УДК 539.3

# АНАЛІЗ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ШАРУ З ДВОМА ЦИЛІНДРИЧНИМИ ПРУЖНИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ Й МІШАНИМИ ГРАНИЧНИМИ УМОВАМИ

**В. Ю. Мірошніков**, д-р техн. наук
v.miroshnikov@khai.edu
ORCID: 0000-0002-9491-0181

**О. Б. Савін**, канд. техн. наук
asavin344@gmail.com
ORCID: 0000-0002-2664-0255

**М. М. Гребенніков**
m.grebennikov@khai.edu
ORCID: 0000-0001-7648-3027

**О. А. Погребняк**
pogrebnaksasa@gmail.com
ORCID: 0000-0002-0912-8823

Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут», 61070, Україна, Харків, вул. Чкалова, 17

*Досліджується просторова задача теорії пружності для шару з двома нескінченними круговими суцільними циліндричними включеннями, паралельними між собою й межами шару. Шар і включення є однорідними, ізотропними матеріалами, фізичні характеристики цих тіл відмінні одна від одної. Кругові циліндричні пружні включення жорстко спряжені з шаром. На верхній межі шару задана просторова функція напружень, на нижній – переміщень. Необхідно визначити напружено-деформований стан композитного тіла. При цьому розв'язання задачі базується на узагальненому методі Фур'є, де використовуються особливі формули переходу між базисними розв'язками рівняння Ламе у різних системах координат. Таким чином, шар розглядається в декартовій системі координат, включення – у локальних циліндричних. Задовольняючи граничним умовам й умовам спряження, отримано системи нескінченних інтегро-алгебраїчних рівнянь, які в подальшому зведені до лінійних алгебраїчних. Нескінченна система розв'язується методом редукції. Після знаходження невідомих можна визначити напруження в будь-якій точці пружного композиційного тіла. У чисельних дослідженнях проведено порівняльний аналіз напруженого стану на поверхнях включень за різних відстаней між ними. Аналіз показав, що при зближенні включень напружений стан у шарі практично не змінюється. Однак спостерігається суттєва його зміна в тілах включень. Так, при щільному армуванні (($R_1 + R_2$) / $L$ > 0,5) необхідно враховувати відстані між армуючими волокнами. При значеннях напружень від 0 до 1 і порядку системи рівнянь m=10 точність виконання граничних умов склала $10^{-4}$. При збільшенні порядку системи точність виконання граничних умов зростатиме. Представлене аналітико-чисельне розв'язання може використовуватися для високоточного визначення напружено-деформованого стану представленого типу задач, а також як еталонне для задач, що базуються на чисельних методах.*

***Ключові слова**: композит, циліндричні включення в шарі, узагальнений метод Фур'є.*

## Вступ

У різних галузях промисловості доводиться стикатися з проєктуванням деталей і конструкцій з композитних матеріалів, які часто є шаром з поздовжнім армуванням, де, виходячи з інженерних розрахунків, необхідно розташовувати елементи армування на близькій відстані один до одного. З огляду на це важливо розуміти те, як впливає відстань між поздовжніми стрижнями на напружено-деформований стан у зоні контакту шару й армування. Для вирішення цих завдань можна проводити експерименти [1, 2] або використовувати чисельно-експериментальний підхід [3–7], сприймаючи композит як цілісний шар. Інший підхід – чисельно-аналітичний, у якому тіло композиту сприймається як складове перетину із кількох елементів. Однак для цього потрібен ефективний та високоточний метод розрахунку напружено-деформованого стану. Так, у роботі [8] із використанням методу зображень розв'язана двовимірна крайова задача дифракції симетричних нормальних хвиль поздовжнього зсуву для шару з циліндричною порожниною або включенням, а в роботах [9–12] на основі методу розкладання в ряди Фур'є – стаціонарні задачі дифракції хвиль визначення напруження для шару з циліндричною порожниною або включенням.

Однак для просторових моделей з великою кількістю граничних поверхонь і високою точністю визначення напруженого стану найбільше підходить чисельно-аналітичний узагальнений метод Фур'є [13], на основі якого розглянуті задачі для напівпростору з порожниною або включенням [14–16], шару з порожниною або включенням [17–20], циліндра з циліндричними порожнинами або включеннями [21–24], а також для напівпростору з порожниною, спряженою з шаром [25].

У роботі при проведенні досліджень також використовується узагальнений метод Фур'є.

**Постановка задачі**

У пружному однорідному шарі, паралельно його межам, розташовано два циліндричні включення радіусами $R_p$ із матеріалів, відмінних від матеріалу шару.

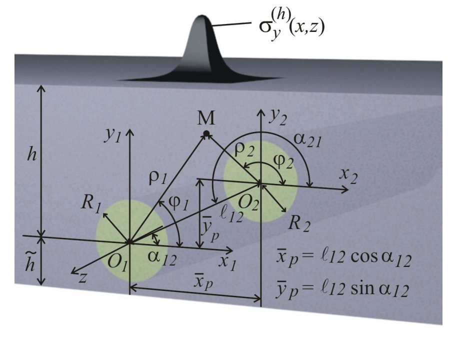



***Рис. 1. Шар з двома циліндричними включеннями***

Включення розглядатимемо в локальних циліндричних системах координат ($\rho_p$, $\varphi_p$, $z$), шар – у декартовій системі координат ($x$, $y$, $z$), суміщеною із системою координат включення з номером $p$=1. Межі шару розташовані на відстані $y$=$h$ та $y$=$-\tilde{h}$ (рис. 1).

Необхідно знайти рішення рівняння Ламе за умови, що на верхній межі шару задані напруження $F\vec{U}_0(x,z)\big|_{y=h} = \vec{F}_h^0(x,z)$, на нижній – переміщення $\vec{U}_0(x,z)\big|_{y=-\tilde{h}} = \vec{U}_{\tilde{h}}^0(x,z)$, на межах контакту шару і включень – умови спряження

$$\vec{U}_0(\varphi_p, z)\Big|_{\rho_p=R_p} = \vec{U}_p(\varphi_p, z)\Big|_{\rho_p=R_p}, \tag{1}$$

$$F\vec{U}_0(\varphi_p, z)\Big|_{\rho_p=R_p} = F\vec{U}_p(\varphi_p, z)\Big|_{\rho_p=R_p}, \tag{2}$$

де $\vec{U}_0$ – переміщення в шарі; $\vec{U}_p$ – переміщення в циліндричному включенні; $F\vec{U} = 2 \cdot G \cdot \left[ \dfrac{\sigma}{1-2\cdot\sigma} \vec{n} \cdot \operatorname{div}\vec{U} + \dfrac{\partial}{\partial n}\vec{U} + \dfrac{1}{2}\left(\vec{n} \times \operatorname{rot}\vec{U}\right) \right]$ – оператор напруження;

$$\begin{aligned} \vec{F}_h^0(x,z) &= \tau_{yx}^{(h)}\vec{e}_x + \sigma_y^{(h)}\vec{e}_y + \tau_{yz}^{(h)}\vec{e}_z \\ \vec{U}_{\tilde{h}}^0(x,z) &= U_x^{(\tilde{h})}\vec{e}_x + U_y^{(\tilde{h})}\vec{e}_y + U_z^{(\tilde{h})}\vec{e}_z \end{aligned} \tag{3}$$

відомі функції, які вважатимемо швидко спадаючими від початку координат по осі $z$ і $x$.

**Метод розв'язання**

Оберемо базисні розв'язки рівняння Ламе для декартових і циліндричних систем координат у вигляді [11]:

$$\begin{aligned} &\vec{u}_k^{\pm}(x,y,z;\lambda,\mu) = N_k^{(d)} e^{i(\lambda z + \mu x) \pm \gamma y}; \\ &\vec{R}_{k,m}(\rho,\varphi,z;\lambda) = N_k^{(p)} I_m(\lambda\rho) e^{i(\lambda z + m\varphi)}; \\ &\vec{S}_{k,m}(\rho,\varphi,z;\lambda) = N_k^{(p)}\left[(\operatorname{sign}\lambda)^m K_m(|\lambda|\rho) \cdot e^{i(\lambda z + m\varphi)}\right], k = 1,2,3; \end{aligned} \tag{4}$$

$$N_1^{(d)} = \frac{1}{\lambda}\nabla;\ N_2^{(d)} = \frac{4}{\lambda}(\sigma - 1)\vec{e}_2^{(1)} + \frac{1}{\lambda}\nabla(y\,\cdot);\ N_3^{(d)} = \frac{i}{\lambda}\operatorname{rot}\left(\vec{e}_3^{(1)}\,\cdot\right);\ N_1^{(p)} = \frac{1}{\lambda}\nabla;$$

$$N_2^{(p)} = \frac{1}{\lambda}\left[\nabla\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + 4(\sigma - 1)\left(\nabla - \vec{e}_3^{(2)}\frac{\partial}{\partial z}\right)\right];\ N_3^{(p)} = \frac{i}{\lambda}\operatorname{rot}\left(\vec{e}_3^{(2)}\,\cdot\right);\ \gamma = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2},\ -\infty < \lambda, \mu < \infty,$$

де $I_m(x)$, $K_m(x)$ – модифіковані функції Бесселя; $\vec{R}_{k,m}$, $\vec{S}_{k,m}$ – внутрішні й зовнішні розв'язки рівняння Ламе для циліндру відповідно; $\vec{u}_k^{(-)}$, $\vec{u}_k^{(+)}$ – розв'язки рівняння Ламе для шару; $\sigma$ – коефіцієнт Пуассона.

Розв'язання задачі представимо у вигляді

$$\begin{aligned} \vec{U}_0 = &\sum_{p=1}^{2}\sum_{k=1}^{3}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} B_{k,m}^{(p)}(\lambda) \cdot \vec{S}_{k,m}(\rho_p, \varphi_p, z; \lambda) d\lambda + \\ &+ \sum_{k=1}^{3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(H_k(\lambda,\mu) \cdot \vec{u}_k^{(+)}(x,y,z;\lambda,\mu) + \tilde{H}_k(\lambda,\mu) \cdot \vec{u}_k^{(-)}(x,y,z;\lambda,\mu)\right) d\mu d\lambda \end{aligned} \tag{5}$$

$$\vec{U}_p = \sum_{k=1}^{3}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} A_{k,m}^{(p)}(\lambda) \cdot \vec{R}_{k,m}(\rho_p, \varphi_p, z; \lambda) d\lambda, \tag{6}$$

де $\vec{S}_{k,m}(\rho_p,\varphi_p,z;\lambda)$, $\vec{R}_{k,m}(\rho_p,\varphi_p,z;\lambda)$, $\vec{u}_k^{(+)}(x,y,z;\lambda,\mu)$ і $\vec{u}_k^{(-)}(x,y,z;\lambda,\mu)$ – базисні розв'язки, які задані формулами (4), а невідомі функції $H_k(\lambda,\mu)$, $\widetilde{H}_k(\lambda,\mu)$, $B_{k,m}^{(p)}(\lambda)$, $A_{k,m}^{(p)}(\lambda)$ необхідно знайти з граничних умов (3) й умов спряження (1) і (2).

Для переходу між системами координат скористаємося формулами [17]:

– для переходу від розв'язків $\vec{S}_{k,m}$ циліндричної системи координат до розв'язків шару $\vec{u}_k^{(-)}$ (при $y$>0) і $\vec{u}_k^{(+)}$ (при $y$<0)

$$\vec{S}_{k,m}(\rho_p,\varphi_p,z;\lambda)=\frac{(-i)^m}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\omega_{\mp}^m\cdot e^{-i\mu\bar{x}_p\pm\gamma\bar{y}_p}\cdot\vec{u}_k^{(\mp)}\cdot\frac{d\mu}{\gamma},\ k=1,\ 3;$$

$$\vec{S}_{2,m}(\rho_p,\varphi_p,z;\lambda)=\frac{(-i)^m}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\omega_{\mp}^m\cdot\left(\left(\pm m\cdot\mu-\frac{\lambda^2}{\gamma}\pm\lambda^2\bar{y}_p\right)\vec{u}_1^{(\mp)}\mp\lambda^2\vec{u}_2^{(\mp)}\pm\right. \tag{7}$$

$$\left.\pm 4\mu(1-\sigma)\vec{u}_3^{(\mp)}\right)\cdot\frac{e^{-i\mu\bar{x}_p\pm\gamma\bar{y}_p}d\mu}{\gamma^2},$$

де $\gamma=\sqrt{\lambda^2+\mu^2}$, $\omega_{\mp}(\lambda,\mu)=\dfrac{\mu\mp\gamma}{\lambda}$, $m=0,\pm1,\pm2,\ldots$ ;

– для переходу від розв'язків $\vec{u}_k^{(+)}$ і $\vec{u}_k^{(-)}$ шару до розв'язків $\vec{R}_{k,m}$ циліндричної системи координат

$$\vec{u}_k^{(\pm)}(x,y,z)=e^{i\mu\bar{x}_p\pm\gamma\bar{y}_p}\cdot\sum_{m=-\infty}^{\infty}(i\cdot\omega_{\mp})^m\vec{R}_{k,m},\ (k=1,\ 3);$$

$$\vec{u}_2^{(\pm)}(x,y,z)=e^{i\mu\bar{x}_p\pm\gamma\bar{y}_p}\cdot\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left[(i\cdot\omega_{\mp})^m\cdot\lambda^{-2}\left(\left(m\cdot\mu+\bar{y}_p\cdot\lambda^2\right)\cdot\vec{R}_{1,m}\pm\right.\right. \tag{8}$$

$$\left.\left.\pm\gamma\cdot\vec{R}_{2,m}+4\mu(1-\sigma)\vec{R}_{3,m}\right)\right],$$

де $\vec{R}_{k,m}=\vec{\widetilde{b}}_{k,m}(\rho_p,\lambda)\cdot e^{i(m\varphi_p+\lambda z)}$; $\vec{\widetilde{b}}_{1,n}(\rho,\lambda)=\vec{e}_\rho\cdot I_n'(\lambda\rho)+i\cdot I_n(\lambda\rho)\cdot\left(\vec{e}_\varphi\dfrac{n}{\lambda\rho}+\vec{e}_z\right)$;

$$\vec{\widetilde{b}}_{2,n}(\rho,\lambda)=\vec{e}_\rho\cdot\left[(4\sigma-3)\cdot I_n'(\lambda\rho)+\lambda\rho I_n''(\lambda\rho)\right]+\vec{e}_\varphi i\cdot m\left(I_n'(\lambda\rho)+\frac{4(\sigma-1)}{\lambda\rho}I_n(\lambda\rho)\right)+\vec{e}_z i\lambda\rho I_n'(\lambda\rho);$$

$\vec{\widetilde{b}}_{3,n}(\rho,\lambda)=-\left[\vec{e}_\rho\cdot I_n(\lambda\rho)\dfrac{n}{\lambda\rho}+\vec{e}_\varphi\cdot i\cdot I_n'(\lambda\rho)\right]$; $\vec{e}_\rho$, $\vec{e}_\varphi$, $\vec{e}_z$ – орти в циліндричній системі координат;

– для переходу від розв'язків циліндру з номером $p$ до розв'язків циліндру з номером $q$

$$\vec{S}_{k,m}(\rho_p,\varphi_p,z;\lambda)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\vec{b}_{k,pq}^{mn}(\rho_q)\cdot e^{i(n\varphi_q+\lambda z)},k=1,\ 2,\ 3;$$

$$\vec{b}_{1,pq}^{mn}(\rho_q)=(-1)^n\widetilde{K}_{m-n}(\lambda\ell_{pq})\cdot e^{i(m-n)\alpha_{pq}}\cdot\vec{\widetilde{b}}_{1,n}(\rho_q,\lambda);$$

$$\vec{b}_{3,pq}^{mn}(\rho_q)=(-1)^n\widetilde{K}_{m-n}(\lambda\ell_{pq})\cdot e^{i(m-n)\alpha_{pq}}\cdot\vec{\widetilde{b}}_{3,n}(\rho_q,\lambda); \tag{9}$$

$$\vec{b}_{2,pq}^{mn}(\rho_q)=(-1)^n\left\{\widetilde{K}_{m-n}(\lambda\ell_{pq})\cdot\vec{\widetilde{b}}_{2,n}(\rho_q,\lambda)-\frac{\lambda}{2}\ell_{pq}\cdot\left[\widetilde{K}_{m-n+1}(\lambda\ell_{pq})+\widetilde{K}_{m-n-1}(\lambda\ell_{pq})\right]\cdot\vec{\widetilde{b}}_{1,n}(\rho_q,\lambda)\right\}\cdot e^{i(m-n)\alpha_{pq}},$$

де $\alpha_{pq}$ – кут між віссю $x_p$ і відрізком $\ell_{qp}$, $\widetilde{K}_m(x)=(sign(x))^m\cdot K_m(|x|)$.

Для задоволення граничних умов на верхній межі шару вектор (5) прирівняємо (при $y$=$h$) до заданого $\vec{F}_h^0(x,z)$, представленого через подвійний інтеграл Фур'є. Базисні розв'язки

$\vec{S}_{k,m}(\rho_p, \varphi_p, z; \lambda)$ за допомогою формул переходу (7) перепишемо у декартовій системі координат через базисні розв'язки $\vec{u}_k^{(-)}(x, y, z; \lambda, \mu)$. Враховуючи це, отримаємо перші три рівняння (по одному на кожну проєкцію) із 12 невідомими $H_k(\lambda, \mu)$, $\widetilde{H}_k(\lambda, \mu)$, $B_{k,m}^{(1)}(\lambda)$, $B_{k,m}^{(2)}(\lambda)$.

Для задоволення граничних умов на нижній межі шару вектор (5) прирівняємо (при $y=-\widetilde{h}$) до заданого $\vec{U}_{\widetilde{h}}^{0}(x, z)$, представленого через подвійний інтеграл Фур'є. Базисний розв'язок $\vec{S}_{k,m}(\rho_p, \varphi_p, z; \lambda)$ за допомогою формул переходу (7) перепишемо у декартовій системі координат через базисні розв'язки $\vec{u}_k^{(+)}(x, y, z; \lambda, \mu)$. Завдяки цьому, отримаємо другі три рівняння.

Із цієї системи рівнянь знайдемо $H_k(\lambda, \mu)$ і $\widetilde{H}_k(\lambda, \mu)$ через $B_{k,m}^{(p)}(\lambda)$.

Враховуючи умови спряження шару і включень, можемо записати по три рівняння для кожного включення у вигляді переміщень (1). При цьому, використовуючи вираз $\vec{U}_0(\varphi_p, z)\big|_{\rho_p = R_p}$, необхідно врахувати формули переходу від розв'язків $\vec{u}_k^{(+)}(x, y, z; \lambda, \mu)$ і $\vec{u}_k^{(-)}(x, y, z; \lambda, \mu)$ до розв'язків $\vec{R}_{k,m}(\rho_p, \varphi_p, z; \lambda)$ (8) і формули переходу від розв'язків $\vec{S}_{k,m}(\rho_q, \varphi_q, z; \lambda)$ до розв'язків $\vec{S}_{k,m}(\rho_p, \varphi_p, z; \lambda)$ (9). Застосувавши до отриманого виразу оператор напруження, можемо записати ще три рівняння для кожного включення у вигляді напружень (2).

Якщо ми маємо два включення, то таких рівнянь (у переміщеннях і напруженнях) буде 12 із невідомими $H_k(\lambda, \mu)$, $\widetilde{H}_k(\lambda, \mu)$, $B_{k,m}^{(p)}(\lambda)$, $A_{k,m}^{(p)}(\lambda)$. Виключивши з цих рівнянь знайдені раніше $H_k(\lambda, \mu)$ і $\widetilde{H}_k(\lambda, \mu)$ через $B_{k,m}^{(p)}(\lambda)$ і звільнившись від рядів по $m$ і інтегралів по λ, отримаємо 12 нескінчених лінійних алгебраїчних рівнянь другого роду для визначення невідомих $B_{k,m}^{(p)}(\lambda)$ і $A_{k,m}^{(p)}(\lambda)$.

Визначник цієї системи рівнянь співпадає з [16].

До отриманих нескінченних систем рівнянь застосуємо метод редукції, внаслідок чого знайдемо коефіцієнти $B_{k,m}^{(p)}(\lambda)$. Тепер $B_{k,m}^{(p)}(\lambda)$ підставимо у вираз для $H_k(\lambda, \mu)$ і $\widetilde{H}_k(\lambda, \mu)$. Так будуть знайдені всі невідомі виразів (5) і (6).

Представлені у роботі розв'язання нескінченної системи методом редукції показали його збіжність, що з високою точністю задовольняє граничним умовам.

**Чисельні дослідження напруженого стану**

У пружному ізотропному шарі (рис. 1) розташовано два, жорстко зчеплені з ним, пружні ізотропні циліндричні включення. Коефіцієнт Пуассона шару (ABS пластик) $\sigma_0$=0,38, модуль пружності $E_0$=1700 Н/мм$^2$, включення (сталь) $\sigma_1$=$\sigma_2$=0,21, $E_1$=$E_2$=200000 Н/мм$^2$. Геометричні характеристики моделі: $R_1$=$R_2$=10 мм, $h$=20 мм, $\widetilde{h}$ =30 мм, $\alpha_{12}$=0. Відстань між центрами включень приймемо у двох варіантах: $L_{12}$=25 мм і $L_{12}$=30 мм.

На верхній межі шару задані напруження у вигляді хвилі $\sigma_y^{(h)}(x, z) = -10^8 \cdot (z^2 + 10^2)^{-2} \cdot (x^2 + 10^2)^{-2}$, $\tau_{yx}^{(h)} = \tau_{yz}^{(h)} = 0$, на нижній переміщення відсутні $U_x^{(\widetilde{h})} = U_y^{(\widetilde{h})} = U_z^{(\widetilde{h})} = 0$.

Нескінчена система була зрізана по параметру $m$. При $L_{12}$=30 мм параметр $m$=6, при $L_{12}$=25 мм параметр $m$=10.

Обчислення інтегралів виконано квадратурними формулами Філона (для функцій, що коливаються) і Сімпсона (для функцій без осциляцій). Точність виконання граничних умов при вказаних значеннях $m$ і заданих геометричних параметрах – $10^{-4}$.

При зближенні включень напружений стан у шарі майже не змінюється. Відмінність спостерігається лише в тілах включень.

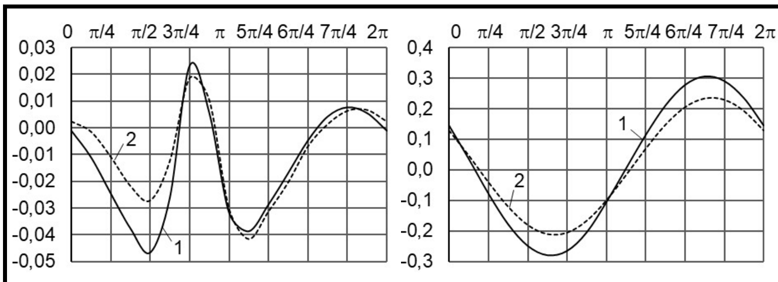
На рис. 2 наведено графіки напружень $\sigma_\varphi$ і $\sigma_z$ на поверхні другого включення при $z$=0 в Н/мм$^2$.

При наближенні другого циліндричного включення до першого, напруження $\sigma_\varphi$ і $\sigma_z$ на його поверхні збільшуються. Причому значення напружень $\sigma_\varphi$ значно зростають (рис. 2, а), особливо у верхній частині включення, де вони є максимальними. У цілому зростання напруження у включенні, з наближенням його до місця дислокації навантаження, є природним.

На рис. 3 зображено графіки напружень $\sigma_\varphi$ і $\sigma_z$ на поверхні першого включення при $z$=0 в Н/мм$^2$.

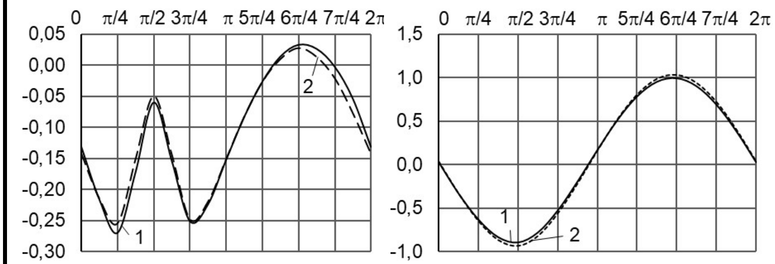
При наближенні другого циліндричного включення до першого, напруження $\sigma_\varphi$ на поверхні першого циліндра збільшуються (рис. 3, а), а напруження $\sigma_z$ трохи зменшуються (рис. 3, б), перерозподіляючись на другий циліндр.

На поверхні першого циліндра максимальне значення напружень $\sigma_\varphi$ виникають при $\varphi=\pi/4$, а $\sigma_z$ – при $\varphi=\pi/2$.




а б

***Рис. 2. Напруження на поверхні другого включення:***
а – $\sigma_\varphi$; б – $\sigma_z$; 1 – при $L_{12}$=25 мм; 2 – при $L_{12}$=30 мм




а б

***Рис. 3. Напруження на поверхні першого включення:***
а – $\sigma_\varphi$; б – $\sigma_z$; 1 – при $L_{12}$=25 мм; 2 – при $L_{12}$=30 мм

**Висновки**

На основі узагальненого методу Фур'є запропоновано метод розв'язання третьої основної просторової задачі теорії пружності для шару з двома поздовжніми круговими циліндричними включеннями. Задачу зведено до нескінченної системи лінійних рівнянь алгебри, що допускає застосування до неї методу редукції. Чисельні дослідження дають підстави стверджувати, що її розв'язання може бути з будь-якою точністю знайдене запропонованим методом, що підтверджується високою точністю виконання граничних умов.

Метод розв'язання можна використовувати при проєктуванні композитних матеріалів, розрахунковою схемою яких є армований шар із заданими граничними умовами у вигляді напруження на верхній межі шару і переміщень на нижній.

Представлений порівняльний аналіз показує, що зближення елементів армування впливає на напружений стан у них, зокрема, на напруження $\sigma_\varphi$ і $\sigma_z$.

Запропонований метод розв'язання дозволяє отримати напружено-деформований стан для шару лише з двома поздовжніми круговими циліндричними включеннями. Для подальшого розвитку цього методу можна збільшити кількість включень до трьох і більше. Для цього необхідно змінити даний алгоритм, пропрацювавши зв'язки між двома зсунутими системами координат, а також між їх базисними розв'язками.

**Література**

1. Aitharaju V., Aashat S., Kia H., Satyanarayana A., Bogert P. Progressive damage modeling of notched composites. NTRS – NASA Technical Reports Server: Official site. 2016. https://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/20160012242.pdf.
2. Ершова А. Ю., Мартиросов М. И. Экспериментальные исследования полимерных композитов с мелкодисперсным наполнителем (испытания на растяжение-сжатие). *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2014. Т. 5. С. 61–69.
3. Pelekh B. L., Makhnitskii R. N. Approximate methods for solving problems on the concentration of stresses around apertures in orthotropic disks made out of composite materials. *Mechanics of Composite Materials*. 1981. Vol. 16. Iss. 6. P. 690–693. https://doi.org/10.1007/BF00606258.
4. Pobedrya B. E., Gorbachev V. I. Stress and strain concentration in composite materials. *Mechanics of Composite Materials*. 1984. Vol. 20. Iss. 2. P. 141–148. https://doi.org/10.1007/BF00610353.

5. Annin B. D., Maksimenko V. N. Evaluation of the failure of plates made of composite materials with holes. *Mechanics of Composite Materials*. 1989. Vol. 25. Iss. 2. P. 216–222. https://doi.org/10.1007/BF00616267.
6. Smetankina N., Kravchenko I., Merculov V., Ivchenko D., Malykhina A. Modelling of bird strike on an aircraft glazing. *Integrated Computer Technologies in Mechanical Engineering*. *Series "Advances in Intelligent Systems and Computing"*. 2020. Vol. 1113. P. 289–297. https://doi.org/10.1007/978-3-030-37618-5_25.
7. Сметанкина Н. В. Нестационарное деформирование, термоупругость и оптимизация слоистых пластин и цилиндрических оболочек. Харьков: Миськдрук, 2011. 376 с.
8. Rodichev Y. M., Smetankina N. V., Shupikov O. M., Ugrimov S. V. Stress-strain assessment for laminated aircraft cockpit windows at static and dynamic load. *Strength of Materials*. 2018. Vol. 50. Iss. 6. P. 868–873. https://doi.org/10.1007/s11223-019-00033-4.
9. Волчков В. В., Вуколов Д. С., Сторожев В. И. Дифракция волн сдвига на внутренних туннельных цилиндрических неоднородностях в виде полости и включения в упругом слое со свободными гранями. *Механика твердого тела*. 2016. Т. 46. С. 119–133.
10. Гузь А. Н., Кубенко В. Д., Черевко М. А. Дифракция упругих волн. Киев: Наукова думка, 1978. 307 с.
11. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наукова думка, 1981. 284 с.
12. Grinchenko V. T., Ulitko A. F. An exact solution of the problem of stress distribution close to a circular hole in an elastic layer. *Soviet Applied Mechanics*. 1968. Vol. 4. P. 31–37. https://doi.org/10.1007/BF00886618.
13. Николаев А. Г., Проценко В. С. Обобщенный метод Фурье в пространственных задачах теории устойчивости. Харьков: Национальный аэрокосмический университет «ХАИ», 2011. 344 с.
14. Николаев А. Х., Орлов Е. М. (2012). Решение первой осесимметричной термоупругой краевой задачи для трансверсально-изотропного полупространства со сфероидальной полосой. Проблемы вычислительной механики и прочности конструкций. 2012. Т. 20. С. 253–259.
15. Николаев А. Г., Щербакова А. Ю., Юхно А. И. Действие сосредоточенной силы на трансверсально-изотропном полупространстве с параболоидальным включением. *Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов*. 2006. Т. 2. С. 47–51.
16. Protsenko V., Miroshnikov V. Investigating a problem from the theory of elasticity for a half-space with cylindrical cavities for which boundary conditions of contact type are assigned. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. Applied mechanics*. 2018. Vol. 4. No. 7 (94). P. 43–50. https://doi.org/10.15587/1729-4061.2018.139567.
17. Miroshnikov V. Yu. Stress state of an elastic layer with a cylindrical cavity on a rigid foundation. *International Applied Mechanics*. 2020. Vol. 56 (3). P. 372–381. https://doi.org/10.1007/s10778-020-01021-x.
18. Miroshnikov V. Y., Medvedeva A. V., Oleshkevich S. V. Determination of the stress state of the layer with a cylindrical elastic inclusion. *Materials Science Forum*. 2019. Vol. 968. P. 413–420. https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/MSF.968.413.
19. Miroshnikov V., Denysova T., Protsenko V. The study of the first main problem of the theory of elasticity for a layer with a cylindrical cavity. *Strength of Materials and Theory of Structures*. 2019. Vol. 103. P. 208–218. https://doi.org/10.32347/2410-2547.2019.103.208-218.
20. Miroshnikov V. Yu., Protsenko V. S. Determining the stress state of a layer on a rigid base weakened by several longitudinal cylindrical cavities. *Journal of Advanced Research in Technical Science*. 2019. Vol. 17. P. 11–21.
21. Nikolaev A. G., Tanchik E. A. The first boundary-value problem of the elasticity theory for a cylinder with N cylindrical cavities. *Numerical Analysis and Applications*. 2015. Vol. 8. P. 148–158. https://doi.org/10.1134/S1995423915020068.
22. Nikolaev A. G., Tanchik E. A. Stresses in an infinite circular cylinder with four cylindrical cavities. *Journal of Mathematical Sciences*. 2016. Vol. 217 (3). P. 299–311. https://doi.org/10.1007/s10958-016-2974-z.
23. Nikolaev A. G., Tanchik E. A. Model of the stress state of a unidirectional composite with cylindrical fibers forming a tetragonal structure. *Mechanics of Composite Materials*. 2016. Vol. 52. P. 177–188. https://doi.org/10.1007/s11029-016-9571-6.
24. Nikolaev A. G., Tanchik E. A. Stresses in an elastic cylinder with cylindrical cavities forming a hexagonal structure. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2016. Vol. 57. P. 1141–1149. https://doi.org/10.1134/S0021894416060237.
25. Miroshnikov V. Yu. Investigation of the stress state of a composite in the form of a layer and a half space with a longitudinal cylindrical cavity at stresses given on boundary surfaces. *Journal of Mechanical Engineering – Problemy mashynobuduvannia*. 2019. Vol. 22. No. 4. P. 24–31. https://doi.org/10.15407/pmach2019.04.024.


*Надійшла до редакції 04.05.2022*