{22}=2,96 \text{ ГПа}; E_{33}=2,41 \text{ ГПа}; \nu_{12}=0,31;$$

$$\nu_{23}=0,26; \nu_{13}=0,33; G_{12}=667 \text{ МПа}; G_{23}=889 \text{ МПа}; G_{13}=829 \text{ МПа}; \quad (17)$$

плотность материала $\rho=1267 \text{ кг/м}^3$. Из (17) следует, что материал является слабо ортотропным. Направление «1» соответствует укладке нити; «2» – направление, перпендикулярное «1» в плоскости слоя; «3» – направление межслойного взаимодействия.

С помощью процедуры гомогенизации, описанной в [13], были получены следующие оценки эффективных механических свойств сотового наполнителя: $E_{xx}=2,907 \text{ МПа}; E_{\varphi\varphi}=2,907 \text{ МПа}; E_{zz}=214,6 \text{ МПа}; G_{x\varphi}=1,118 \text{ МПа}; G_{xz}=39,116 \text{ МПа}; G_{\varphi z}=39,162 \text{ МПа}; \nu_{x\varphi}=0,973; \nu_{xz}=0,005; \nu_{\varphi z}=0,004$.

Обшивки сэндвич-оболочки изготовлены из композита, представляющего собой PmPV матрицу, армированную УНТ. Объёмная часть УНТ в композите $V_{CNT}^*=0,28$. Значения параметров эффективности армирования для этого сочетания матрицы и нанотрубок $\eta_1=0,141; \eta_2=1,585; \eta_3=1,109$. Численные значения механических характеристик УНТ и матрицы нанокompозита таковы [20]: $E_{11}^{CNT}=5,6466 \text{ ТПа}; E_{22}^{CNT}=7,08 \text{ ТПа}; G_{12}^{CNT}=G_{13}^{CNT}=1,9445 \text{ ТПа}; G_{23}^{CNT}=2,3334 \text{ ТПа}; \nu_{12}^{CNT}=0,175; \rho^{CNT}=1400 \text{ кг/м}^3; E^m=2,5 \text{ ГПа}; \nu^m=0,34; \rho^m=1150 \text{ кг/м}^3$.

Цилиндрическая сэндвич-оболочка (рис. 1) имеет следующие геометрические параметры: $L=1 \text{ м}; R=0,25 \text{ м}; h_t=h_b=1 \text{ мм}$. Рассмотрено два варианта толщины сотового наполнителя: $h_c=10 \text{ мм}$ и $h_c=20 \text{ мм}$. В обшивках оболочки УНТ распределены равномерно по толщине. При расчетах свободных колебаний в разложениях (14) принималось одинаковое число слагаемых $N_u^{(i)}=N_v^{(i)}=N_w^{(i)}=N_\varphi^{(i)}=N_\psi^{(i)}=N_x, i=t,c,b$. Для анализа сходимости собственных частот производились расчеты с разным числом слагаемых в разложениях (14): $N_x=15, N_x=25, N_x=35$. Полученные результаты сравнивались с данными конечно-элементного моделирования в программном комплексе ANSYS.

Базисные функции в разложениях (14), удовлетворяющие граничным условиям (12), выбирались в следующем виде:

$$F_m^{(u)}(x)=F_m^{(v)}(x)=F_m^{(w)}(x)=F_m^{(\varphi)}(x)=F_m^{(\psi)}(x)=\sin((2m-1)\pi x/(2L)).$$

Результаты анализа собственных частот колебаний приводятся в табл. 1, 2. В них представлены собственные частоты (Гц) трёхслойной конструкции с различной толщиной сотового наполнителя. В первых столбцах этих таблиц показывается число волн в круговом направлении. Во втором столбце представлены результаты расчета собственных частот в программном комплексе ANSYS. В третьем, пятом и седьмом столбцах показаны собственные частоты, полученные методом Рэлея-Ритца с разным числом базисных функций в разложениях (14). В четвертом, шестом и восьмом столбцах дана относительная разница результатов, которые получены методом Рэлея-Ритца и методом конечных элементов, выраженная в процентах.

Таблица 1. Результаты расчета собственных частот в Гц при $h_c=10 \text{ мм}$

n	ANSYS	$N_x=15$	$\delta, \%$	$N_x=25$	$\delta, \%$	$N_x=35$	$\delta, \%$
2	123,4	125,6	1,78	125,2	1,46	125,1	1,38
1	161,0	161,5	0,31	161,3	0,19	161,2	0,12
3	189,3	196,4	3,75	196,2	3,65	196,1	3,59
0	224,8	224,8	0,00	224,8	0,00	224,8	0,00
3	313,2	323,5	3,29	321,0	2,49	320,1	2,20
4	324,7	337,1	3,82	336,3	3,57	335,5	3,33
2	332,4	338,6	1,87	337,0	1,38	336,9	1,35
4	395,2	410,4	3,85	408,4	3,34	407,7	3,16
1	471,3	475,5	0,89	474,2	0,62	473,8	0,53
5	496,8	514,6	3,58	514,4	3,54	514,4	3,54

Таблица 2. Результаты расчета собственных частот в Гц при $h_c=20$ мм

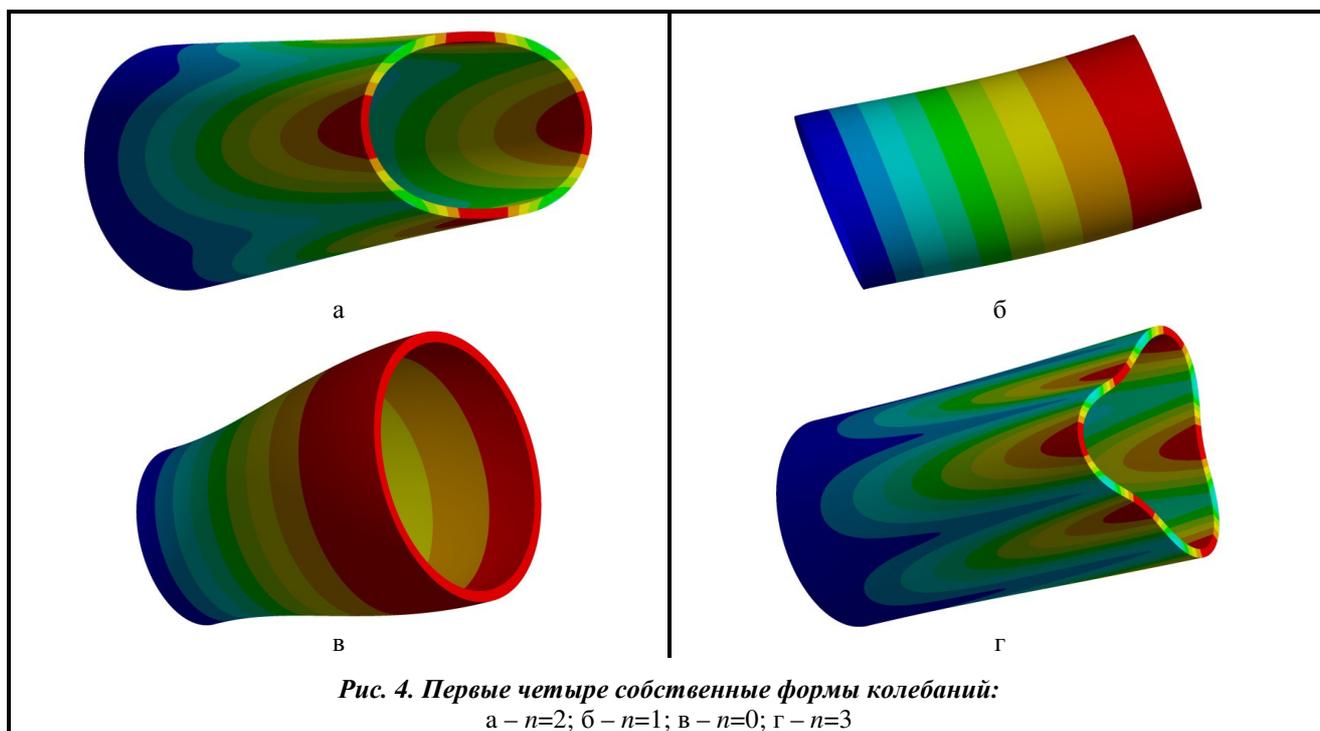
n	ANSYS	$N_x=15$	$\delta, \%$	$N_x=25$	$\delta, \%$	$N_x=35$	$\delta, \%$
2	142,7	146,3	2,52	145,9	2,24	145,8	2,17
1	145,4	146,0	0,41	145,7	0,21	145,6	0,14
0	196,5	196,5	0,00	196,5	0,00	196,5	0,00
3	278,3	288,3	3,59	288,0	3,49	287,9	3,45
2	339,9	347,2	2,15	344,8	1,44	343,8	1,15
3	391,2	403,8	3,22	401,5	2,63	400,6	2,40
1	430,7	435,0	1,00	433,6	0,67	433,0	0,53
4	484,5	500,4	3,28	500,2	3,24	500,2	3,24
4	552,3	571,0	3,39	569,4	3,10	568,8	2,99
0	589,2	589,2	0,00	589,2	0,00	589,2	0,00

С увеличением числа слагаемых в разложениях (14) собственные частоты, полученные методом Релея-Ритца, уменьшаются и приближаются к собственным частотам, полученным методом конечных элементов. Собственные частоты, полученные двумя методами, близки. Максимальная относительная разница собственных частот, полученная двумя методами, составляет 3,85%. Как следует из табл. 1, 2, спектр собственных частот очень плотный. Низшие собственные частоты наблюдаются при малом числе волн в окружном направлении n . Во всех рассматриваемых случаях первая собственная частота наблюдается при $n=2$. В изотропных цилиндрических оболочках это число несколько выше ($n=4$) [18].

При увеличении толщины сотового наполнителя оболочка становится жёстче. Это приводит к увеличению собственных частот.

Если число волн в окружном направлении отлично от нуля ($n \neq 0$), такая собственная частота является кратной. Для собственных форм, соответствующих $n \neq 0$, существуют сопряженные формы. Чтобы получить сопряженную форму в разложении (14), достаточно заменить $\sin(n\varphi)$ на $\cos(n\varphi)$ и наоборот. При такой замене величина частоты не меняется.

Первые четыре собственные формы колебаний цилиндрической сэндвич-оболочки с толщиной сотового наполнителя $h_c=20$ мм приведены на рис. 4. Эти формы отвечают первым четырем собственным частотам табл. 2. Форма колебаний (рис. 4, в), является осесимметричной. Ее собственная частота не является кратной. Все остальные собственные формы колебаний, приведенные на рис. 4, имеют сопряженные формы.



Заметим, что среди собственных форм колебаний оболочки с сотовым наполнителем осесимметричная форма колебаний ($n=0$) появляется намного раньше, чем в однослойной ортотропной оболочке. Этот факт надо учитывать при исследовании резонансных колебаний сэндвич-оболочек.

Рассмотрим зависимость собственных частот колебаний конструкции при изменении ориентации УНТ, которыми армируются обшивки оболочки. Введем углы армирования обшивок. Поскольку все УНТ направлены одинаково, для каждой обшивки достаточно одного угла для определения направления армирования. Угол армирования внешней обшивки обозначим $\beta^{(i)}$, а внутренней – $\beta^{(b)}$. Если $\beta^{(i)}=0$; $i=t, b$, то УНТ располагаются вдоль оси x (рис. 1). Если $\beta^{(i)}=\pi/2$; $i=t, b$, то УНТ располагаются вдоль оси φ .

Результаты расчета собственных частот оболочки с толщиной наполнителя $h_c=20$ мм приводятся в табл. 3. В первом столбце таблицы показывается номер собственной частоты. Во втором, четвертом и шестом столбцах приведены собственные частоты в Гц при разном значении углов армирования обшивок. Число волн в окружном направлении n записано в третьем, пятом и седьмом столбцах таблицы.

Таблица 3. Собственные частоты сэндвич-оболочки (Гц) при разной ориентации УНТ в обшивках

Номер частоты	$\beta^{(i)}=\beta^{(b)}=0$	n	$\beta^{(i)}=0; \beta^{(b)}=\pi/2$	n	$\beta^{(i)}=\pi/2; \beta^{(b)}=0$	n
1	145,7	1	143,3	1	134,0	1
2	145,9	2	170,5	2	158,8	2
3	196,5	0	196,5	0	196,5	0
4	288,0	3	323,4	2	291,0	2
5	344,8	2	377,0	3	353,9	3
6	401,5	3	431,4	1	399,3	3
7	433,6	1	440,1	3	404,6	1
8	500,2	4	527,5	2	487,8	2
9	569,4	4	563,7	3	514,4	3
10	589,2	0	589,2	0	589,2	0

Ориентация УНТ существенно влияет на собственные частоты, характеризующиеся значением $n \neq 0$.

Выводы

Построена модель динамического деформирования цилиндрической сэндвич-оболочки с сотовым наполнителем, созданным по технологии FDM, и нанокompозитными обшивками. Перемещения каждого слоя оболочки описываются своим набором переменных, который состоит из проекций перемещений срединной поверхности слоя и углов поворота нормали к срединной поверхности. Проекция перемещений обшивок раскладываются по поперечной координате вплоть до квадратичных слагаемых. Проекция перемещений наполнителя раскладываются по поперечной координате вплоть до кубических слагаемых. Для обеспечения целостности конструкции используются условия непрерывности перемещений на границах между слоями.

Среди собственных форм колебаний оболочки с сотовым наполнителем осесимметричная форма колебаний появляется намного раньше, чем в однослойной ортотропной оболочке. Этот факт надо учитывать при исследовании резонансных колебаний сэндвич-оболочек.

Ориентация УНТ в обшивках оболочки может существенно влиять на собственные частоты. Изменение ориентации УНТ может служить для отстройки оболочечной конструкции от резонанса.

Финансирование

Это исследование поддержано Национальным фондом исследований Украины (номер проекта 128/02.2020).

Литература

1. Sahu N. K., Biswal D. K., Joseph S. V, Mohanty S. C. Vibration and damping analysis of doubly curved viscoelastic-FGM sandwich shell structures using FOSDT. *Structures*. 2020. Vol. 26. P. 24–38. <https://doi.org/10.1016/j.istruc.2020.04.007>.
2. Quyen N. V., Thanh N. V., Quan T. Q., Duc N. D. Nonlinear forced vibration of sandwich cylindrical panel with negative Poisson's ratio auxetic honeycombs core and CNTRC face sheets. *Thin-Walled Structures*. 2021. Vol. 162. Paper 107571. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2021.107571>.

3. Singha T. D., Rout M., Bandyopadhyay T., Karmakar A. Free vibration of rotating pretwisted FG-GRC sandwich conical shells in thermal environment using HSDT. *Composite Structures*. 2021. Vol. 257. Paper 113144. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.113144>.
4. Bacciocchi M., Tarantino A. M. Critical buckling load of honeycomb sandwich panels reinforced by three-phase orthotropic skins enhanced by carbon nanotubes. *Composite Structures*. 2020. Vol. 237. Paper 111904. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.111904>.
5. Li Y., Yao W., Wang T. Free flexural vibration of thin-walled honeycomb sandwich cylindrical shells. *Thin-Walled Structures*. 2020. Vol. 157. Paper 107032. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2020.107032>.
6. Duc N. D., Seung-Eock K., Tuan N. D., Tran P., Khoa N. D. New approach to study nonlinear dynamic response and vibration of sandwich composite cylindrical panels with auxetic honeycomb core layer. *Aerospace Sci. and Technology*. 2017. Vol. 70. P. 396–404. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2017.08.023>.
7. Eipakchi H., Nasrekani F. M. Vibrational behavior of composite cylindrical shells with auxetic honeycombs core layer subjected to a moving pressure. *Composite Structures*. 2020. Vol. 254. Paper 112847. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.112847>.
8. Nath J. K., Das T. Static and free vibration analysis of multilayered functionally graded shells and plates using an efficient zigzag theory. *Mech. Advanced Materials and Structures*. 2019. Vol. 26. P. 770–788. <https://doi.org/10.1080/15376494.2017.1410915>.
9. Chehreghani M., Pazhooh M. D., Shakeri M. Vibration Analysis of a Fluid Conveying Sandwich Cylindrical Shell with a Soft Core. *Composite Structures*. 2019. Vol. 230. Paper 111470. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.111470>.
10. Yang C., Jin G., Liu Z., Wang X., Miao X. Vibration and damping analysis of thick sandwich cylindrical shells with a viscoelastic core under arbitrary boundary conditions. *Intern. J. Mech. Sci.* 2015. Vol. 92. P. 162–177. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2014.12.003>.
11. Karakoti A., Pandey S., Kar V. R. Free vibration response of P-FGM and S-FGM sandwich shell panels: A comparison. *Materials Today: Proceedings*. 2020. Vol. 28. P. 1701–1705. <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2020.05.131>.
12. Ramian A., Jafari-Talookolaei R.-A., Valvo P. S., Abedi M. Free vibration analysis of sandwich plates with compressible core in contact with fluid. *Thin-Walled Structures*. 2020. Vol. 157. Paper 107088. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2020.107088>.
13. Успенский Б., Аврамов К., Деревянко И., Библик И. К расчету механических характеристик сотовых заполнителей, изготовленных аддитивными технологиями FDM. *Авиац.-косм. техника и технология*. 2021. Вып. 1. С. 14–20. <https://doi.org/10.32620/akt.2021.1.02>.
14. Аврамов К. В., Успенский Б. В., Деревянко И. I. Analytical calculation of the mechanical properties of honeycombs printed using the FDM additive manufacturing technology. *Journal of Mechanical Engineering – Problemy Mashynobuduvannia*. 2021. Vol. 24. No. 2. P. 16–23. <https://doi.org/10.15407/pmach2020.02.014>.
15. Shen H. S. Nonlinear bending of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates in thermal environments. *Composite Structures*. 2009. Vol. 91. Iss. 1. P. 9–19. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2009.04.026>.
16. Wang Q., Qin B., Shi D., Liang Q. A semi-analytical method for vibration analysis of functionally graded carbon nanotube reinforced composite doubly-curved panels and shells of revolution. *Composite Structures*. 2017. Vol. 174. P. 87–109. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.04.038>.
17. Wang Q., Cui X., Qin B., Liang Q. Vibration analysis of the functionally graded carbon nanotube reinforced composite shallow shells with arbitrary boundary conditions. *Composite Structures*. 2017. Vol. 182. P. 364–379. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.09.043>.
18. Amabili M., Reddy J.N. A new non-linear higher-order shear deformation theory for large-amplitude vibrations of laminated doubly curved shells. *Intern. J. Non-Linear Mech.* 2010. Vol. 45. P. 409–418. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2009.12.013>.
19. Деревянко И., Аврамов К., Успенский Б., Саленко А. Экспериментальный анализ механических характеристик деталей ракет-носителей, изготовленных за допомогою FDM адитивних технологій. *Техн. механіка*. 2021. Вып. 1. С. 92–100. <https://doi.org/10.15407/itm2021.01.092>.
20. Duc N. D., Cong P.H., Tuan N. D., Tran P., Thanh N. V. Thermal and mechanical stability of functionally graded carbon nanotubes (FG CNT)-reinforced composite truncated conical shells surrounded by the elastic foundations. *Thin-Walled Structures*. 2017. Iss. 115. P. 300–310. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2017.02.016>.

Поступила в редакцію 13.10.2021

Коливання циліндричної сандвіч-оболонки з наповнювачем, що виготовлений за допомогою технології FDM**¹ Б. В. Успенський, ¹ К. В. Аврамов, ^{1,2} І. І. Деревянко**¹ Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України, 61046, Україна, м. Харків, вул. Пожарського, 2/10² Державне підприємство «Конструкторське бюро «Південне» ім. М.К. Янгеля», 49008, Україна, м. Дніпро, вул. Криворізька, 3

Наведено модель динамічного деформування тришарової циліндричної оболонки зі стільниковим заповнювачем, який виготовлено за допомогою технології FDM, та обшивками, які армовано вуглецевими нанотрубками. Розглянуто стільниковий заповнювач, який виготовлено з термопластику ULTEM 9085. Для аналізу напружено-деформованого стану стільникового заповнювача використовується методика скінченно-елементної гомогенізації. Внаслідок цієї процедури динамічний відклик стільникового заповнювача моделюється однорідним ортотропним матеріалом, механічні властивості якого відповідають властивостям заповнювача. Запропонована модель базується на теорії високого порядку, яку розширено для аналізу сандвіч-конструкцій. Проекції переміщень обшивок оболонки розкладено за поперечною координатою до квадратичних доданків. Проекції переміщень стільникового заповнювача розкладено за поперечною координатою до кубічних доданків. Для забезпечення цілісності конструкції використано умови безперервності переміщень оболонки на стиках шарів. Лінійні коливання оболонки досліджено за допомогою методу Релея-Рітца. Для його застосування отримано потенційну та кінетичну енергії конструкції. Розглянуто власні частоти та форми коливань циліндричної сандвіч-оболонки, яку затиснено з одного боку. Досліджено залежність форм та частот коливань оболонки від товщини стільникового заповнювача та напряму армування обшивок вуглецевими нанотрубками. Виявлено, що для власних форм сандвіч-оболонки характерною є менша кількість хвиль в окружному напрямку, а також вісесиметричні форми, що виникають набагато раніше. З цього випливає, що аналіз резонансних коливань сандвіч-оболонки слід здійснювати з урахуванням вісесиметричних форм. Зміна напрямку армування обшивок вуглецевими нанотрубками дозволяє суттєво впливати на власні частоти коливань оболонки, які характеризуються ненульовою кількістю хвиль в окружному напрямку. Встановлено, що цей параметр не впливає на частоти вісесиметричних форм розглянутої оболонки.

Ключові слова: циліндрична сандвіч-оболонка, адитивні технології, стільниковий заповнювач, нанокompatивна обшивка, власні форми, вісесиметрична форма коливань.