

УДК 539. 3

## ДИНАМИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ТРЕХСЛОЙНОЙ КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С СОТОВЫМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ, ИЗГОТОВЛЕННЫМ АДДИТИВНЫМИ ТЕХНОЛОГИЯМИ

**К. В. Аврамов**, д-р техн. наук

[kvavramov@gmail.com](mailto:kvavramov@gmail.com)

ORCID: 0000-0002-8740-693X

**Б. В. Успенский**, канд. техн. наук

[Uspensky.kubes@gmail.com](mailto:Uspensky.kubes@gmail.com)

ORCID: 0000-0001-6360-7430

**И. В. Библик**

[miles@ipmach.kharkov.ua](mailto:miles@ipmach.kharkov.ua)

ORCID: 0000-0002-8650-1134

Институт проблем машиностроения  
им. А. Н. Подгорного  
НАН Украины,  
61046, Украина, г. Харьков,  
ул. Пожарского, 2/10

*Получена математическая модель динамической неустойчивости трехслойных конических оболочек с сотовым наполнителем, изготовленным с помощью аддитивных технологий. Динамическая неустойчивость признана взаимодействием оболочки со сверхзвуковым газовым потоком. Средний слой конструкции является сотовым наполнителем, который гомогенизируется в ортотропную однородную среду. Верхний и нижний слои оболочки изготавливаются из углепластика. Колебания конструкции описываются пятнадцатью неизвестными. Каждый слой конструкции описывается пятью неизвестными: тремя проекциями перемещений срединной поверхности слоя и двумя углами поворота нормали срединной поверхности слоя. Для описания деформационного состояния конструкции используется сдвиговая теория высокого порядка. Связь между напряжениями и деформациями выражается степенным разложением по поперечной координате вплоть до ее кубических степеней. Для получения системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих динамическую неустойчивость, используется метод заданных форм. Для оценки динамической неустойчивости рассчитываются характеристические показатели, решая обобщенную проблему собственных значений. Исследуются собственные колебания конструкции методом Релея-Ритца. Минимальная собственная частота в консольной оболочке наблюдается при числе волн в окружном направлении, равном 6, а в защемленной с двух сторон оболочке – при числе волн в окружном направлении, равном 1. С помощью численного моделирования исследуются свойства динамической неустойчивости тривиального состояния равновесия конструкции. Анализу подвергаются консольные и защемленные с двух сторон оболочки. Показано, что минимальное критическое давление наблюдается при числе волн в окружном направлении, равном 1. Исследуется зависимость критического давления от числа Маха и угла атаки. Установлено, что при увеличении числа Маха и угла атаки критическое давление падает.*

**Ключевые слова:** линейная динамическая система, трехслойная коническая оболочка, характеристические показатели, числа Маха.

### Введение

Как известно, в аэрокосмической технике широко используются трехслойные композитные конструкции, что объясняется их высокой прочностью, жесткостью и маленьким весом. Учитывая это, было приложено много усилий для исследования их динамических свойств. Нелинейные колебания вязкоупругой композитной оболочки двойной кривизны с упругим средним слоем и магнетореологическим слоем изучаются в [1]. Нелинейные колебания композитных трехслойных оболочек двойной кривизны с пьезоэлектрическим слоем рассматриваются в работе [2]. Для вывода уравнений движения используется сдвиговая теория высокого порядка и теория геометрически нелинейного деформирования фон Кармана. Нелинейная динамика пологой оболочки двойной кривизны с сотовым наполнителем, имеющим отрицательный коэффициент Пуассона, под действием взрыва исследуется в [3]. Геометрически нелинейные вынужденные колебания цилиндрической трехслойной оболочки моделируются в [4], при этом используется сдвиговая теория высокого порядка. В статье [5] исследуется нелинейная динамика трехслойных цилиндрических панелей на упругом основании под действием взрывной нагрузки. Колебания тонкостенной конструкции двойной кривизны с сотовым наполнителем изучаются в [6]. Для вывода уравнений движения используется вариационный принцип Гамильтона. В [7] рассматривается конечно-элементная формулировка задачи с учетом нелинейного деформирования Грина-Лагранжа.

Статья доступна по лицензии Creative Commons «Attribution» («Атрибуция») 4.0 Международная.

© К. В. Аврамов, Б. В. Успенский, И. В. Библик, 2022

В настоящей работе представлена новая математическая модель динамической неустойчивости трехслойных конических оболочек с сотовым наполнителем, изготовленным с помощью аддитивных технологий FDM. Деформационное состояние каждого слоя описывается пятью параметрами (три проекции перемещений срединной поверхности, двумя углами поворота нормали срединной поверхности слоя). Для описания напряженно-деформированного состояния конструкции используется сдвиговая теория высокого порядка и геометрически нелинейное деформирование. Численно исследованы свойства динамической неустойчивости конструкции в сверхзвуковом газовом потоке.

**Формулировка задачи и основные соотношения**

Эскиз трехслойной конической оболочки представлен на рис. 1, а. Средний слой оболочки является сотовым наполнителем, изготовленным с помощью FDM технологий из материала ULTEM 9085, а верхние и нижние лицевые стороны – из углепластика. Одна ячейка соты изображена на рис. 1, б. Ее основные геометрические параметры таковы:  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $h_c$ ,  $\psi$ , где  $h_c$  – толщина стенки сот. Рассматривается динамическая неустойчивость трехслойных конических оболочек, которая возникает вследствие взаимодействия сверхзвукового газового потока с конструкцией. Предполагается, что материал как лицевых слоев при деформировании, так и сотового наполнителя удовлетворяют закону Гука.

Введем три криволинейные системы координат, которые будут связаны со срединными поверхностями каждого слоя. Криволинейные координаты верхних, нижних слоев и сот обозначим через  $(s_t, \theta, z_t)$ ,  $(s_c, \theta, z_c)$ ,  $(s_b, \theta, z_b)$ , где  $(s_t, s_c, s_b)$  – продольные координаты, направленные вдоль образующих срединных поверхностей соответствующего слоя (рис. 1);  $\theta$  – окружная координата;  $(z_t, z_c, z_b)$  – поперечные координаты слоев;  $s_t, s_c, s_b$ ;  $s_t^{(1)}, s_c^{(1)}, s_b^{(1)}$  – координаты левой торцевой стороны конической оболочки (с меньшим радиусом);  $s_t^{(2)}, s_c^{(2)}, s_b^{(2)}$  – координаты правой торцевой стороны (с большим радиусом). Введем одну продольную координату  $\xi$  для всей многослойной конструкции:  $\xi = s_t - s_t^{(1)}$ ;  $i = t, b, c$ . Длину конической оболочки обозначим через  $L$ :  $L = s_i^{(2)} - s_i^{(1)}$ ;  $i = t, b, c$ . Радиусы кривизны срединных поверхностей слоев обозначим через  $R_\theta^{(j)}$ ;  $R_s^{(j)}$ ;  $j = t, b, c$ , а параметры

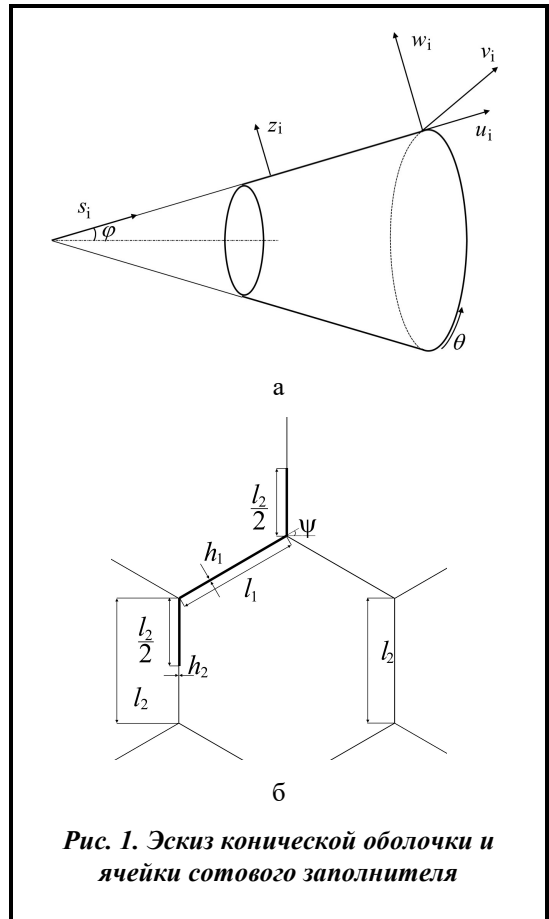


Рис. 1. Эскиз конической оболочки и ячейки сотового наполнителя

Лямэ –  $A_s^{(j)}$ ;  $A_\theta^{(j)}$ . Эти величины определяются так:  $R_\theta^{(j)} = (s_j^{(1)} + \xi) \text{tg}(\varphi)$ ;  $R_s^{(j)} = \infty$ ;  $j = t, c, b$ ;  $A_s^{(j)} = 1$ ;  $A_\theta^{(j)} = (s_j^{(1)} + \xi) \sin(\varphi)$ .

Сотовый наполнитель преобразуется в эквивалентный ортотропный слой в результате его гомогенизации [8]. В этом случае элементы тензоров напряжений и деформаций сотового слоя удовлетворяют закону Гука:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{ss}^{(c)} \\ \sigma_{\theta\theta}^{(c)} \\ \sigma_{zz}^{(c)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{ss}^{(c)} \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{(c)} \\ \varepsilon_{zz}^{(c)} \end{bmatrix}; \sigma_{\theta z}^{(c)} = 2C_{44}\varepsilon_{\theta z}^{(c)}; \sigma_{sz}^{(c)} = 2C_{55}\varepsilon_{sz}^{(c)}; \sigma_{s\theta}^{(c)} = 2C_{66}\varepsilon_{s\theta}^{(c)}.$$

Верхние и нижние слои конической оболочки являются ортотропными. Они удовлетворяют закону Гука:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{ss}^{(j)} \\ \sigma_{\theta\theta}^{(j)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} \\ \bar{C}_{21} & \bar{C}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{ss}^{(j)} \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{(j)} \end{bmatrix}; \sigma_{s\theta}^{(j)} = 2\bar{C}_{33}2\varepsilon_{s\theta}^{(j)}; \sigma_{sz}^{(j)} = 2\bar{C}_{44}\varepsilon_{sz}^{(j)}; \sigma_{\theta z}^{(j)} = 2\bar{C}_{55}\varepsilon_{\theta z}^{(j)}; j = b, t.$$

Проекції перемещень верхніх і нижніх шарів  $u_1^{(i)}, u_2^{(i)}, u_3^{(i)}$  можна представити в наступному вигляді:

$$u_1^{(i)} = u^{(i)} + z_i \phi_1^{(i)} + z_i^2 \psi_1^{(i)}; u_2^{(i)} = \left( 1 + \frac{z_i}{(s_i^{(1)} + \xi) \operatorname{tg}(\varphi)} \right) v^{(i)} + z_i \phi_2^{(i)} + z_i^2 \psi_2^{(i)}; u_3^{(i)} = w^{(i)}; i=t, b, \quad (1)$$

де  $u^{(i)}, v^{(i)}, w^{(i)}$  – проекції перемещень точок середніх поверхностей на координатні осі;  $\phi_1^{(i)}, \phi_2^{(i)}$  – кути повороту нормалі к середній поверхності.

Проекції перемещень середнього шару  $u_1^{(c)}, u_2^{(c)}, u_3^{(c)}$  представимо в вигляді:

$$u_1^{(c)} = u^{(c)} + z_c \phi_1^{(c)} + z_c^2 \psi_1^{(c)} + z_c^3 \gamma_1^{(c)}; u_2^{(c)} = \left( 1 + \frac{z_c}{(s_c^{(1)} + \xi) \operatorname{tg}(\varphi)} \right) v^{(c)} + z_c \phi_2^{(c)} + z_c^2 \psi_2^{(c)} + z_c^3 \gamma_2^{(c)}; \quad (2)$$

$$u_3^{(c)} = w^{(c)} + z_c w_1^{(c)} + z_c^2 w_2^{(c)}.$$

Обозначения соотношений (1) и (2) совпадают. Для определения параметров разложения (1) воспользуемся граничными условиями:

$$\sigma_{sz} \Big|_{z_i=0,5h_i} = \sigma_{0z} \Big|_{z_i=0,5h_i} = 0; \quad \sigma_{sz} \Big|_{z_b=-0,5h_b} = \sigma_{0z} \Big|_{z_b=-0,5h_b} = 0, \quad (3)$$

де  $h_i, h_b$  – товщини верхнього і нижнього шарів.

Умови неперервності перемещень між шарами мають наступний вигляд:

$$u_i^{(t)}(z_i = -0,5h_i) = u_i^{(c)}(z_c = 0,5h_c); u_1^{(b)}(z_b = 0,5h_b) = u_1^{(c)}(z_c = -0,5h_c); i=1, 2, 3, \quad (4)$$

де  $h_c$  – товщина середнього шару.

Составляющие разложений (3), (4)  $\psi_1^{(i)}, \psi_2^{(i)}, \psi_1^{(b)}, \psi_2^{(b)}, \psi_1^{(c)}, \gamma_1^{(c)}, \psi_2^{(c)}, \gamma_2^{(c)}, w_1^{(c)}, w_2^{(c)}$  определяются из условий (3), (4).

Общий случай геометрически нелинейных соотношений, описывающих деформирование произвольных оболочек, опубликован в [9]. Эти соотношения используются в разложениях (1), (2). Тогда связь между деформациями и перемещениями приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ss}^{(i)} &= \varepsilon_{s,0}^{(i)} + z_i k_{s,0}^{(i)} + z_i^2 k_{s,1}^{(i)} + z_i^3 k_{s,2}^{(i)}; & \varepsilon_{\theta\theta}^{(i)} &= \varepsilon_{\theta,0}^{(i)} + z_i k_{\theta,0}^{(i)} + z_i^2 k_{\theta,1}^{(i)} + z_i^3 k_{\theta,2}^{(i)}; \\ \varepsilon_{s\theta}^{(i)} &= \varepsilon_{s\theta,0}^{(i)} + z_i k_{s\theta,0}^{(i)} + z_i^2 k_{s\theta,1}^{(i)} + z_i^3 k_{s\theta,2}^{(i)}; & \varepsilon_{sz}^{(i)} &= \varepsilon_{sz,0}^{(i)} + z_i k_{sz,0}^{(i)} + z_i^2 k_{sz,1}^{(i)} + z_i^3 k_{sz,2}^{(i)}; \\ \varepsilon_{\theta z}^{(i)} &= \varepsilon_{\theta z,0}^{(i)} + z_i k_{\theta z,0}^{(i)} + z_i^2 k_{\theta z,1}^{(i)} + z_i^3 k_{\theta z,2}^{(i)}; & i=t, c, b; \\ \varepsilon_{zz}^{(c)} &= \varepsilon_{z,0}^{(c)} + z_c k_{z,0}^{(c)}. \end{aligned} \quad (5)$$

Для краткости изложения коэффициенты этих разложений не приводятся.

Формула, по которой вычисляется потенциальная энергия верхнего и нижнего шаров оболочки, принимает следующий вид:

$$U_i = 0,5 \int_{A_i} (\bar{C}_{11} \varepsilon_{ss}^{(i)2} + \bar{C}_{22} \varepsilon_{\theta\theta}^{(i)2} + 2\bar{C}_{12} \varepsilon_{ss}^{(i)} \varepsilon_{\theta\theta}^{(i)} + 2\bar{C}_{33} \varepsilon_{\theta z}^{(i)2} + 2\bar{C}_{44} \varepsilon_{sz}^{(i)2} + 2\bar{C}_{55} \varepsilon_{\theta z}^{(i)2}) \times \left( 1 + \frac{z_i}{(s_i^{(1)} + \xi) \operatorname{tg}(\varphi)} \right) (s_i^{(1)} + \xi) \sin \varphi d\xi d\theta dz_i; \quad i=t, b, \quad (6)$$

де  $A_i$  – область середньої поверхності шару.

Разложения (5) используем при определении потенциальной энергии (6) с интегрированием по  $z_i$ . В результате потенциальная энергия представляется в виде двойного интеграла:

$$U_i = 0,5 \int_{A_i} (\Pi_i^{(0)} + \Pi_i^{(2)} + \Pi_i^{(4)}) (s_i^{(1)} + \xi) \sin \varphi d\xi d\theta; \quad i=t, b. \quad (7)$$

Коэффициенты выражения (7)  $\Pi_i^{(0)}, \Pi_i^{(2)}, \Pi_i^{(4)}$  зависят от коэффициентов разложения (5). Однако для краткости изложения эти зависимости не приводятся.

Формула расчёта потенциальной энергии гомогенизированного среднего слоя принимает следующий вид:

$$U_c = 0,5 \int_{A_i} (C_{11} \varepsilon_{ss}^{(c)2} + C_{22} \varepsilon_{\theta\theta}^{(c)2} + C_{33} \varepsilon_{zz}^{(c)2} + 2C_{12} \varepsilon_{ss}^{(c)} \varepsilon_{\theta\theta}^{(c)} + 2C_{13} \varepsilon_{ss}^{(c)} \varepsilon_{zz}^{(c)} + 2C_{23} \varepsilon_{\theta\theta}^{(c)} \varepsilon_{zz}^{(c)} + 2C_{44} \varepsilon_{\theta z}^{(c)2} + 2C_{55} \varepsilon_{sz}^{(c)2} + 2C_{66} \varepsilon_{s\theta}^{(c)2}) \times \\ \times \left( 1 + \frac{z_i}{(s_c^{(1)} + \xi) \operatorname{tg} \varphi} \right) (s_c^{(1)} + \xi) \sin \varphi d\xi d\theta dz_c. \quad (8)$$

Разложения (5) используются при определении потенциальной энергии (8). Тогда формула потенциальной энергии (8) представляется в виде (7).

Кинетическую энергию каждого слоя отдельно можно представить в следующем виде:

$$T_i = 0,5 \int_0^{2\pi s_i^{(2)}} \int_{s_i^{(1)} - 0,5h_i}^{0,5h_i} \rho_i (\dot{u}_1^{(i)2} + \dot{u}_2^{(i)2} + \dot{u}_3^{(i)2}) \left( 1 + \frac{z_i}{(s_i^{(1)} + \xi) \operatorname{tg} \varphi} \right) (s_i^{(1)} + \xi) \sin \varphi d\xi d\theta dz_i; \quad i=t, c, b, \quad (9)$$

где  $\rho_i$  – плотность материала слоя конструкции;  $\dot{u}_1^{(i)} = \frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial t}$ .

Разложения (1), (2) используются при нахождении кинетической энергии (9) с интегрированием по  $z_i$ . В результате получим следующие выражения для кинетических энергий:

$$T_i = 0,5 \int_0^{2\pi s_i^{(2)}} \int_{s_i^{(1)}} (\Lambda_0^{(i)} + \Lambda_2^{(i)} + \Lambda_4^{(i)}) (s_i^{(1)} + \xi) \sin \varphi d\xi d\theta; \quad i=t, c, b, \quad (10)$$

где величины  $\Lambda_0^{(i)}$ ,  $\Lambda_2^{(i)}$ ,  $\Lambda_4^{(i)}$ , зависят от  $\dot{u}^{(i)}$ ,  $\dot{v}^{(i)}$ ,  $\dot{w}^{(i)}$ .

Давление  $p$ , действующее на коническую оболочку, в сверхзвуковом газовом потоке описывается поршневой теорией [10]:

$$p = \frac{\gamma p_\infty M^2}{\sqrt{M^2 - 1}} \left[ \frac{\partial w_t}{\partial \xi} \cos \beta + \frac{\partial w_t}{R(\xi) \partial \theta} \sin \beta + \frac{M^2 - 2}{(M^2 - 1) M a_\infty} \frac{\partial w_t}{\partial t} - \frac{w_t}{2R(\xi) \sqrt{M^2 - 1}} \right], \quad (11)$$

где  $\beta$  – угол атаки;  $p_\infty$  – статическое давление потока;  $M$  – число Маха;  $\gamma$  – показатель адиабаты;  $a_\infty$  – скорость звука;  $R(\xi) = (s_i^{(1)} + \xi) \sin \varphi$ .

Для исследования автоколебаний применяется метод заданных форм [11]. В этом случае учитываются кинематические граничные условия и не учитываются силовые граничные условия. Если сторона оболочки  $s_i = s_i^{(1)}$  закреплена, то кинематические граничные условия

$$w^{(i)} \Big|_{s_i = s_i^{(1)}} = v^{(i)} \Big|_{s_i = s_i^{(1)}} = u^{(i)} \Big|_{s_i = s_i^{(1)}} = \phi_1^{(i)} \Big|_{s_i = s_i^{(1)}} = \phi_2^{(i)} \Big|_{s_i = s_i^{(1)}} = 0.$$

### Уравнения движения

Выведем динамическую систему с конечным числом степеней свободы, которая описывает неустойчивость трехслойной конической оболочки при ее взаимодействии со сверхзвуковым газовым потоком. Для этого воспользуемся методом заданных форм. Автоколебания разложим по собственным формам линейных колебаний конструкции

$$w^{(i)} = \sum_{j=1}^{N_w} W_{i,j}(\xi) [q_{i,j}(t) \cos(n\theta) + q_{i,j+N_w}(t) \sin(n\theta)]; \\ \phi_1^{(i)} = \sum_{j=1}^{N_{\phi_1}} X_{i,j}(\xi) [q_{i,2N_w+j}(t) \cos(n\theta) + q_{i,2N_w+N_{\phi_1}+j}(t) \sin(n\theta)]; \\ \phi_2^{(i)} = \sum_{j=1}^{N_{\phi_2}} Y_{i,j}(\xi) [q_{i,2N_w+2N_{\phi_1}+j}(t) \cos(n\theta) + q_{i,2N_w+N_{\phi_1}+N_{\phi_2}+j}(t) \sin(n\theta)];$$

$$u^{(i)} = \sum_{j=1}^{N_u} U_{i,j}(\xi) \left[ q_{i,2N_w+2N_{\phi_1}+2N_{\phi_2}+j}(t) \cos(n\theta) + q_{i,2N_w+N_{\phi_1}+N_{\phi_2}+N_u+j}(t) \sin(n\theta) \right];$$

$$v^{(i)} = \sum_{j=1}^{N_u} U_{i,j}(\xi) \left[ q_{i,2N_w+2N_{\phi_1}+2N_{\phi_2}+2N_u+j}(t) \cos(n\theta) + q_{i,2N_w+N_{\phi_1}+N_{\phi_2}+N_u+N_v+j}(t) \sin(n\theta) \right]; \quad i=t, c, b, \quad (12)$$

где  $\mathbf{q}$  – вектор обобщенных координат;

$$\mathbf{q} = [q_{1,1}, \dots, q_{1,2N_w+2N_{\phi_1}+2N_{\phi_2}+2N_u+2N_v}, \dots, q_{3,1}, \dots, q_{3,2N_w+2N_{\phi_1}+2N_{\phi_2}+2N_u+2N_v}] = [q_1, \dots, q_{N_*}];$$

$N_*$  – число степеней свободы конструкции;  $W_{i,j}(\xi)$ ,  $X_{i,j}(\xi)$ ,  $Y_{i,j}(\xi)$ ,  $U_{i,j}(\xi)$ ,  $V_{i,j}(\xi)$  – собственные формы колебаний конструкции.

Разложение (12) введем в (7), (8) и выполним необходимое интегрирование. В результате формулу расчета потенциальной энергии получим в виде полинома относительно обобщенных координат:  $U_{\Sigma} = \Lambda_2(\mathbf{q})$ , где  $\Lambda_2(\mathbf{q})$  – сумма полиномов степени 2. Выражение (12) используем в (9), (10) и произведем интегрирование. Тогда кинетическая энергия примет следующий вид:  $T_{\Sigma} = \sigma_2(\dot{\mathbf{q}})$ ,  $\sigma_2(\dot{\mathbf{q}})$  – квадратичный полином относительно обобщенных скоростей. Найдем обобщенные силы, соответствующие аэродинамическому давлению (11). Тогда виртуальную работу представим

$$\delta A = - \int_0^{2\pi s_t^{(2)}} \int_{s_t^{(1)}} p \delta w^{(t)}(s_t^{(1)} + \xi) \sin \varphi d\xi d\theta = \sum_{j=1}^{N(w)} Q_{1,j} \delta q_j,$$

где  $\delta w^{(i)}$  – виртуальное перемещение;  $Q_j$  – обобщенная сила.

Выражение (12) используем в (11). Тогда обобщенные силы представим в следующем виде:

$$Q_{1,j_1} = \sum_{j=1}^{2N_w} G_{j_1,j}^{(1)} q_{1,j} + \sum_{j=1}^{N_w} \Gamma_{j_1,j}^{(1)} \dot{q}_{1,j}; \quad Q_{1,j_1+N_w} = \sum_{j=1}^{2N_w} G_{j_1+N_w,j}^{(1)} q_{1,j} + \sum_{j=1}^{N_w} \Gamma_{j_1+N_w,j}^{(1)} \dot{q}_{1,j+N_w}; \quad j_1=1, \dots, N_w.$$

Уравнения Лагранжа движения конструкции принимают следующий вид:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{G}\mathbf{q} + \mathbf{\Gamma}\dot{\mathbf{q}}, \quad (13)$$

где  $\mathbf{G}$  – матрица аэродинамической жесткости;  $\mathbf{\Gamma}$  – матрица аэродинамического демпфирования.

Как показывают результаты численного моделирования системы (13), большая часть элементов матрицы  $\mathbf{M}$  близка к нулю. Это обусловлено тем, что верхний и нижний слои очень тонкие, а средний имеет малую плотность. Чтобы описать этот факт, основные матрицы и векторы системы (13) представим

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{q} = [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2]^T.$$

Тогда следующие элементы матрицы, которые очень малы, можно считать нулевыми:  $\mathbf{M}_{21} \equiv 0$ ;  $\mathbf{M}_{22} \equiv 0$ ;  $\mathbf{M}_{12} \equiv 0$ .

Уравнение (13) можно представить

$$\mathbf{M}_{11}\ddot{\mathbf{q}}_1 + \bar{\mathbf{K}}_{11}\mathbf{q}_1 = \mathbf{G}\mathbf{q}_1 + \mathbf{\Gamma}\dot{\mathbf{q}}_1, \quad (14)$$

где  $\bar{\mathbf{K}}_{11} = \mathbf{K}_{11} - \mathbf{K}_{12}\mathbf{K}_{22}^{-1}\mathbf{K}_{21}$ .

Исследуем устойчивость тривиального состояния равновесия  $q_i \equiv 0$  динамической системы (14). Полученная линейная динамическая система имеет решение  $(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1) \equiv (\mathbf{q}_1, \mathbf{v}) = P_* \exp(\lambda t)$ , где  $\lambda$  – характеристический показатель.

Это решение введем в динамическую систему (14). Тогда получаем обобщенную проблему собственных значений:

$$\mathbf{R}\lambda P_* = \mathfrak{I}P_*,$$

где  $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{11} \end{bmatrix}$ ;  $\mathfrak{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E} \\ \mathbf{G} - \mathbf{K}_{11} & \mathbf{\Gamma} \end{bmatrix}$ ;  $\mathbf{E}$  – единичная матрица.

По величинам  $\lambda$  определяют устойчивость тривиального состояния равновесия.

### Численный анализ

Исследуем собственные частоты трехслойной конической оболочки. Рассмотрим защемленную с двух сторон оболочку и консольную конструкцию. Сотовый наполнитель изготовлен с помощью FDM технологий из материала ULTEM 9085. Механические параметры материала ULTEM 9085 определялись экспериментально. Результаты этих экспериментов представлены в статье [12]. Проводилось конечно-элементное моделирование сотового наполнителя для определения механических свойств ортотропной гомогенизированной среды. В данной публикации мы не будем рассматривать этот подход, а приведем результаты моделирования механических свойств. Геометрические параметры ячейки сотового наполнителя (рис. 1, б) принимались следующими:  $l_1=6,1054$  мм;  $l_2=3,0527$  мм;  $\theta=60^\circ$ ;  $l_c=10$  мм;  $\bar{h}_c=0,4$  мм, где  $\bar{h}_c$  – толщина стенки сотового наполнителя;  $l_c$  – высота сотового наполнителя. Инженерные константы гомогенизированного сотового наполнителя принимают следующие численные значения:

$$E_{11}=2,91 \text{ МПа}; E_{22}=2,91 \text{ МПа}; E_{33}=215,10 \text{ МПа}; \nu_{12}=0,971; \nu_{23}=0,0051; \nu_{13}=0,0042; \\ G_{12}=1,118 \text{ МПа}; G_{23}=39,1 \text{ МПа}; G_{13}=39,1 \text{ МПа}; \rho_c=253,189 \text{ кг/м}^3. \quad (15)$$

Инженерные константы верхних и нижних слоев таковы:

$$E_x=160 \cdot 10^9 \text{ Па}; E_y=160 \cdot 10^9 \text{ Па}; \nu_{xy}=0,32; \nu_{yx}=0,0136; G_{xy}=800 \cdot 10^9 \text{ Па}; \\ G_{xz}=G_{yz}=4 \cdot 10^9 \text{ Па}; \rho_f=\rho_b=1400 \text{ кг/м}^3. \quad (16)$$

Коническая оболочка имеет следующие значения геометрических параметров конструкции:

$$\varphi=\pi/12; s_f^{(1)}=2,354 \text{ м}; s_c^{(1)}=2,33 \text{ м}; s_b^{(1)}=2,313 \text{ м}; h_f=h_b=10^{-3} \text{ м}; h_c=10^{-2} \text{ м}. \quad (17)$$

Первые десять собственных частот колебаний такой конструкции приводятся в табл. 1 в порядке возрастания собственных частот. Во втором столбце представлена размерность обобщенной проблемы собственных значений для расчета частот и форм колебаний. В третьем столбце показаны собственные частоты, полученные методом Релея-Ритца. В четвертом столбце показаны собственные частоты, полученные в программном комплексе ANSYS. Спектр собственных частот чрезвычайно плотный. Так, в диапазоне  $\omega \in [411,83; 478,42]$  Гц наблюдаются десять собственных частот.

Зависимость первой собственной частоты от числа волн в окружном направлении показана на рис. 2 сплошной линией. Подчеркнем, что минимальная собственная частота наблюдается при  $n=1$ . В изотропных оболочках первая собственная частота наблюдается при значительно большем числе  $n$ .

Исследуем линейные колебания консольной конической оболочки. Сторона с большим радиусом (рис. 1) защемлена, а с меньшим – свободна. Геометрические размеры трехслойной оболочки имеют вид (17). Механические характеристики верхнего и нижнего слоев имеют вид (16),

**Таблица 1. Собственные частоты колебаний**

$n$	$N_*$	$\omega$ , Гц	$\omega_{\text{FEM}}$ , Гц	$\delta$
1	270	411,83	421,98	0,024
2	240	430,10	438,45	0,019
3	240	448,56	455,76	0,015
8	270	450,22	460,61	0,022
7	270	451,41	462,27	0,023
6	270	457,54	467,82	0,022
9	270	458,46	466,99	0,018
4	240	460,24	467,50	0,015
5	240	462,71	471,14	0,018
10	240	478,42	482,81	0,0091

**Таблица 2. Результаты расчета собственных частот колебаний консольной оболочки**

$n$	$N_*$	$\omega$ , Гц	$\omega_{\text{FEM}}$ , Гц	$\delta$
1	210	409,46	417,15	0,018
2	210	409,58	409,90	$7,8 \cdot 10^{-4}$
3	210	365,95	353,16	0,036
4	210	307,81	292,54	0,050
5	210	271,49	265,06	0,020
6	210	262,10	264,29	0,006
7	210	274,41	280,20	0,020
8	210	302,77	307,97	0,016
9	210	342,96	345,00	0,006
10	210	391,95	389,58	0,006

а механические характеристики среднего слоя – (15). Результаты расчета собственных частот колебаний приведены в табл. 2. Обозначения столбцов табл. 1 и табл. 2 совпадают. Как следует из табл. 2, собственные частоты, полученные двумя методами, близки. Зависимость первых собственных частот от  $n$  изображена на рис. 2 пунктирной линией. Итак, минимальная собственная частота наблюдается при  $n=6$ . Напомним, что минимальная собственная частота колебаний защемленной оболочки отмечается при  $n=1$ .

Линейные колебания консольной конической оболочки качественно отличаются от колебаний защемленной с двух сторон конической оболочки, что следует из собственных форм колебаний консольной оболочки. Свободный край консольной оболочки совершает интенсивные колебания. В защемленной с двух сторон оболочке этот край покоится.

Исследуем динамическую неустойчивость защемленной с двух сторон конической оболочки. Первые десять собственных частот ее колебаний приводятся в табл. 1. В разложениях (12) выбиралось следующее число слагаемых  $N_w = N_{\phi_1} = N_{\phi_2} = N_u = N_v$ . При расчете областей динамической неустойчивости  $N_w$  принимались равными 2; 3; 4. Для расчета динамической неустойчивости тривиального состояния равновесия характеристические показатели определялись из проблемы собственных значений.

На рис. 3 показаны границы области динамической неустойчивости оболочки на плоскости параметров  $(p_{\infty}^{(cr)}, n)$ , полученные при двух значениях чисел Маха  $M=1,5$  и  $M=5$  и при числе слагаемых в разложении (12)  $N_w=3$ . Минимальное значение  $n$ , при котором происходит потеря устойчивости, соответствует  $n=1$ . Следует подчеркнуть, что в изотропных оболочках критические давления наблюдаются при значительно большем числе  $n$ . Параметры, при которых наблюдается потеря устойчивости, называются критическими. Итак, при увеличении числа Маха  $M$  значение критического давления уменьшается.

Исследовалось влияние угла атаки на критическое давление  $p_{\infty}^{(cr)}$ . Для этого проводился анализ динамической неустойчивости при разных значениях угла  $\beta$  и при одном значении числа волн в окружном направлении  $n=1$ . Результаты такого анализа приводятся на рис. 4 (сплошная линия). Итак, при увеличении угла  $\beta$  величина критического давления растет.

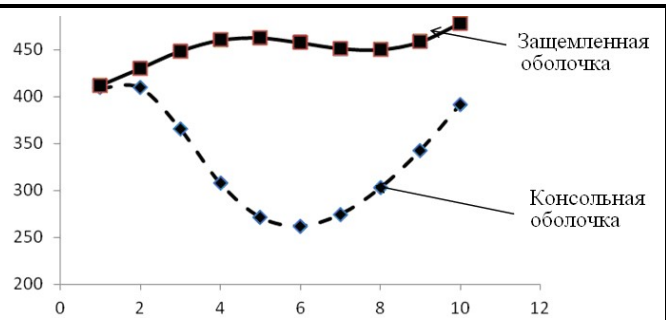


Рис. 2. Зависимость первой собственной частоты  $\omega_1$  от числа волн в окружном направлении  $n$

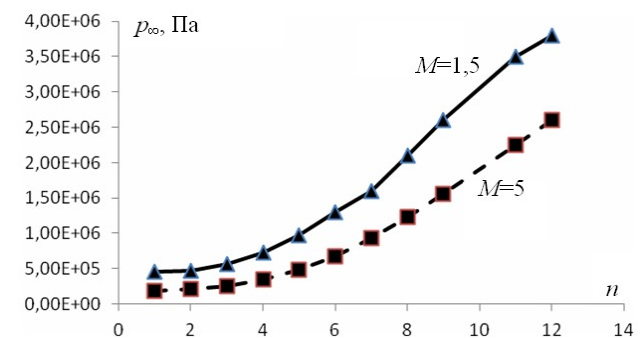


Рис. 3. Области динамической неустойчивости тривиального равновесия конструкции

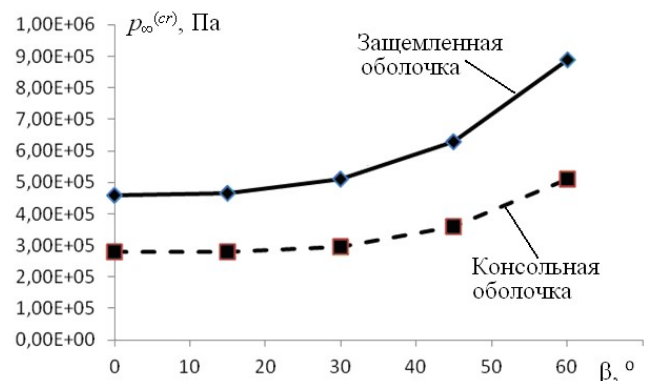


Рис. 4. Зависимость критического давления от угла атаки

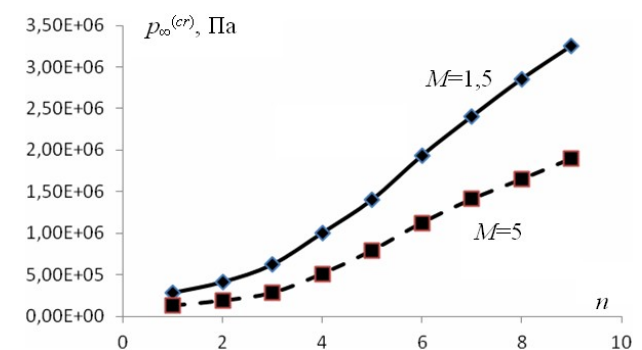


Рис. 5. Граница области динамической неустойчивости для консольной оболочки



Исследовалась динамическая неустойчивость консольной усеченной конической оболочки. Собственные частоты колебаний такой оболочки приведены в табл. 2. Границы области динамической неустойчивости на плоскости параметров  $(p_{\infty}^{(cr)}, n)$  изображены на рис. 5. Сплошной линией на этом рисунке показана граница области динамической неустойчивости при  $M=1,5$ , а пунктирной – граница области при  $M=5$ . Итак, при увеличении числа Маха величина  $p_{\infty}^{(cr)}$  уменьшается.

Как следует из результатов расчета, минимальное критическое давление наблюдается при  $n=1$ . Исследовалась зависимость критического давления  $p_{\infty}^{(cr)}$  при  $n=1$  от угла атаки  $\beta$ . Результаты таких расчетов изображены пунктирной линией на рис. 4. При увеличении угла  $\beta$  критическое давление растет.

### Заключение

Разработана математическая модель динамической неустойчивости конической оболочки с сотовым наполнителем, изготовленным с помощью аддитивных технологий. Деформационное поведение каждого слоя описывается пятью параметрами (три проекции перемещений срединной поверхности слоя и двумя углами поворота нормали к срединной поверхности). Для описания напряженного состояния используется сдвиговая теория высокого порядка, а для получения модели динамической неустойчивости – метод заданных форм.

С помощью метода Релея-Ритца исследованы линейные колебания консольной и защемленной с двух сторон конической оболочки. Численно установлено, что минимальная собственная частота при колебаниях защемленной с двух сторон оболочки наблюдается при числе волн в окружном направлении, равном 1, а при колебаниях консольной оболочки – при числе волн в окружном направлении, равном 6.

Для всех границ области динамической неустойчивости защемленной и консольной трехслойной оболочки минимальное значение критического давления наблюдается при числе волн в окружном направлении  $n=1$ . При увеличении числа Маха  $M$  значение критического давления падает. В консольной конической оболочке величина критического давления меньше, чем в оболочке, защемленной с обеих сторон.

### Финансирование

Исследование финансировалось Национальным фондом исследований Украины (грант 128/02.2020).

### Литература

1. Karimiasl M., Ebrahimi F. Large amplitude vibration of viscoelastically damped multiscale composite doubly curved sandwich shell with flexible core and MR layers. *Thin-Walled Structures*. 2019. Vol. 144. Paper ID 106128. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2019.04.020>.
2. Karimiasla M., Ebrahimi F., Maheshb V. Nonlinear forced vibration of smart multiscale sandwich composite doubly curved porous shell. *Thin-Walled Structures*. 2019. Vol. 143. Paper ID 106152. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2019.04.044>.
3. Cong P. H., Khanh N. D., Khoa N. D., Duc N. D. New approach to investigate nonlinear dynamic response of sandwich auxetic double curves shallow shells using TSDT. *Composite Structures*. 2018. Vol. 185. P. 455–465. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.11.047>.
4. Yadav A., Amabili M., Panda S. K., Dey T., Kumar R. Forced nonlinear vibrations of circular cylindrical sandwich shells with cellular core using higher-order shear and thickness deformation theory. *Journal of Sound and Vibration*. 2021. Vol. 510. Paper ID 116283. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2021.116283>.
5. Van Quyen N., Thanh N. V., Quan T. Q., Duc N. D. Nonlinear forced vibration of sandwich cylindrical panel with negative Poisson's ratio auxetic honeycombs core and CNTRC face sheets. *Thin-Walled Structures*. 2021. Vol. 162. Paper ID 107571. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2021.107571>.
6. Zhang Y., Li Y. Nonlinear dynamic analysis of a double curvature honeycomb sandwich shell with simply supported boundaries by the homotopy analysis method. *Composite Structures*. 2019. Vol. 221. Paper ID 110884. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.04.056>.
7. Naidu N. V. S., Sinha P. K. Nonlinear free vibration analysis of laminated composite shells in hygrothermal environments. *Composite Structures*. 2007. Vol. 77. Iss. 4. P. 475–483. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2005.08.002>.
8. Catapano A., Montemurro M. A multi-scale approach for the optimum design of sandwich plates with honeycomb core. Part I: homogenisation of core properties. *Composite Structure*. 2014. Vol. 118. P. 664–676. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2014.07.057>.



9. Amabili M. Nonlinear mechanics of shells and plates in composite, soft and biological materials. United Kingdom, Cambridge: Cambridge University Press, 2018. 568 p. <https://doi.org/10.1017/9781316422892>.
10. Meirovitch L. Fundamentals of vibrations. New York: Mc Graw Hill Press, 2001. 806 p. <https://doi.org/10.1115/1.1421112>.
11. Amabili M. Non-linearities in rotation and thickness deformation in a new third-order thickness deformation theory for static and dynamic analysis of isotropic and laminated doubly curved shells. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2015. Vol. 69. P. 109–128. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2014.11.026>.
12. Деревянко І., Аврамов К., Успенський Б., Саленко О. Експериментальний аналіз механічних характеристик деталей ракет-носіїв, виготовлених за допомогою FDM адитивних технологій. *Технічна механіка*. 2021. Вип. 1. С. 92–100. <https://doi.org/10.15407/itm2021.01.092>.

Поступила в редакцію 11.01.2022

**Динамічна нестійкість тришарової конічної оболонки із стільниковим заповнювачем,  
виготовленим адитивними технологіями**

**К. В. Аврамов, Б. В. Успенський, І. В. Біблік**

Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України,  
61046, Україна, м. Харків, вул. Пожарського, 2/10

*Отримано математичну модель динамічної нестійкості тришарових конічних оболонок із стільниковим заповнювачем, виготовленим за допомогою адитивних технологій. Динамічна нестійкість викликана взаємодією оболонки з надзвуковим газовим потоком. Середній шар конструкції є стільниковим заповнювачем, який гомогенізується в ортотропне однорідне середовище. Верхній та нижній шари оболонки виготовляються з вуглепластику. Коливання конструкції описуються п'ятнадцятьма невідомими, а кожен шар конструкції – п'ятьма невідомими: трьома проєкціями переміщень серединної поверхні шару і двома кутами повороту нормалі серединної поверхні шару. Для опису деформаційного стану конструкції використовується зсувна теорія високого порядку. Зв'язок між напруженнями і деформаціями виражається ступеневим розкладанням за поперечною координатою аж до її кубічних ступенів. Для отримання системи звичайних диференціальних рівнянь, що описують динамічну нестійкість, використовується метод заданих форм. Для оцінки динамічної нестійкості розраховуються характерні показники із рішення узагальненої проблеми власних значень. Досліджуються власні коливання конструкції методом Релея-Рітца. У консольній оболонці мінімальна власна частота спостерігається при числі хвиль в обводовому напрямку, що дорівнює 6, а в зацземленій з двох сторін оболонці мінімальна власна частота – при числі хвиль в обводовому напрямку, що дорівнює 1. За допомогою чисельного моделювання досліджуються властивості динамічної нестійкості тривіального стану рівноваги конструкції. Аналізуються консольні та зацземлені з обох боків оболонки. Показано, що мінімальний критичний тиск спостерігається при числі хвиль в обводовому напрямку, що дорівнює 1. Досліджується залежність критичного тиску від числа Маха й кута атаки. Встановлено, що при збільшенні числа Маха і кута атаки критичний тиск падає.*

**Ключові слова:** лінійна динамічна система, тришарова конічна оболонка, характеристичні показники, числа Маха.