

¹ М. В. Чернобрышко*, канд. техн. наук¹ К. В. Аврамов*, д-р техн. наук¹ В. Н. Романенко*² Т. Я. Батутина**² В. А. Пирог**¹ Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины, г. Харьков, e-mail: kvavr@kharkov.ua² ГП «КБ Южное», г. Днепропетровск, e-mail: info@yuzhnoye.com

УДК 539.3

ДИНАМИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ОБТЕКАТЕЛЕЙ РАКЕТ-НОСИТЕЛЕЙ В ПОЛЕТЕ*Досліджується динамічна нестійкість обтічників ракет-носіїв у польоті. Оскільки більшу частину польоту ракета рухається з надзвуковою швидкістю, то для опису тиску газу, що діє на обтічник, застосовується поршнева теорія. Обтічник ракети-носія описується параболічною оболонкою. Для отримання рівнянь коливань застосовується метод заданих форм. Досліджуються властивості коливань обтічника.***Ключевые слова:** *параболическая оболочка, обтекатель ракеты-носителя, метод заданных форм, число Маха, сверхзвуковой газовый поток.***Введение**

Обтекатели ракет-носителей защищают спутник при выводе его на орбиту. Они изготавливаются в виде тонких оболочек, конических, параболических. Часто обтекатель состоит из конической оболочки, соединенной с цилиндрической. В некоторых случаях эти оболочки усилены стрингерами и шпангоутами. Как показывают экспериментальные исследования, при взаимодействии таких тонких конструкций с газовым потоком могут возникнуть интенсивные автоколебания. Исследованию таких динамических явлений посвящена настоящая статья. Здесь рассматриваются параболические обтекатели ракет-носителей без силового набора.

Несмотря на широкое применение параболических оболочек в авиации и космонавтике, мало усилий было предпринято для исследования динамики и прочности таких конструкций. Пластическое деформирование параболических оболочек рассматривается в статье [1]. Колебания вращающихся параболических оболочек изучается в работе [2]. В [3] исследуются параболические пологие оболочки умеренной толщины с использованием сдвиговой теории первого порядка. Динамическое поведение параболических пологих оболочек умеренной толщины рассматривается в [4]. В качестве уравнений движения используется система пяти уравнений в частных производных. В статье [5] для анализа параболических конструкций применяется метод конечных элементов на основе четырехузлового гибридного элемента. Обзор публикаций по динамике параболоидов дан в [6].

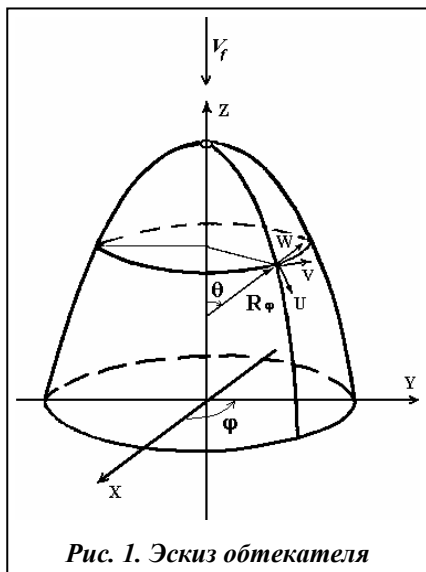
Исследования аэроупругих колебаний оболочек и пластин представлено в [7-10]. Применение поршневой теории к анализу аэроупругости оболочек вращения рассмотрено в работах [11, 12]. Аэроупругие колебания конических оболочек с использованием поршневой теории изучаются в работах [13, 14, 15].

Как следует из представленного выше обзора литературы, обтекатели ракет-носителей практически не исследовались. Однако экспериментальный анализ элементов ракет-носителей в газовом потоке свидетельствует, что эти конструкции часто совершают автоколебания со значительными амплитудами.

В данной статье для получения уравнений движения обтекателей применяется метод заданных форм, который использует потенциальную и кинетическую энергии конструкции. Так как больший участок полета ракеты происходит со сверхзвуковой скоростью, то для описания давления, действующего на обтекатель, применим поршневую теорию. Предложен подход для определения формы обтекателя при возникновении автоколебаний.

1. Постановка задачи и уравнения движения

Как показали натурные исследования ракет-носителей, наиболее интенсивные колебания наблюдаются при скорости потока близкой к скорости звука и при скорости несколько большей скорости звука. Поставлена задача моделирования и исследования аэроупругих колебаний обтекателей в сверхзвуковых газовых потоках. Исследуются обтекатели, форма которых описывается тонкой пара-



болической оболочкой. Поэтому сдвиги и инерция вращения не учитываются. Для описания деформирования параболоида воспользуемся гипотезами Киргофа–Лява. Напряжения и деформации предполагаются малыми; они удовлетворяют закону Гука. Деформируемое состояние срединной поверхности параболоида описываем проекциями перемещений на направления касательных к координатным линиям $u(\theta, \varphi, t)$, $v(\theta, \varphi, t)$, $w(\theta, \varphi, t)$, где координаты θ и φ описывают положение точек на срединной поверхности (рис. 1). Радиусы кривизны координатных линий θ и φ находятся так [16]:

$$R_\theta = \frac{R_0}{(1 + \chi \sin^2 \theta)^{3/2}}, \quad R_\varphi = \frac{R_0}{(1 + \chi \sin^2 \theta)^{1/2}}, \quad (1)$$

где R_0 – радиус кривизны в особой точке оболочки $\theta = 0$. Параметр χ для параболических оболочек принимается -1 .

Для построения уравнений движения параболической оболочки в сверхзвуковом газовом потоке воспользуемся методом заданных форм [17], который использует уравнения Лагранжа. Кинетическую энергию оболочки T представим следующим образом:

$$T = \frac{\rho}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] R_\theta R_\varphi \sin \theta d\theta d\varphi dz,$$

где ρ – плотность материала оболочки; h – толщина оболочки. Координатные линии срединной поверхности оболочки показаны на рис. 1. С учетом (1) кинетическую энергию оболочки представим так:

$$T = \frac{\rho h R_0^2}{2} \int_0^{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] \frac{\sin \theta}{\cos^4 \theta} d\theta d\varphi.$$

Потенциальную энергию упругой деформации оболочки запишем в виде [16]

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} (\sigma_{11}\varepsilon_{11} + \sigma_{22}\varepsilon_{22} + \sigma_{12}\varepsilon_{12}) \left(1 + \frac{z}{R_\theta} \right) \left(1 + \frac{z}{R_\varphi} \right) R_\theta R_\varphi \sin \theta d\theta d\varphi dz, \quad (2)$$

где σ_{11} , σ_{12} , σ_{22} – компоненты тензора напряжений; ε_{11} , ε_{12} , ε_{22} – компоненты тензора деформаций. Компоненты тензоров напряжений и деформаций удовлетворяют закону Гука. Компоненты тензора деформаций связаны с перемещениями оболочки так [16]

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= E_1 + zK_1, \\ \varepsilon_{22} &= E_2 + zK_2, \\ \varepsilon_{12} &= \Omega_1 + 2z\Omega_2, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{R_0} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + w \right) \cos^3 \theta; \\ K_1 &= \frac{1}{R_0^2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \cos^6 \theta - \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} + 3u \right) \cos^5 \theta \sin \theta \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_2 &= \frac{1}{R_0} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \cdot \cos \theta + w \cdot \sin \theta \right) \operatorname{ctg} \theta; \\
K_2 &= \frac{1}{R_0^2} \left[\frac{\partial v}{\partial \varphi} \operatorname{ctg} \theta \cos \theta - \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \operatorname{ctg}^2 \theta + \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - u \right) \operatorname{ctg} \theta \cos^4 \theta \right]; \\
\Omega_1 &= \frac{1}{R_0} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} \cdot \cos^3 \theta - v \cdot \cos^2 \theta \sin \theta + w \cdot \frac{\cos^4 \theta}{\sin \theta} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \operatorname{ctg} \theta \right); \\
\Omega_2 &= \frac{1}{R_0^2} \left[\frac{\partial w}{\partial \varphi} \frac{\cos^3 \theta}{\sin \theta} - \frac{\cos^4 \theta}{\sin \theta} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial \varphi} - \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{\partial v}{\partial \theta} + v \right) \frac{\cos^4 \theta}{\sin \theta} \right].
\end{aligned}$$

Учитывая соотношения (3), потенциальную энергию оболочки (2) запишем в виде

$$\begin{aligned}
\Pi &= \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \int_0^{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[(E_1 + E_2)^2 - 2(1-\nu) \left(E_1 E_2 - \frac{1}{4} \Omega_1^2 \right) \right] R_0^2 \frac{\sin \theta}{\cos^4 \theta} d\theta d\varphi + \\
&+ \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)} \int_0^{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[(K_1 + K_2)^2 - 2(1-\nu) (K_1 K_2 - \Omega_2^2) \right] R_0^2 \frac{\sin \theta}{\cos^4 \theta} + \\
&+ 2 \left\{ (E_1 K_1 + E_2 K_2) + \nu (E_1 K_2 + E_2 K_1) + (1-\nu) \Omega_1^2 \Omega_2^2 \right\} R_0 \frac{\sin \theta (1 + \cos^2 \theta)}{\cos^3 \theta} \Big] d\theta d\varphi,
\end{aligned}$$

где E , ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона.

Вершина оболочки ($\theta = 0$) является особой точкой, поэтому в модели конструкции около нее вырежем отверстие диаметром меньше, чем толщина оболочки. На стороне этого маленького отверстия будут выполняться граничные условия свободного опирания. На стороне $\theta = \theta_2$ оболочка закреплена, что выражается следующими граничными условиями:

$$u|_{\theta=\theta_2} = v|_{\theta=\theta_2} = w|_{\theta=\theta_2} = \frac{\partial w}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_2} = 0.$$

Так как для исследования колебаний применяется метод заданных форм [17], то на свободной стороне оболочки можно не удовлетворять никаким граничным условиям.

Виртуальную работу аэродинамического давления δA , действующего на параболическую оболочку, представим так:

$$\delta A = R_0^2 \int_0^{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} p \delta w \frac{\sin \theta}{\cos^4 \theta} d\theta d\varphi, \quad (4)$$

где p – давление сверхзвукового потока на конструкцию; δw – виртуальное поперечное перемещение оболочки. Для описания давления в сверхзвуковом потоке газа применяется улучшенная поршневая теория [18]. Согласно этой теории, давление, действующее на обтекатель, описывается в виде

$$p = -\xi_1 \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} + \xi_2 \frac{\partial w}{\partial t} - \xi_3 w \right), \quad (5)$$

где $\xi_1 = \frac{\rho_f V_f^2}{\beta}$; $\xi_2 = \frac{M^2 - 2}{V_f \beta^2}$; $\xi_3 = \frac{1}{2r\beta}$, $\beta = \sqrt{M^2 - 1}$; $r = R_0 \operatorname{tg}(\theta)$; M – число Маха; r – переменный радиус сечения оболочки.

Слагаемое $\xi_3 w$ в соотношении (5) называют поправкой Крумхара. Подчеркнем, что поправка Крумхара зависит от координаты θ оболочки. Соотношения (5) применялись для расчетов конических оболочек в работах [13–15].

Виртуальную работу (4) с учетом давления в сверхзвуковом потоке газа (5) можно представить так:

$$\frac{\sqrt{M^2 - 1}}{V_f R_0 \rho_f} \delta A = - \int_0^{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[R_0 V_f \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{R_0 (M^2 - 2)}{(M^2 - 1)} \frac{\partial w}{\partial t} \right] \frac{\sin \theta}{\cos^4 \theta} - \frac{V_f}{2\sqrt{M^2 - 1}} \frac{w}{\cos^3 \theta} \delta w d\theta d\varphi. \quad (6)$$

Для вывода уравнений движения оболочки с конечным числом степеней свободы воспользуемся методом заданных форм [17]. Перемещения $u(\theta, \varphi, t)$, $v(\theta, \varphi, t)$, $w(\theta, \varphi, t)$ разложим в ряд по формам собственных колебаний

$$\begin{aligned} u(\theta, \varphi, t) &= \sum_{n=1}^{N_u} q_n^{(u)}(t) U_n(\theta, \varphi); \\ v(\theta, \varphi, t) &= \sum_{n=1}^{N_v} q_n^{(v)}(t) V_n(\theta, \varphi); \\ w(\theta, \varphi, t) &= \sum_{n=1}^{N_w} q_n^{(w)}(t) W_n(\theta, \varphi), \end{aligned} \quad (7)$$

где $q^{(u)} = [q_1^{(u)}, \dots, q_{N_u}^{(u)}]$; $q^{(v)} = [q_1^{(v)}, \dots, q_{N_v}^{(v)}]$; $q^{(w)} = [q_1^{(w)}, \dots, q_{N_w}^{(w)}]$ – вектора обобщенных координат; $U_n(\theta, \varphi)$, $V_n(\theta, \varphi)$, $W_n(\theta, \varphi)$ – собственные формы свободных линейных колебаний.

Для расчета собственных форм свободных линейных колебаний применялся метод Релея–Ритца. Тогда собственные формы свободных колебаний параболической оболочки представим в следующем виде:

$$\begin{aligned} U_n(\theta, \varphi) &= \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} A_{ij}^{(n)} \psi_i^{(u)}(\theta) \cos j\varphi, \\ V_n(\theta, \varphi) &= \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} B_{ij}^{(n)} \psi_i^{(v)}(\theta) \sin j\varphi, \\ W_n(\theta, \varphi) &= \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} C_{ij}^{(n)} \psi_i^{(w)}(\theta) \cos j\varphi, \end{aligned}$$

где $A_{ij}^{(n)}$, $B_{ij}^{(n)}$, $C_{ij}^{(n)}$ – подлежащие определению коэффициенты. Функции $\psi_i^{(u)}(\theta)$, $\psi_i^{(v)}(\theta)$ являются собственными модами продольных колебаний консольного стержня, а функции $\psi_i^{(w)}(\theta)$ описывают собственные моды поперечных колебаний.

Для упрощения дальнейшего изложения все обобщенные координаты сгруппируем в один вектор $q = [q^{(u)}, q^{(v)}, q^{(w)}] = [q_1, \dots, q_{N_G}]$, где $N_G = N_u + N_v + N_w$. Теперь составим выражения для обобщенных сил Q_n , где $n = 1, \dots, N_G$. Обобщенные силы $Q^{(u)}$, $Q^{(v)}$, соответствующие обобщенным координатам $q^{(u)}$, $q^{(v)}$, равны нулю. Для получения обобщенных сил $Q^{(w)}$, соответствующих обобщенным координатам $q^{(w)}$, воспользуемся соотношением для виртуальной работы (6). Тогда в результате получим

$$\frac{\sqrt{M^2 - 1}}{R_0 V_f^2 \rho_f} Q_n^{(w)} = - \int_0^{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[\left(R_0 \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{R_0 (M^2 - 2)}{V_f \sqrt{M^2 - 1}} \frac{\partial w}{\partial t} \right) \frac{\sin \theta}{\cos^4 \theta} - \frac{w}{2 \cos^3 \theta} \right] W_n(\theta, \varphi) d\theta d\varphi, \quad (8)$$

где $n = 1, \dots, N_w$. Разложения (7) введем в соотношения (8). Тогда вектор обобщенных сил $Q^{(w)}$ представим в следующем матричном виде:

$$Q^{(w)} = K^{(w)} q^{(w)} + C^{(w)} \dot{q}^{(w)},$$

где $K^{(w)}$ – матрица аэродинамической жесткости; $C^{(w)}$ – матрица аэродинамического демпфирования.

Теперь разложения (7) введем в кинетическую и потенциальную энергии (3, 7) и произведем необходимое интегрирование. Тогда кинетическая энергия принимает вид квадратичной формы обобщенных скоростей, а потенциальная – обретет квадратичную форму относительно обобщенных координат. Эти квадратичные формы, в общем случае, можно представить так: $\Pi = \Pi(q_1, \dots, q_{N_G})$, $T = T(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{N_G})$. Тогда уравнения Лагранжа, описывающие движение оболочки, запишем в следующем виде:

$$[M] \begin{bmatrix} \ddot{q}^{(u)} \\ \ddot{q}^{(v)} \\ \ddot{q}^{(w)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q^{(u)} \\ q^{(v)} \\ q^{(w)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K^{(w)} q^{(w)} + C^{(w)} \dot{q}^{(w)} \end{bmatrix} = 0, \quad (9)$$

где $M = \text{diag}(m_1, \dots, m_{N_G})$. Из теории оболочек известно [17], что собственные частоты, в формах которых преобладают продольные и крутильные колебания, значительно выше собственных частот, в формах которых преобладают изгибные колебания. Поэтому в уравнении (9) примем $\ddot{q}^{(u)} = \ddot{q}^{(v)} = 0$. Тогда из первых двух уравнений системы (9) получим следующие матричные соотношения: $q^{(u)} = [K_{u,w}]q^{(w)}$; $q^{(v)} = [K_{v,w}]q^{(w)}$. Эти соотношения введем в (9) и получим уравнения, описывающие линейные колебания оболочки, относительно обобщенных координат поперечных перемещений

$$[M_1] \ddot{q}^{(w)} + [K_*] q^{(w)} + C^{(w)} \dot{q}^{(w)} = 0, \quad (10)$$

где $[K_*] = [K_{31}][K_{u,w}] + [K_{32}][K_{v,w}] + [K_{33}] + [K^{(w)}]$; диагональная матрица $[M_1]$ получена из диагональной матрицы $[M]$.

2. Анализ потери устойчивости конструкции

Возникновение динамической неустойчивости обтекателя соответствует потере устойчивости тривиального состояния равновесия динамической системы (10). При потере устойчивости наблюдается бифуркация Хопфа [17]. Подчеркнем, что, используя модель (10), можно исследовать форму оболочки, которая наблюдается при зарождении автоколебаний. Подход к расчету этой формы будет представлен в данном разделе. Динамическую систему (10) перепишем относительно фазовых координат $y = (q_1^{(w)}, \dots, q_{N_w}^{(w)}, \dot{q}_1^{(w)}, \dots, \dot{q}_{N_w}^{(w)})$

$$\dot{y} = G y. \quad (11)$$

Решение системы (11) представим так: $y = A_i \exp(\lambda_i t)$. Параметры этого решения определяются из следующей проблемы собственных значений:

$$[G - E\lambda_i] A_i = 0,$$

где E – единичная матрица. Собственные значения λ_i называются характеристическими показателями.

Рассмотрим случай, когда все собственные значения являются комплексно-сопряженными

$$\lambda_{2j-1} = \alpha_j + i\Omega_j; \lambda_{2j} = \alpha_j - i\Omega_j; j = 1, \dots, N_w,$$

где i – мнимая единица. Собственные вектора, отвечающие этим собственным значениям, представим так:

$$A_{2j-1} = \gamma_j + i\delta_j; \quad A_{2j} = \gamma_j - i\delta_j; \quad j = 1, \dots, N_w. \quad (12)$$

В области устойчивости тривиального состояния равновесия выполняется следующее неравенство: $\alpha_j < 0; j = 1, \dots, N_w$. В точке потери устойчивости $\alpha_1 = 0$, а в начале области развития неустойчивости $\alpha_1 > 0$. Рассмотрим решение динамической системы (12) в бифуркации Хопфа. Представим это решение в виде

$$y = \sum_{j=1}^{N_w} \{ C_j (\gamma_j + i\delta_j) \exp[(\alpha_j + i\Omega_j)t] + D_j (\gamma_j - i\delta_j) \exp[(\alpha_j - i\Omega_j)t] \}, \quad (13)$$

где C_j, D_j – константы интегрирования. Так как все действительные части собственных значений, кроме одного, отрицательные, то с течением времени составляющие решения (13) с отрицательными действительными частями собственных значений стремятся к нулю и в решении (13) остается только часть, которая имеет нулевую действительную часть характеристического показателя. Такое решение представим так:

$$y = (C_*\gamma_1 + D_*\delta_1)\cos(\Omega_1 t) + (D_*\gamma_1 - C_*\delta_1)\sin(\Omega_1 t),$$

где C_*, D_* – константы интегрирования, которые определяются из начальных условий. В дальнейшем рассмотрим частный вид движений, которые характеризуются следующими значениями констант интегрирования: $C_* = D_* = 1$. Элементы векторов γ_1 и δ_1 определим так: $\gamma_1 = (\gamma_1^{(1)}, \dots, \gamma_1^{(2N_w)})$; $\delta_1 = (\delta_1^{(1)}, \dots, \delta_1^{(2N_w)})$. Тогда обобщенные координаты системы (10) запишем в виде

$$q_j^{(w)} = \sqrt{2(\gamma_1^{(j)2} + \delta_1^{(j)2})} \sin(\Omega_1 t + \varphi_j), \quad (14)$$

где $\operatorname{tg}\varphi_j = \frac{\gamma_1^{(j)} + \delta_1^{(j)}}{\gamma_1^{(j)} - \delta_1^{(j)}}$.

Уравнение (14) введем в соотношения (7). В результате получим представление поперечных колебаний параболической оболочки в следующем виде:

$$w(\theta, \varphi, t) = \sum_{j=1}^{N_w} \sqrt{2(\gamma_1^{(j)2} + \delta_1^{(j)2})} W_j(\theta, \varphi) \sin(\Omega_1 t + \varphi_j). \quad (15)$$

Итак, при потере динамической устойчивости оболочки зарождаются автоколебания (15). С помощью соотношений (15) удастся численно исследовать форму оболочки при автоколебаниях. Подчеркнем, что колебания оболочки при начале автоколебаний происходят с частотой Ω_1 , которая является комплексной частью характеристического показателя, действительная часть которого проходит через нуль. Итак, частоту начала автоколебаний можно найти из линейного анализа конструкции.

3. Численный анализ

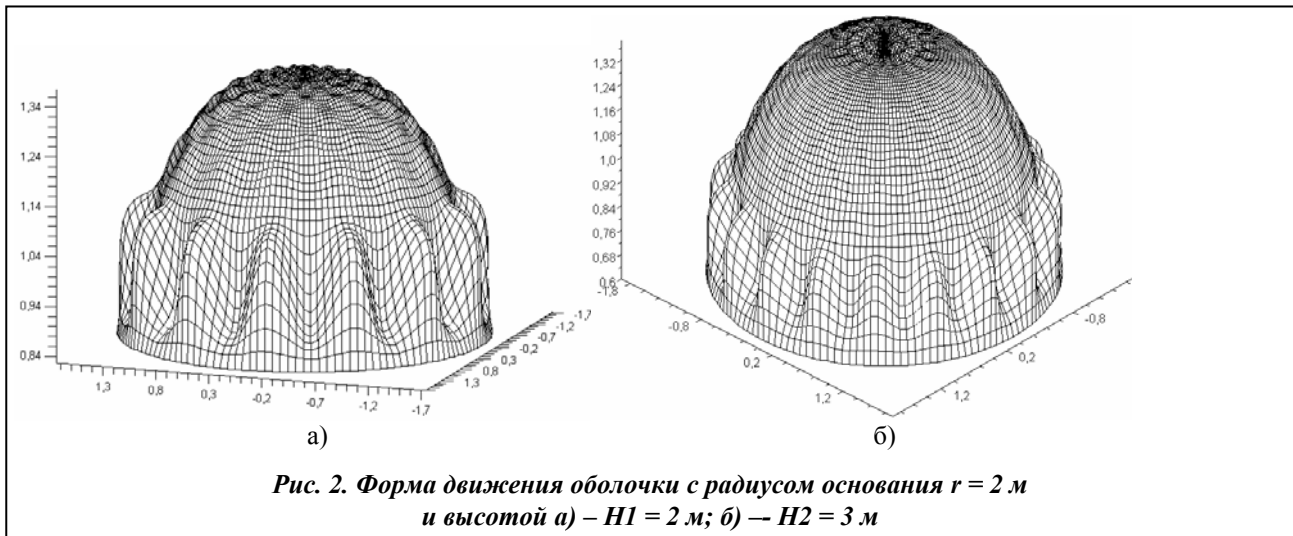
Для исследования динамической устойчивости оболочек их перемещения раскладываются по формам колебаний (7). Поэтому первой задачей является анализ свободных колебаний параболической оболочки, результаты которого используются в анализе динамической устойчивости обтекателей.

Численному анализу подвергались свободные колебания в трех оболочках с разными высотами $H_1 = 2$ м, $H_2 = 3$ м, $H_3 = 4$ м и одинаковым радиусом основания $r = 2$ м. Толщины оболочек принимались одинаковыми $h = 5$ мм. Все расчеты проводились для материала с механическими характеристиками: $E = 71$ ГПа, $\rho = 2640$ кг/м³, $\nu = 0,3$. Плотность газового потока принималась $\rho_f = 1$ кг/м³. Для расчета собственных частот колебаний применялся метод Релея–Ритца.

Таблица 1. Значения критических чисел Маха M_* при разном числе степеней свободы N_w в модели конструкции

N_w	$H_1 = 2$ м	$H_2 = 3$ м	$H_3 = 4$ м
6	1,380	1,384	1,378
8	1,41421	1,41421	1,41421
10	1,4142	1,4142	1,4142
12	1,4142	1,4142	1,4142

Для оболочек с высотами H_1, H_2, H_3 исследовалось значение числа Маха M , при котором наблюдалась потеря динамической устойчивости конструкции. Такое число Маха называется критическим. Отметим, что для значений чисел Маха $M < 1$ теория, которая описывается соотношением (5), неприменима. Поэтому динамическую неустойчивость параболоидов будем исследовать при $M > 1$.



Расчеты проводились в следующем диапазоне M : $1,01 \leq M \leq 2$. Неустойчивое состояние равновесия наблюдается для значений $1,01 \leq M \leq 1,4142$. Критические значения чисел Маха исследовались при разном числе слагаемых в разложении (7). Целью нашего анализа было исследовать сходимость критических значений чисел Маха при увеличении числа степеней свободы, описывающих конструкцию. Результаты расчетов критических чисел Маха для параболоидов с высотами H_1, H_2, H_3 представлены в табл. 1. Здесь показаны результаты расчетов для систем с 6, 8, 10, 12 степенями свободы. Как следует из таблицы, критические значения чисел Маха для систем с 8, 10 и 12 степенями свободы близки. Это свидетельствует о сходимости результатов. Характерно, что критические значения числа Маха не изменяется при увеличении высоты оболочки с 2 до 4 м. Это объясняется тем, что интенсивный колебательный процесс протекает в нижней части оболочки. Работа сил давления на формах свободных колебаний для трех оболочек отличается несущественно.

Таблица 2. Частоты автоколебаний оболочек с высотами H_1, H_2, H_3

H	H_1	H_2	H_3
$\Omega_1, \text{Гц}$	529,55	576,50	619,45

Исследуем частоты начала автоколебаний оболочки. Результаты расчетов частот автоколебаний для оболочек с разными высотами даны в табл. 2. Заметим, что частоты автоколебаний значительно выше нижних собственных частот оболочек. Отметим, что при увеличении высот оболочек частоты автоколебаний растут, а собственные частоты падают с увеличением высоты параболоида.

Теперь исследуем форму оболочки при начале автоколебаний. Форма оболочки при возникновении автоколебаний имеет вид (15). Исследовалась эта форма в момент времени $t = 0,5\pi/\Omega_1 - \varphi_1$. Формы автоколебаний оболочек с высотами H_1, H_2 представлены на рис. 2. Как видно из этого рисунка, интенсивные автоколебания наблюдаются в нижних частях оболочек.

Выводы

Неустойчивое состояние равновесия параболической оболочки в сверхзвуковом газовом потоке наблюдается для следующих значений чисел Маха: $1,01 \leq M \leq 1,4142$.

Волнообразование поперечных автоколебаний в окружном направлении с большим числом узлов наблюдается в нижней части оболочки; интенсивность колебаний вершины параболоида значительно меньше, чем интенсивность колебаний ее нижней части.

Частоты автоколебаний значительно выше нижних собственных частот оболочек. Подчеркнем, что при увеличении высот оболочек частоты автоколебаний растут, при том, что собственные частоты падают с увеличением высоты параболоида.

Эта работа выполнена при поддержке Целевой комплексной программы НАН Украины по научным космическим исследованиям на 2012–2016 гг. в рамках договора «Расчетная оценка вибраций элементов аэрокосмических систем при силовых и аэродинамических нагрузках».

Литература

1. *Dahlberg, C.* Strain gradient plasticity analysis of the influence of grain size and distribution on the yield strength in polycrystals / *C. Dahlberg, J. Faleskog* // *Europ. J. Mech. A/Solids*. – 2010. – № 44. – P. 1–16.
2. *Gulyaev, V.* Interconnection of critical states of parabolic shells in simple and compound rotations with values of their natural precession vibration frequencies / *V. I. Gulyaev, I. L. Solovjev, M. A. Belova* // *Int. J. Solids and Struct.* – 2011. – № 41. – P. 3565–3583.
3. *Tornabene, F.* Free vibrations of four-parameter functionally graded parabolic panels and shells of revolution / *F. Tornabene, E. Viola* // *Europ. J. Mech A/Solids*. – 2009. – № 28. – P. 991–1013.
4. *Viola, E.* Free vibrations of three parameters functionally graded parabolic panels of revolution / *E. Viola, F. Tornabene* // *Mech. Res. Comm.* – 2009. – № 36. – P. 587–594.
5. *Chun, K. S.* Hybrid/mixed assumed stress element for anisotropic laminated elliptical and parabolic shells / *K.S. Chun, S.K. Kasagne, B.K. Wondimu* // *Fin. Elem. Anal. Des.* – 2009. – № 41. – P. 766–781.
6. *Leissa, A. W.* *Vibrations of shells*. – Washington: U.S. Government Printing Office, 1973. – 457 p.
7. *Болотин, В. В.* Неконсервативные задачи упругой устойчивости / *В. В. Болотин*. – М: Физматгиз, 1961. – 307 с.
8. *Gee, D. J.* Numerical continuation applied to panel flutter / *D. J. Gee* // *Nonlinear Dynamics*. – 2000. – № 22. – P. 271–280.
9. *Pourtakdoust, S. H.* Chaotic analysis of nonlinear viscoelastic panel flutter / *S. H. Pourtakdoust, S. A. Fazlzadeh* // *Nonlinear Dynamics*. – 2003. – №32. – P. 387–404.
10. *Tizzi, S.* Influence of non-linear forces on beam behaviour in flutter conditions / *S. Tizzi* // *J. Sound and Vibration*. – 2003. – № 267. – P. 279–299.
11. *Бочкарев, С. А.* Панельный флаттер вращающихся круговых оболочек, обтекаемых сверхзвуковым потоком / *С. А. Бочкарев, В. П. Матвеев* // *Вычисл. механика сплошных сред*. – Т. 1. – 2008. – № 3. – С. 25–33.
12. *Бочкарев, С. А.* Об одном методе исследования аэроупругой устойчивости оболочек вращения / *С. А. Бочкарев, В. П. Матвеев* // *Вестн. Самар ун-та*. – 2007. – № 4. – С. 387–399.
13. *Миниус, Г. М.* Расчет флаттера реактивного сопла с продольными сквозными канавками / *Г. М. Миниус* // *Численные методы в механике деформируемого твердого тела*. – 1987. – № 2. – С. 15–22.
14. *Диткин, В. В.* Численное исследование флаттера конических оболочек / *В. В. Диткин, Б. А. Орлов, Г. И. Пшеничников* // *Механика твердого тела*. – 1993. – № 1. – С. 185–189.
15. *Ueda, T.* Supersonic flutter truncated conical shells / *T. Ueda* // *Trans. Japan Soc. Aerospace Sci.* – 1977. – Vol. 20. – P. 13–30.
16. *Новожилов, В. В.* Теория тонких оболочек: 2е изд. / *В. В. Новожилов*. – Л: Судостроение, 1962. – 431 с.
17. *Аврамов, К. В.* Нелинейная динамика упругих систем/ *К.В. Аврамов, Ю.В. Михлин*. – М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010. – 704 с.
18. *Krumharr, H.* The accuracy of linear piston theory when applied to cylindrical shells / *H. Krumharr* // *AIAA J.* – 1963. – Vol. 1. – P. 1448–1449.

Поступила в редакцию 25.04.14