УДК 539.3

В. А. Богомолов[*], д-р.техн.наук.
С. Н. Склепус[**], канд. физ.-мат. наук

[*] Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет
(e-mail: bv@khadi.kharkov.ua)
Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины
(г. Харьков, e-mail: ssklepus@rambler.ru)

РАСЧЕТ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ, ПОЛЗУЧЕСТИ И ПОВРЕЖДАЕМОСТИ МНОГОСЛОЙНЫХ ПЛИТ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Рассмотрены задачи расчета напряженно-деформированного состояния, ползучести и повреждаемости многослойных ортотропных плит на упругом основании. Вариационная постановка выполнена в рамках уточненной теории пластин и оболочек. Для решения нелинейной начально-краевой задачи ползучести и повреждаемости предложено использовать сочетание методов R-функций, Ритца и Рунге-Кутта-Мерсона. Приведен тестовый пример расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) двухслойной плиты на упругом основании. Разработанный метод может быть использован для исследования НДС и длительной прочности дорожного покрытия.

Розглянуто задачі розрахунку напружено-деформованого стану, повзучості та пошкоджуваності багатошарових ортотропних плит на пружній основі. Варіаційну постановку виконано в рамках уточненої теорії пластин та оболонок. Для розв'язання нелінійної початково-крайової задачі повзучості та пошкоджуваності запропоновано використовувати поєднання методів R-функцій, Рітца, та Рунге-Кутта-Мерсона. Наведено тестовий приклад розрахунку напружено-деформованого стану (НДС) двошарової плити на пружній основі. Розроблений метод може бути використаний для дослідження НДС та тривалої міцності дорожнього покриття.

Ключевые слова: *многослойные плиты, напряженно-деформированное состояние, ползучесть, метод R-функций*

Введение

Одними из широко распространенных кусочно-однородных систем являются слоистые плиты на упругом основании – конструкции фундаментных плит, покрытия автомобильных дорог, аэродромов и т.п. При проектировании слоистых конструкций часто приходится решать задачу их прочности, в том числе задачу деградации конструктивных элементов во времени. В большинстве работ рассматривается упругое деформирование таких систем. Например, в работе [1] напряженно-деформированное состояние (НДС) многослойных плит на упругом основании исследуется путем решения задачи теории упругости для многослойной среды, а в работе [2] изгиб многослойных плит рассматривается в рамках уточненной теории оболочек и пластин. Задачи нелинейного деформирования многослойных плит, в частности задачи ползучести и повреждаемости вследствие ползучести, исследованы недостаточно. Это связано со сложностями решения нелинейных начально-краевых задач для неоднородных систем и с трудностями построения определяющих соотношений, учитывающих различные эффекты деформирования современных материалов. Так, например, большинство асфальтобетонных смесей проявляют зависимость прочностных и реологических свойств от вида напряженного состояния [3–5]. Кроме того, практические расчеты на ползучесть и длительную прочность нуждаются в широкой экспериментальной базе для идентификации параметров в определяющих соотношениях ползучести.

Постановка задачи и метод решения

Отнесем многослойную плиту постоянной толщины h и произвольной формы Ω в плане к прямоугольной декартовой системе координат $0x_1x_2z$. Количество слоев равно m. В общем случае, материал каждого слоя считаем ортотропным. Координатные линии совпадают с главными направлениями анизотропии. Пусть плита лежит на упругом основании и находится под действием поперечной нагрузки $q_z = q_z(x_1, x_2, t)$, нормальных и касательных контурных нагрузок $P_n^0(x_1, x_2, t)$, $P_\tau^0(x_1, x_2, t)$, приложенных на части контура $\partial\Omega_p$, а также температурного поля $T = T(x_1, x_2, z, t)$. На оставшейся части контура $\partial\Omega_u$ заданы условия закрепления.

Для постановки задачи будем использовать уточненную теорию пластин и оболочек, учитывающую нелинейное распределение поперечных касательных напряжений σ_{i3} ($i = 1, 2$) по толщине [6]. Основные гипотезы уточненной теории записываются следующим образом:

$$\sigma_{i3} = G_{i3}(z) f_i'(z) \psi_i(x_1, x_2, t), \qquad \sigma_{33} = 0,$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{\partial v_3}{\partial z} = v_{3,3} = 0, \qquad v_3(x_1, x_2, z, t) = w(x_1, x_2, t).$$

Тут $\psi_i(x_1, x_2, t)$ $(i = 1, 2)$ – искомые функции сдвига; $f_i(z) = B_{ik}z^3 + C_{ik}z^2 + D_{ik}z + E_{ik}$ ($k = 1, 2, \ldots, m$) – функции распределения поперечных касательных напряжений [6], коэффициенты которых зависят от номера слоя. Функции $f_i(z)$ строятся таким образом, чтобы удовлетворить условиям межслоевого контакта, а также условиям на верхней и нижней поверхностях плиты.

Компоненты тензора скоростей полных деформаций представим в виде суммы скоростей упругих деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}^e$, скоростей температурных деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}^T$ и скоростей необратимых деформаций ползучести $\dot{p}_{ij}$

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^T + \dot{p}_{ij}, \qquad (i, j = 1,2,3).$$

Здесь точка над символами обозначает полную производную по времени.

Температурные деформации вычисляются по формуле

$$\varepsilon_{ij}^T = \alpha_i (T - T_0) \delta_{ij},$$

где $\alpha_i = \alpha_i(z, T)$ – коэффициенты линейного температурного расширения; T_0 – температура, при которой напряжения и деформации отсутствуют; δ_{ij} – символ Кронекера. Считаем, что закон изменения температуры $T = T(x_1, x_2, z, t)$ задан или известен из решения задачи нестационарной теплопроводности.

Определяющие соотношения ползучести, а также кинетические уравнения повреждаемости для широкого класса материалов, в том числе с усложненными свойствами, например, такими, как зависимость характеристик материала от вида нагружения, представлены в работе [7].

В простейшем случае система уравнений, для описания изотропной ползучести и повреждаемости материалов, нечувствительных к виду нагружения, может быть записана в виде [8]

$$\dot{p}_{ij} = \frac{3}{2} A \sigma_i^n \frac{s_{ij}}{(1-\varphi)^q}, \qquad \dot{\varphi} = B \frac{\sigma_e^m}{(1-\varphi)^r}, \tag{1}$$

где φ – скалярный параметр повреждаемости; $\sigma_e = \alpha\sigma_i + (1 - \alpha)\sigma_1$, $0 \le \alpha \le 1$; σ_1 – максимальное главное напряжение; $\sigma_i = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}}$ – интенсивность напряжений; $s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})\delta_{ij}$; A, B, n, q, m, r – константы материала. Зависимость скорости деформации ползучести от температуры в формулах (1) может быть учтена путем представления A и B в виде [8]

$$A = A_0\exp(-U_0/kT), \quad B = B_0\exp(-U_0/kT),$$

где k – постоянная Больцмана; T – абсолютная температура; U_0, Δ_0 – энергии активации, которые являются константами материала.

Простейшей моделью упругого основания является модель Винклера, согласно которой интенсивность реакции q_r основания на плиту вычисляется как

$$q_r = cw,$$

где c = const – коэффициент жесткости упругого основания (коэффициент постели). Реакция основания направлена в сторону, противоположную прогибу плиты.

Может быть принята односторонняя связь между плитой и упругим основанием. В этом случае имеем

$$q_r = \begin{cases} 0, & w < 0, \\ cw, & w \geq 0. \end{cases}$$

Как видно из приведенной формулы, при отрыве плиты от основания, реакция основания равна нулю.

Существуют также другие, более сложные модели упругого основания, например двухпараметрическая модель В. З. Власова и Н. Н. Леонтьева [9]

$$q_r = c_1 w - c_2\Delta_w,$$

где c_1, c_2 – первый и второй коэффициенты постели.

Выбор той или иной модели зависит от свойств упругого основания и задач, стоящих перед исследователем.

Краевая задача ползучести многослойной плиты в некоторый фиксированный момент времени $t \neq 0$, может быть сведена к вариационной задаче для функционала в форме Лагранжа [7]

$$U(\dot{u}_1, \dot{u}_2, \dot{w}, \dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2) = U_1 + U_2\,, \tag{2}$$

где первое слагаемое вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} U_1 = \frac{1}{2}\iint\limits_{\Omega}\Big[& A_1\dot{u}_{1,1}^2 + A_2\dot{u}_{2,2}^2 + 2A_3\dot{u}_{1,1}\dot{u}_{2,2} + A_4\left(\dot{u}_{1,2} + \dot{u}_{2,1}\right)^2 + D_1\dot{w},_{11}^2 + D_2\dot{w},_{22}^2 + D_3\dot{w},_{12}^2 - \\ & - 2B_1\dot{w},_{11}\dot{u}_{1,1} - 2B_2\dot{w},_{22}\dot{u}_{2,2} - 2B_3\left(\dot{w},_{11}\dot{u}_{2,2} + \dot{w},_{22}\dot{u}_{1,1}\right) - 2B_4\left(\dot{u}_{1,2} + \dot{u}_{2,1}\right)\dot{w},_{12} - 2F_1\dot{w},_{11}\dot{\psi}_{1,1} - \\ & - 2F_2\dot{w},_{22}\dot{\psi}_{2,2} - 2F_3\dot{w},_{11}\dot{\psi}_{2,2} - 2F_4\dot{w},_{22}\dot{\psi}_{1,1} - 2F_5\dot{w},_{12}\dot{\psi}_{1,2} - 2F_6\dot{w},_{12}\dot{\psi}_{2,1} + 2F_7\dot{u}_{1,1}\dot{\psi}_{1,1} + \\ & + 2F_8\dot{u}_{2,2}\dot{\psi}_{2,2} + 2F_9\dot{\psi}_{1,1}\dot{u}_{2,2} + 2F_{10}\dot{\psi}_{2,2}\dot{u}_{1,1} + 2F_{11}\dot{\psi}_{1,2}\left(\dot{u}_{1,2} + \dot{u}_{2,1}\right) + 2F_{12}\dot{\psi}_{2,2}\left(\dot{u}_{1,2} + \dot{u}_{2,1}\right) + F_{13}\dot{\psi}_{1,1}^2 + \\ & + F_{14}\dot{\psi}_{2,2}^2 + 2F_{15}\dot{\psi}_{1,1}\dot{\psi}_{2,2} + F_{16}\dot{\psi}_{1,2}^2 + F_{17}\dot{\psi}_{2,1}^2 + 2F_{18}\dot{\psi}_{1,2}\dot{\psi}_{2,1} + F_{19}\dot{\psi}_1^2 + F_{20}\dot{\psi}_2^2 + \dot{q}_r\dot{w}\Big]dx_1dx_2 - \\ & - \iint\limits_{\Omega}\dot{q}_z\dot{w}dx_1dx_2 - \int\limits_{\partial\Omega_p}\left[\dot{P}_n^0\left(\dot{u}_1n_1 + \dot{u}_2n_2\right) + \dot{P}_\tau^0\left(\dot{u}_2n_1 - \dot{u}_1n_2\right)\right]dS. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь $\dot{u}_1(x_1, x_2, t)$, $\dot{u}_2(x_1, x_2, t)$, $\dot{w}(x_1, x_2, t)$ – скорости перемещений точек координатной поверхности плиты вдоль осей $0x_1$, $0x_2$, $0z$; $\dot{\psi}_1(x_1, x_2, t)$, $\dot{\psi}_2(x_1, x_2, t)$ – скорости функций сдвига; n_1, n_2 – направляющие косинусы внешней нормали $\mathbf{n}$ к контуру плиты $\partial\Omega$. Коэффициенты жесткости многослойной плиты вычисляются по формулам

$$A_1 = \int\limits_{(h)}\frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}dz\,, \quad A_2 = \int\limits_{(h)}\frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}dz\,, \quad A_3 = \int\limits_{(h)}\frac{\nu_{21}E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}dz = \int\limits_{(h)}\frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}dz\,, \quad A_4 = \int\limits_{(h)}G_{12}dz\,,$$

$$D_1 = \int\limits_{(h)}\frac{E_1z^2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}dz\,, \quad D_2 = \int\limits_{(h)}\frac{E_2z^2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}dz\,, \quad D_3 = \int\limits_{(h)}4G_{12}z^2dz\,, \quad D_4 = \int\limits_{(h)}\frac{\nu_{21}E_1z^2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}dz\,,$$

$$B_1 = \int\limits_{(h)}\frac{E_1z}{1-\nu_{12}\nu_{21}}dz\,, \quad B_2 = \int\limits_{(h)}\frac{E_2z}{1-\nu_{12}\nu_{21}}dz\,, \quad B_3 = \int\limits_{(h)}\frac{\nu_{21}E_1z}{1-\nu_{12}\nu_{21}}dz\,, \quad B_4 = \int\limits_{(h)}2G_{12}zdz\,,$$

$$F_1=\int\limits_{(h)}\frac{E_1 f_1 z}{1-\nu_{12}\nu_{21}}dz\,,\quad F_2=\int\limits_{(h)}\frac{E_2 f_2 z}{1-\nu_{12}\nu_{21}}dz\,,\quad F_3=\int\limits_{(h)}\frac{\nu_{21}E_1 f_2 z}{1-\nu_{12}\nu_{21}}dz\,,\quad F_4=\int\limits_{(h)}\frac{\nu_{21}E_1 f_1 z}{1-\nu_{12}\nu_{21}}dz\,,$$

$$F_5=\int\limits_{(h)}2G_{12}f_1 z dz\,,\quad F_6=\int\limits_{(h)}2G_{12}f_2 z dz\,,\quad F_7=\int\limits_{(h)}\frac{f_1 E_1 z}{1-\nu_{12}\nu_{21}}dz\,,\quad F_8=\int\limits_{(h)}\frac{f_2 E_2 z}{1-\nu_{12}\nu_{21}}dz\,,$$

$$F_9=\int\limits_{(h)}\frac{\nu_{21}E_1 f_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}dz\,,\quad F_{10}=\int\limits_{(h)}\frac{\nu_{21}E_1 f_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}dz\,,\quad F_{11}=\int\limits_{(h)}G_{12}f_1 dz\,,\quad F_{12}=\int\limits_{(h)}G_{12}f_2 dz\,,$$

$$F_{13}=\int\limits_{(h)}\frac{E_1 f_1^2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}dz\,,\quad F_{14}=\int\limits_{(h)}\frac{E_2 f_2^2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}dz\,,\quad F_{15}=\int\limits_{(h)}\frac{\nu_{21}E_1 f_1 f_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}dz\,,\quad F_{16}=\int\limits_{(h)}G_{12}f_1^2 dz\,,$$

$$F_{17}=\int\limits_{(h)}G_{12}f_2^2 dz\,,\quad F_{18}=\int\limits_{(h)}G_{12}f_1 f_2 dz\,,\quad F_{19}=\int\limits_{(h)}G_{13}\left(f_1'\right)^2 dz\,,\quad F_{20}=\int\limits_{(h)}G_{23}\left(f_2'\right)^2 dz\,,$$

где $E_1 = E_1(z, T)$, $E_2 = E_2(z, T)$, – модули Юнга в направлениях x_1, x_2; $G_{12} = G_{12}(z, T)$, $G_{13} = G_{13}(z, T)$, $G_{23} = G_{23}(z, T)$ – модули сдвига для поверхностей $z = \text{const}$, $x_1 = \text{const}$, $x_2 = \text{const}$; $\nu_{12} = \nu_{12}(z, T)$, $\nu_{21} = \nu_{21}(z, T)$ – коэффициенты Пуассона (первый индекс показывает направление действия силы, второй – направление поперечного сжатия). Упругие характеристики в общем случае являются непрерывными функциями координаты z в пределах каждого слоя.

Если известен диапазон изменения температуры $T \in [T_1, T_2]$ и значения упругих характеристик материалов слоев при температурах T_1, T_2, то для модулей Юнга E_1, E_2, модулей сдвига G_{12}, G_{13}, G_{23}, коэффициентов Пуассона ν_{12}, ν_{21}, а также для коэффициентов линейного температурного расширения α_1, α_2 может быть принята простейшая линейная интерполяция

$$F(z, T) = K_1(z) + K_2(z)T,$$

где коэффициенты K_1, K_2 имеют вид

$$K_1(z)=\frac{T_2F(z,T_1)-T_1F(z,T_2)}{T_2-T_1},\qquad K_2(z)=\frac{F(z,T_2)-F(z,T_1)}{T_2-T_1}\,.$$

Тут $F(z, T_1)$, $F(z, T_2)$ – значения какой-либо упругой характеристики или коэффициента линейного температурного расширения при температурах T_1 и T_2 соответственно.

Второе слагаемое в формуле (2) включает в себя «фиктивные» силы, обусловленные температурными деформациями и необратимыми деформациями ползучести

$$\begin{gathered}U_2=-\iint\limits_{\Omega}\Big(\dot N_{11}^f\dot u_{1,1}+\dot N_{22}^f\dot u_{2,2}+\dot N_{12}^f\left(\dot u_{1,2}+\dot u_{2,1}\right)-M_{11}^f\dot w_{,11}-M_{22}^f\dot w_{,22}-\\ 2\dot M_{12}^f\dot w_{,12}+\dot R_{11}^f\dot\psi_{1,1}+\dot R_{22}^f\dot\psi_{2,2}+\dot R_{12}^f\dot\psi_{1,2}+\dot R_{21}^f\dot\psi_{2,1}+\dot R_{13}^f\dot\psi_1+\dot R_{23}^f\dot\psi_2\Big)dx_1dx_2.\end{gathered}\tag{4}$$

Здесь

$$\begin{gathered}\dot N_{11}^f=\int\limits_{(h)}\frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}\left(\dot e_{11}+\nu_{21}\dot e_{22}\right)dz,\quad \dot N_{22}^f=\int\limits_{(h)}\frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}\left(\dot e_{22}+\nu_{12}\dot e_{11}\right)dz,\quad \dot N_{12}^f=2\int\limits_{(h)}G_{12}\dot p_{12}dz,\\ \dot M_{11}^f=\int\limits_{(h)}\frac{E_1 z}{1-\nu_{12}\nu_{21}}\left(\dot e_{11}+\nu_{21}\dot e_{22}\right)dz,\quad \dot M_{22}^f=\int\limits_{(h)}\frac{E_2 z}{1-\nu_{12}\nu_{21}}\left(\dot e_{22}+\nu_{12}\dot e_{11}\right)dz,\quad \dot M_{12}^f=2\int\limits_{(h)}G_{12}z\dot p_{12}dz,\\ \dot R_{11}^f=\int\limits_{(h)}\frac{E_1 f_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}\left(\dot e_{11}+\nu_{21}\dot e_{22}\right)dz,\quad \dot R_{22}^f=\int\limits_{(h)}\frac{E_2 f_2}{1-\nu^2}\left(\dot e_{22}+\nu_{12}\dot e_{11}\right)dz,\quad \dot R_{12}^f=2\int\limits_{(h)}G_{12}f_1\dot p_{12}dz,\\ \dot R_{21}^f=2\int\limits_{(h)}G_{12}f_2\dot p_{12}dz,\quad \dot R_{13}^f=2\int\limits_{(h)}G_{13}f_1'\dot p_{13}dz,\quad \dot R_{23}^f=2\int\limits_{(h)}G_{23}f_2'\dot p_{23}dz.\end{gathered}\tag{5}$$

где $\dot e_{11}=\dot p_{11}+\dot\varepsilon_{11}^T$, $\dot e_{22}=\dot p_{22}+\dot\varepsilon_{22}^T$.

В представленном функционале функции $\dot{u}_1(x_1, x_2, t)$, $\dot{u}_2(x_1, x_2, t)$ $\dot{w}(x_1, x_2, t)$, $\dot{\psi}_1(x_1, x_2, t)$, $\dot{\psi}_2(x_1, x_2, t)$ должны удовлетворять кинематическим граничным условиям на $\partial\Omega_u$, а скорости деформаций ползучести считаются заданными и не варьируются.

Основные неизвестные начально-краевой задачи ползучести в момент времени $t \neq 0$ могут быть найдены из решения задачи Коши по времени для системы уравнений [7]

$$\frac{du_1}{dt} = \dot{u}_1, \quad \frac{du_2}{dt} = \dot{u}_2, \quad \frac{dw}{dt} = \dot{w}, \quad \frac{d\psi_1}{dt} = \dot{\psi}_1, \quad \frac{d\psi_2}{dt} = \dot{\psi}_2,$$

$$\frac{d\varepsilon_{11}}{dt} = \dot{u}_{1,1} - z\dot{w}_{,11} + f_1\dot{\psi}_{1,1}, \quad \frac{d\varepsilon_{22}}{dt} = \dot{u}_{2,2} - z\dot{w}_{,22} + f_2\dot{\psi}_{2,2},$$

$$\frac{d\gamma_{12}}{dt} = \dot{u}_{1,2} + \dot{u}_{2,1} - 2z\dot{w}_{,12} + f_1\dot{\psi}_{1,2} + f_2\dot{\psi}_{2,1}, \quad \frac{d\gamma_{13}}{dt} = f_1'\,\dot{\psi}_1, \quad \frac{d\gamma_{23}}{dt} = f_2'\,\dot{\psi}_2,$$

$$\frac{d\sigma_{11}}{dt} = \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}\left[\dot{\varepsilon}_{11} + \nu_{21}\dot{\varepsilon}_{22} - \left(\dot{e}_{11} + \nu_{21}\dot{e}_{22}\right)\right], \tag{6}$$

$$\frac{d\sigma_{22}}{dt} = \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}\left[\dot{\varepsilon}_{22} + \nu_{12}\dot{\varepsilon}_{11} - \left(\dot{e}_{22} + \nu_{12}\dot{e}_{11}\right)\right],$$

$$\frac{d\sigma_{12}}{dt} = G_{12}\left(\dot{\gamma}_{12} - 2\dot{p}_{12}\right), \quad \frac{d\sigma_{13}}{dt} = G_{13}\left(\dot{\gamma}_{13} - 2\dot{p}_{13}\right), \quad \frac{d\sigma_{23}}{dt} = G_{23}\left(\dot{\gamma}_{23} - 2\dot{p}_{23}\right),$$

$$\frac{dp_{11}}{dt} = \dot{p}_{11}, \quad \frac{dp_{22}}{dt} = \dot{p}_{22}, \quad \frac{dp_{12}}{dt} = \dot{p}_{12}, \quad \frac{dp_{13}}{dt} = \dot{p}_{13}, \quad \frac{dp_{23}}{dt} = \dot{p}_{23}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}.$$

Начальные условия для неизвестных функций в момент времени $t = 0$ находятся из решения задачи упругого деформирования плиты. Для решения упругой задачи может быть использован приведенный выше функционал вида (2)–(4). При этом в формулах (3), (4) необходимо заменить производные функций по времени самими функциями, а при вычислении «фиктивных» сил по формулам (5) положить $\dot{p}_{11} = \dot{p}_{22} = \dot{p}_{12} = \dot{p}_{13} = \dot{p}_{23} = 0$.

Для интегрирования уравнений (6) будем использовать метод Рунге–Кутта–Мерсона (РКМ) с автоматическим выбором шага. Вариационные задачи для функционала Лагранжа (2) в моменты времени, которые отвечают схеме метода РКМ, будем решать методом Ритца. Координатные функции, удовлетворяющие заданным краевым условиям, строятся с помощью метода R-функций [10]. Метод R-функций позволяет точно учитывать геометрию области и граничные условия самого общего вида. При этом решение краевой задачи представляется в виде формулы – структуры решения, которая точно удовлетворяет всем (общая структура решения) или части (частичная структура решения) граничным условиям. Структура решения является инвариантной по отношению к форме области.

Пример расчета

Рассмотрим изгиб квадратной (a×a) двухслойной плиты на упругом основании. Плита находится под действием поперечной нагрузки, приложенной в центре и равномерно распределенной по площади круга радиуса r = 0,15 м [2]. Плита состоит из двух слоев, жестко соединенных между собой: 1 – асфальтобетон ($E_1 = 10^3$ МПа, ν_1 = 0,3, h_1 = 0,05 м), 2 – бетон М-350 ($E_2 = 3{,}1\cdot10^4$ МПа, ν_2 = 0,167, h_1 = 0,3 м). Для упругого основания принята модель Винклера с коэффициентом постели c = 193 МПа/м.

Размер плиты в плане $a = 30r$. Интенсивность поперечной нагрузки q_z = 1 МПа. Температурные деформации считаем равными нулю. На краях плиты заданы условия закрепления, соответствующие неподвижному шарниру

$$\dot{w} = 0, \qquad \dot{u}_n = 0, \qquad \dot{u}_\tau = 0, \qquad \dot{\psi}_n = 0, \qquad \dot{\psi}_\tau = 0, \tag{7}$$

где $\dot{u}_n = \dot{u}_1 n_1 + \dot{u}_2 n_2$, $\dot{u}_\tau = \dot{u}_2 n_1 - \dot{u}_1 n_2$, $\dot{\psi}_n = \dot{\psi}_1 n_1 + \dot{\psi}_2 n_2$, $\dot{\psi}_\tau = \dot{\psi}_2 n_1 - \dot{\psi}_1 n_2$.

Структура решения, удовлетворяющая условиям (7), имеет вид

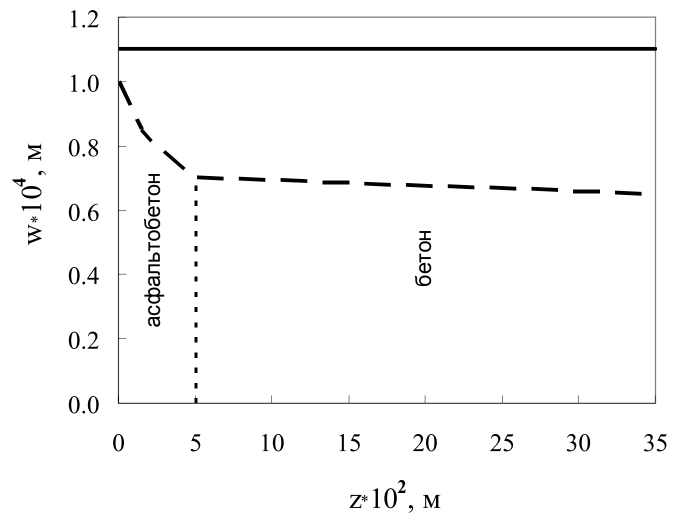

Рис. 1. Прогибы в центре:
\- - - - - – трехмерное решение [1], ——– метод R-функций

$$\dot{w} = \omega\Phi_1, \quad \dot{u}_1 = \omega\Phi_2, \quad \dot{u}_2 = \omega\Phi_3,$$
$$\dot{\psi}_1 = \omega\Phi_4, \quad \dot{\psi}_2 = \omega\Phi_5,$$

где $\omega = \omega_1 \wedge_0 \omega_2 = \omega_1 + \omega_2 - \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$ – R-конъюнкция [10],

$$\omega_1 = \frac{1}{a}\left(\frac{a^2}{4} - x_2^2\right), \quad \omega_2 = \frac{1}{a}\left(\frac{a^2}{4} - x_1^2\right),$$

Φ_i $(i = 1, 2, \dots, 5)$ – неопределенные компоненты. Функция ω удовлетворяет условиям

$$\omega = 0, \quad \omega_{,n} = -1 \text{ на } \partial\Omega,$$
$$\omega > 0 \text{ внутри области } \Omega.$$

На рис. 1, 2 представлены результаты расчета прогибов и напряжений в плите, в зоне приложения нагрузки. Пунктирной линией показаны результаты расчета, полученные в [2] с помощью трехмерного решения первой краевой задачи теории упругости для многослойной среды, приведенным в [1]. Сплошной линией показаны результаты, полученные по предлагаемой методике. При численной реализации учитывалась симметрия задачи. Неопределенные компоненты структуры решения представлялись в виде

$$\Phi_i(x) \approx \Phi_{iN}(x) = \sum_{k=1}^{N_i} C_k^{(i)} \varphi_k(x_1, x_2), \qquad (i = 1,2,\dots,5),$$

где $C_k^{(i)}$ – неопределенные коэффициенты, а в качестве $\{\varphi_k\}$ были выбраны степенные полиномы вида $x_1^m x_2^n$. Максимальные степени полиномов в структурах решения: для Φ_1 – 12, для Φ_i $(i = 2, \dots, 5)$ – 10. Для интегрирования по области Ω и по толщине использовались формулы Гаусса. При вычислении элементов матрицы Гаусса количество узлов интегрирования по четверти области равнялось 144.

Выводы

Разработан численно-аналитический метод решения задач расчета напряженно-деформированного состояния, ползучести и повреждаемости слоистых ортотропных плит произвольной формы, лежащих на упругом основании. Решен тестовый пример расчета НДС двухслойной плиты, которая является расчетной схемой дорожного покрытия. Получено удовлетворительное для инженерной практики совпадение с результатами трехмерного решения. Разработанный метод может быть использован для моделирования напряженно-деформированного состояния и длительной прочности дорожных одежд с упруго-вязкими свойствами.

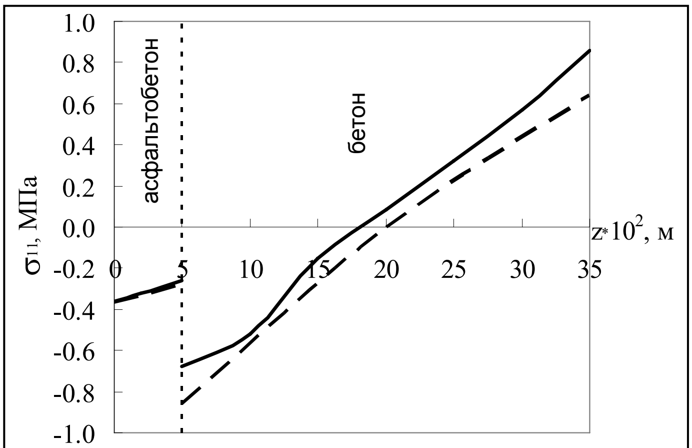

Рис.2. Напряжения в центре:
\- - - - - – трехмерное решение [1], ——– метод R-функций

Литература

1. *Приварников, А. К.* Решение граничных задач теории упругости для многослойных оснований / А. К. Приварников. – Днепропетровск: Изд-во Днепропетр. ун-та, 1976.– 60 с.
2. *Расчет* неоднородных пологих обо-

лочек и пластин методом конечных элементов / В.Г. Пискунов, В.Е. Вериженко, В.К. Присяжнюк и др. – Киев: Вища шк., 1987. – 200 с.
3. *Руденский, А. В.* Дорожные асфальтобетонные покрытия / А. В. Руденский. – М.: Транспорт, 1992. – 253 с.
4. *Золотарев, В. А.* Долговечность дорожных асфальтобетонов / В. А. Золотарев. – Харьков: Высш. шк., 1977.– 116 с.
5. *Богуславский, А. М.* Основы реологии асфальтобетона / А. М. Богуславский, Л. А. Богуславский. – М.: Высш. шк., 1972. – 199 с.
6. *Рассказов, А. О.* Теория и расчет слоистых ортотропных пластин и оболочек / А. О. Рассказов, И. И. Соколовская, Н. А. Шульга. – Киев: Вища шк., 1986.– 191 с.
7. *Золочевский, А. А.* Нелинейная механика деформируемого твердого тела / А. А. Золочевский, А. Н. Склепус, С. Н. Склепус. – Харьков: Бізнес Інвестор Групп, 2011.– 720 с.
8. *Работнов, Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций / Ю. Н. Работнов.– М.: Наука, 1966.–752 с.
9. *Власов, В. З.* Балки, плиты и оболочки на упругом основании / В. З. Власов, Н. Н. Леонтьев. – М.: Физматгиз, 1960. – 491 с.
10. *Рвачев, В. Л.* Теория R-функций и некоторые ее приложения / В. Л. Рвачев. – Киев: Наук. думка, 1982. – 552 с.

Поступила в редакцию
25.12.13

УДК 539.3

К. В. Аврамов[*], д-р техн. наук
О. К. Морачковский, д-р техн. наук[**]
А. М. Тонконоженко[***]
В. Ю. Кожарин[***]
Р. Е. Кочуров[*], канд. техн. наук

[*] Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины (г. Харьков, e-mail:kvavr@kharkov.ua)
[**] Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»
[***] Государственное предприятие КБ «Южное» (г. Днепропетровск)

ПОЛУАНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РАСЧЕТА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРУЕМОГО СОСТОЯНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С ПРОДОЛЬНЫМИ РЕБРАМИ ЖЕСТКОСТИ

Для расчета цилиндрических оболочек, подкрепленных продольными ребрами жесткости, предложен полуаналитический метод конечных элементов. С помощью предложенного метода численно исследуются свойства напряженно-деформированного состояния оболочек.

Для розрахунку циліндричної оболонки, що підкріплена повздовжніми ребрами, запропоновано напіваналітичний метод скінченних елементів. За допомогою запропонованого методу чисельно досліджено властивості напружено-деформованого стану оболонок.

***Ключевые слова**: метод конечных элементов, оребренные оболочки, матрица жесткости конструкции.*