

Ф. Ф. Гасанов,
канд. техн. наук

Азербайджанский
технический университет,
г. Баку, Азербайджан,
e-mail: hff74@mail.ru

УДК 539.42

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАРОЖДЕНИЯ ТРЕЩИНЫ СДВИГА В ВОЛОКНЕ КОМПОЗИТА, АРМИРОВАННОГО ОДНОНАПРАВЛЕННЫМИ ВОЛОКНАМИ

Ключові слова: зародження тріщини зсуву, композит, од-
нонаправлені волокна, зусилля в
зв'язках, поперечний зсув.

Запропоновано модель зародження тріщини зсуву у волокні композиту з періодичною структурою, що ґрунтується на розгляді зони тріщиноутворення. Вважається, що зона процесу тріщиноутворення являє собою шар скінченної довжини, що містить матеріал з частково порушеними зв'язками між окремими структурними елементами. Наявність зв'язків між берегами зони передруйнування моделюється прикладанням до поверхні цієї зони сил зчеплення, викликаних відсутністю зв'язків. Аналіз граничної рівноваги зони передруйнування при поперечному зсуві виконується на основі критерію граничного зсуву зв'язків матеріалу.

Постановка задачи

Рассмотрим изотропную среду, ослабленную периодической системой круговых отверстий, имеющих радиус λ ($\lambda < 1$), и центры этих отверстий находятся в точках $P_m = m\omega$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), $\omega = 2$. Круговые отверстия среды заполнены инородными упругими включениями (волокнами), спаянными вдоль обвода. Рассматриваемая среда подвергается поперечному сдвигу усилиями τ_{xy}^∞ (поперечный сдвиг на бесконечности), рис. 1. Начало системы координат совмещаем с геометрическим центром отверстия L_0 в связующем. На основании симметрии граничных условий задачи и геометрии области D , занятой упругой средой, компоненты тензора напряжений в связующем являются периодическими функциями с основным периодом ω .

Рассматривается случай, когда трещинообразование может произойти в волокне композита. Считается, что по мере возрастания интенсивности внешней нагрузки τ_{xy}^∞ в сечении волокна образуется прослойка перенапряженного материала. В зоне повышенных напряжений могут возникать трещины. Задача о зарождении трещины является важной проблемой теории прочности [1–5]. Постановка задачи о трещинообразовании существенно расширяет первоначальную концепцию А. Гриффитса, согласно которой в материале всегда имеется большое количество мельчайших трещин. Зарождение трещин под нагрузкой соответствует данным фрактографических наблюдений. По мере увеличения интенсивности внешней нагрузки в волокне возникает зона предразрушения, которая моделируется областью с ослабленными межчастичными связями в материале. Взаимодействие берегов этой зоны моделируется путем введения между берегами зоны предразрушения связей с заданной диаграммой деформирования. Физическая природа таких связей и размер зон предразрушения зависят от вида материала. Поскольку указанная зона (прослойка перенапряженного материала) мала по сравнению с остальной частью сечения волокна, ее можно мысленно удалить, заменив разрезом, поверхности которого взаимодействуют между собой по некоторому закону, соответствующему действию удаленного материала [2–5]. При этом размер зоны предразрушения заранее неизвестен и подлежит определению.

Для математического описания зарождения трещины в волокне композита в рассматриваемом случае приходим к задаче механики материалов с неизвестной границей для композита, когда в волокне имеется зона предразрушения. При действии внешних нагрузок на композит в связях, соединяющих берега зоны предразрушения, возникают касательные напряжения $q_x(x)$. Эти напряжения заранее неизвестны и подлежат определению из решения задачи.

Граничные условия в рассматриваемой задаче имеют вид

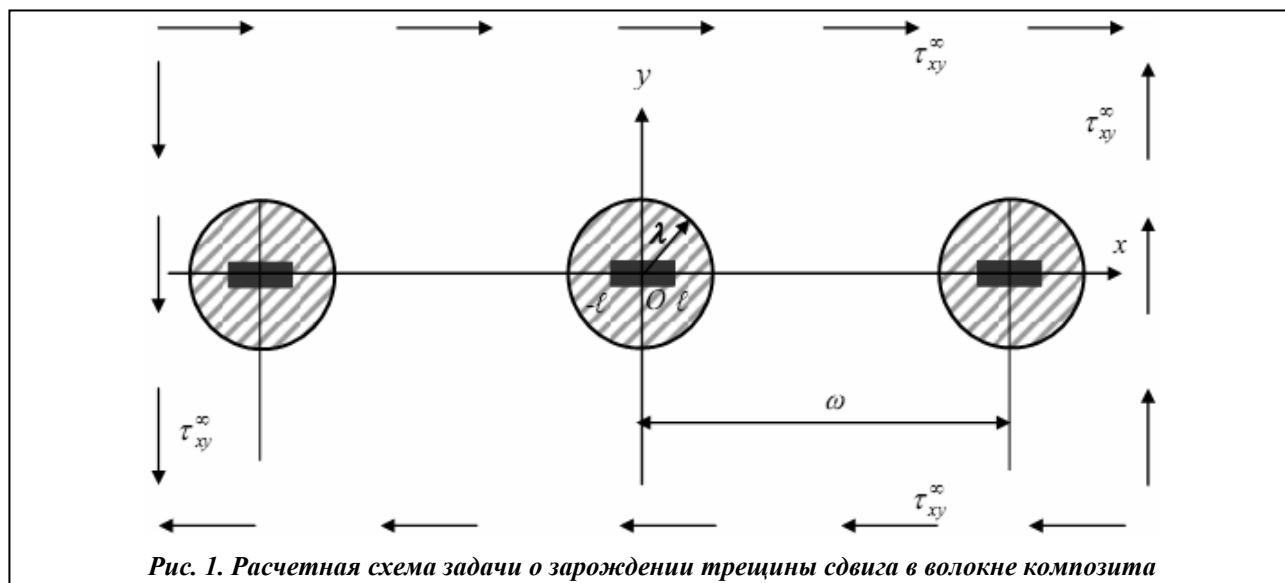


Рис. 1. Расчетная схема задачи о зарождении трещины сдвига в волокне композита

$$\begin{aligned} (\sigma_r - i\tau_{r\theta})_b|_{\Omega_m} &= (\sigma_r - i\tau_{r\theta})_s|_{\Omega_m}, \\ (u + iv)_b|_{\Omega_m} &= (u + iv)_s|_{\Omega_m}, \end{aligned}$$

$$(\sigma_y - i\tau_{xy})_b = -iq_x(x) \quad \text{на берегах зоны предразрушения.}$$

Здесь Ω_m – граница раздела волокна-связующего в ячейке с номером m ; величины, относящиеся к волокну и связующему, в дальнейшем обозначаются соответственно индексами b и s ; $i = \sqrt{-1}$.

Основные соотношения поставленной задачи необходимо дополнить уравнением, связывающим сдвиг берегов зоны предразрушения и касательного усилия в связях. Без потери общности это соотношение запишем в виде

$$u^+(x, 0) - u^-(x, 0) = C(x, q_x(x))q_x(x), \tag{1}$$

Здесь функция $C(x, q_x(x))$ представляет собой эффективную податливость связей; $(u^+ - u^-)$ – сдвиг берегов зоны предразрушения.

Для определения предельной величины внешней нагрузки τ_{xy}^∞ , при которой происходит трещинообразование в волокне, постановку задачи необходимо дополнить условием (критерием) появления трещины (предельного сдвига межчастичных связей в материале волокна). В качестве такого условия примем критерий критического сдвига берегов зоны предразрушения

$$u^+(x, 0) - u^-(x, 0) = \delta_{cr}, \tag{2}$$

где δ_{cr} – характеристика сопротивления материала волокна трещинообразованию.

Используя формулы Колосова–Мусхелишвили [6]

$$\begin{aligned} \sigma_y + \sigma_x &= \sigma_r + \sigma_\theta = 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}], & (z = x + iy) \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= e^{-2i\theta} [\sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta}] = 2[\overline{z}\Phi'(z) + \Psi(z)], \\ 2\mu(u + iv) &= k\varphi(z) - z\overline{\Phi(z)} - \overline{\psi(z)}, \\ \varphi'(z) &= \Phi(z), & \psi'(z) = \Psi(z), \end{aligned} \tag{3}$$

$$k = \begin{cases} 3 - 4\nu & \text{для плоской деформации} \\ (3 - \nu)/(1 + \nu) & \text{для плоского напряженного состояния.} \end{cases}$$

Задача о напряженном и деформированном состоянии составной кусочно-однородной среды вводится к построению в каждой из областей, заданной средой, двух комплексных функций $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ по заданным граничным условиям. В формулах (3) μ – модуль сдвига; ν – коэффициент Пуассона; r, θ – полярные координаты.

Граничные условия в рассматриваемой задаче для отыскания комплексных потенциалов $\Phi_b(z)$, $\Psi_b(z)$ и $\Phi_S(z)$, $\Psi_S(z)$ имеют вид

$$\Phi_b(\tau) + \overline{\Phi_b(\tau)} - [\overline{\tau}\Phi'_b(\tau) + \Psi_b(\tau)]e^{2i\theta} = \Phi_S(\tau) + \overline{\Phi_S(\tau)} - [\overline{\tau}\Phi'_S(\tau) + \Psi_S(\tau)]e^{2i\theta}, \quad (4)$$

$$-\kappa_S \overline{\Phi_S(\tau)} + \Phi_S(\tau) - [\overline{\tau}\Phi'_S(\tau) + \Psi_S(\tau)]e^{2i\theta} = \frac{\mu_S}{\mu_b} \left\{ \Phi_b(\tau) - \kappa_b \overline{\Phi_b(\tau)} - [\overline{\tau}\Phi'_b(\tau) + \Psi_b(\tau)]e^{2i\theta} \right\}, \quad (5)$$

$$\Phi_b(x) + \overline{\Phi_b(x)} + x\overline{\Phi'_b(x)} + \overline{\Psi_b(x)} = -iq_x(x). \quad (6)$$

Здесь $\tau = \lambda e^{i\theta} + m\omega$; $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; x – аффиксы точек берегов зоны предразрушения.

Условие (4) выражает, что силы, действующие с обеих сторон на элементы линии контакта, равны. Условие (5) выражает условие непрерывности перемещений на линии контакта. Наконец, условие (6) означает нагруженность берегов зоны предразрушения силами сцепления материала волокна; κ_b , μ_b , и κ_S , μ_S – упругие постоянные материала волокна и связующего соответственно.

Решение краевой задачи

Обозначим правую часть краевого условия (6) через $f_1(\theta)$

$$\Phi_S(\tau) + \overline{\Phi_S(\tau)} - [\overline{\tau}\Phi'_S(\tau) + \Psi_S(\tau)]e^{2i\theta} = f_1(\theta). \quad (7)$$

Считаем, что на контуре L_0 ($\tau = \lambda e^{i\theta}$) функция $f_1(\theta)$ разлагается в ряд Фурье. Ряд Фурье функции $f_1(\theta)$ имеет вид

$$f_1(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{2k} e^{2ik\theta}, \quad \text{Re } A_{2k} = 0,$$

$$A_{2k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(\theta) e^{-2ik\theta} d\theta, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Комплексные потенциалы $\Phi_b(z)$ и $\Psi_b(z)$ могут быть представлены как

$$\Phi_b(z) = \Phi_{b1}(z) + \Phi_{b2}(z); \quad \Psi_b(z) = \Psi_{b1}(z) + \Psi_{b2}(z) \quad (8)$$

$$\Phi_{b1}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{g(t)}{t-z} dt, \quad \Psi_{b1}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\ell}^{\ell} \left[\frac{g(t)}{t-z} - \frac{tg(t)}{(t-z)^2} \right] dt,$$

$$\Phi_{b2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} z^{2k}, \quad \Psi_{b2}(z) = i \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k} z^{2k},$$

где $g(x)$ – искомая функция, характеризующая сдвиг берегов зоны предразрушения

$$g(x) = -\frac{2\mu_b i}{1 + \kappa_b} \frac{d}{dx} [u^+(x, 0) - u^-(x, 0)] \quad |x| \leq \ell.$$

К соотношениям (8) следует добавить дополнительное условие, вытекающее из физического смысла задачи

$$\int_{-\ell}^{\ell} g(t) dt = 0. \quad (9)$$

Комплексные потенциалы для связующего представим в виде

$$\Phi_S(z) = i\tau_{xy}^{\infty} + i\alpha_0 + i \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} \rho^{(2k)}(z)}{(2k+1)!},$$

$$\Psi_S(z) = i\tau_{xy}^{\infty} + i \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} \rho^{(2k)}(z)}{(2k+1)!} - i \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} S^{(2k+1)}(z)}{(2k+1)!},$$

$$\rho(z) = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2 \sin^{-2}\left(\frac{\pi}{\omega}z\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2, \quad S(z) = \sum_m \left[\frac{P_m}{(z-P_m)^2} - \frac{2z}{P_m} - \frac{1}{P_m} \right];$$

Штрих у суммы означает, что при суммировании исключается индекс $m = 0$.

Из условий антисимметричности относительно координатных осей находим, что

$$\operatorname{Im}\alpha_{2k} = 0; \quad \operatorname{Im}\beta_{2k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Из условия постоянства главного вектора всех сил, действующих на дугу, соединяющую две конгруэнтные точки в D , находим

$$\alpha_0 = \frac{\pi^2}{24} \beta_2 \lambda^2.$$

На основании краевого условия (4) и соотношения (7) для определения комплексных потенциалов $\Phi_b(z)$ и $\Psi_b(z)$ имеем на контуре L_0 граничное условие

$$\Phi_b(\tau) + \overline{\Phi_b(\tau)} - [\overline{\tau}\Phi'_b(\tau) + \Psi_b(\tau)]e^{2i\theta} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{2k} e^{2ik\theta}. \quad (10)$$

Преобразуем граничное условие (10) следующим образом:

$$\Phi_{b_2}(\tau) + \overline{\Phi_{b_2}(\tau)} - [\overline{\tau}\Phi'_{b_2}(\tau) + \Psi_{b_2}(\tau)]e^{2i\theta} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{2k} e^{2ik\theta} + f_2^*(\theta), \quad (11)$$

где

$$f_2^*(\theta) = -\Phi_{b_1}(\tau) - \overline{\Phi_{b_1}(\tau)} + [\overline{\tau}\Phi'_{b_1}(\tau) + \Psi_{b_1}(\tau)]e^{2i\theta}. \quad (12)$$

Разложим функцию $f_2^*(\theta)$ на контуре сечения волокна в ряд Фурье. Этот ряд будет иметь вид

$$f_2^*(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_{2k} e^{2ik\theta}, \quad \operatorname{Re} B_{2k} = 0,$$

$$B_{2k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_2^*(\theta) e^{-2ik\theta} d\theta, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Подставив сюда выражение (12) и поменяв порядок интегрирования, после вычисления интеграла с помощью теории вычетов, находим

$$B_{2k} = \frac{1}{\pi} \int_{-\ell}^{\ell} g(t) f_{2k}(t) dt$$

$$f_0(t) = -\frac{t}{\lambda^2}, \quad f_{2k}(t) = -\frac{\kappa_b t^{2k-1}}{2\lambda^{2k}} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

$$f_{-2k}(t) = \frac{(2k+1)t^{2k-1}}{2\lambda^{2k}} - \frac{(k+1)t^{2k+1}}{\lambda^{2k+2}} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

Подставив в левую часть (11) вместо $\Phi_{b_2}(\tau)$, $\overline{\Phi_{b_2}(\tau)}$, $\Phi'_{b_2}(\tau)$ и $\Psi_{b_2}(\tau)$ их разложения в ряды Фурье в окрестности нулевой точки, а в правую часть вместо $f_2^*(\theta)$ ряд Фурье и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях $\exp(i\theta)$, получим уравнения для определения неизвестных коэффициентов a_{2k} , b_{2k}

$$ia_0 = \frac{A_0 + B_0}{2}, \quad ia_{2k} = \frac{A_{2k} + B_{2k}}{\lambda^{2k}} \quad (k = 1, 2),$$

$$ib_{2k} = -(2k+1) \frac{A_{-2k-2} + B_{-2k-2}}{\lambda^{2k}} - \frac{A_{2k+2} + B_{2k+2}}{\lambda^{2k}} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

Требую, чтобы функции (8) удовлетворяли граничному условию (6), после некоторых преобразований получим сингулярное интегральное уравнение относительно искомой функции $g(x)$:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{g(t) dt}{t-x} + H(x) = -iq_x(x), \quad (13)$$

где $H(x) = \overline{x\Phi'_{b2}(x)} + \overline{\Psi_{b2}(x)}$.

Для решения уравнения (13) сделаем замену переменных

$$\eta = x/\ell, \quad \tau = t/\ell.$$

Тогда получим более удобный вид уравнения (13) для нахождения его приближенного решения

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{p(\tau) d\tau}{\tau-\eta} + H(\eta) = -iq_x(\eta), \quad (14)$$

где $H(\eta) = (\ell\eta)\overline{\Phi'_{02}(\ell\eta)} + \overline{\Psi_{02}(\ell\eta)}$.

Решение сингулярного интегрального уравнения (14) ищем в виде

$$p(\tau) = \frac{p_0(\tau)}{\sqrt{1-\eta^2}},$$

где $p_0(\tau)$ непрерывна по Гельдеру на $[-1, 1]$, причем функция $p_0(\tau)$ заменяется интерполяционным многочленом Лагранжа, построенным по чебышевским узлам.

В результате использования квадратурных формул [7, 8] сингулярное интегральное уравнение сведем к конечной системе линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^n a_{mk} p_k^0 + \frac{1}{2} H(\eta_m) = -q_x(\eta_m) \quad (m = 1, 2, \dots, n-1), \quad (15)$$

$$a_{mk} = \frac{1}{2n} \frac{1}{\sin \theta_m} \operatorname{ctg} \frac{\theta_m + (-1)^{m-k} \theta_k}{2}.$$

Здесь $\tau_m = \cos \frac{2m-1}{2n} \pi$ ($m = 1, 2, \dots, n$), $\eta_r = \cos \frac{\pi r}{n}$ ($r = 1, 2, \dots, n-1$).

К алгебраической системе следует добавить дополнительное уравнение (9), записанное в дискретной форме

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k^0 = 0.$$

Потенциалы $\Phi_b(z)$ и $\Psi_b(z)$ позволяют, после некоторых преобразований, записать краевые условия на контуре L_0 ($\tau = \lambda e^{i\theta}$) для комплексных потенциалов $\Phi_S(z)$ и $\Psi_S(z)$ в следующем виде:

$$\Phi_S(\tau) + \overline{\Phi_S(\tau)} - [\overline{\tau}\Phi'_S(\tau) + \Psi_S(\tau)]e^{2i\theta} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{2k} e^{2ki\theta}; \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & -\kappa_S \overline{\Phi_S(\tau)} + \Phi_S(\tau) - [\overline{\tau}\Phi'_S(\tau) + \Psi_S(\tau)]e^{2i\theta} = \\ & = \frac{\mu_s}{\mu_b} \left\{ \frac{1-\kappa_b}{2} A_0 - \frac{1+\kappa_b}{2} B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_{2k} e^{2ki\theta} - \kappa_b \sum_{k=1}^{\infty} A_{-2k} e^{-2ki\theta} - (1+\kappa_b) \sum_{k=1}^{\infty} B_{-2k} e^{-2ki\theta} \right\}. \end{aligned} \quad (17)$$

Краевые условия (16)–(17) дают возможность определить неизвестные коэффициенты A_{2k} , α_{2k} и β_{2k} . Прежде чем приступить к отысканию A_{2k} , сначала определим коэффициенты α_{2k} и β_{2k} . Для облегчения дальнейшего изложения величину A_{2k} считаем пока заданной. Подставив в левую часть граничного условия (16) вместо $\Phi_S(z)$, $\Phi'_S(z)$ и $\Psi_S(z)$ их разложения в ряды Лорана в окрестности точки $z = 0$ и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях $\exp(i\theta)$, получим две бесконечные системы линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов α_{2k} , β_{2k}

$$i\alpha_{2j+2} = \sum_{k=0}^{\infty} ia_{j,k}\alpha_{2k+2} + b_j \quad (j=0,1,2,\dots), \quad (18)$$

$$a_{j,k} = \frac{1}{\varepsilon}(2j+1)\gamma_{j,k}\lambda^{2j+2k+2} \quad \gamma_{0,0} = \frac{3}{8}g_2\lambda^2 + \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2i+1)g_{i+1}\lambda^{4i+2}}{2^{4i+4}},$$

$$\gamma_{j,k} = \frac{(2j+2k+2)g_{j+k+1}}{(2j+1)!(2k+1)!2^{2j+2k+2}} + \frac{(2j+2k+4)g_{j+k+2}\lambda^2}{(2j+2)!(2k+2)!2^{2j+2k+4}} + \frac{g_{j+1}g_{k+1}\lambda^2}{2^{2j+2k+4}} \left[1 + \frac{(1+\varepsilon)^2 k_2 \lambda^2}{1-(1+\varepsilon)k_2 \lambda^2} \right] +$$

$$+ \varepsilon \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2j+2i+1)!(2k+2i+1)!g_{j+i+1}g_{k+i+1}\lambda^{4i+2}}{(2j+1)!(2k+1)!(2i+1)!(2i)!2^{2j+2k+4i+4}} \quad (j,k=1,2,\dots),$$

$$\varepsilon b_0 = A'_2 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k+2}\lambda^{2k+4}}{2^{2k+4}} A'_{-2k-2},$$

$$\varepsilon b_j = A'_{2j+2} - \frac{(2j+1)g_{j+1}\lambda^{2j+2}}{[1-(1+\varepsilon)k_2\lambda^2]2^{2j+2}} A'_0 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2j+2k+3)!g_{j+k+2}\lambda^{2k+2j+4}}{(2j)!(2k+3)!2^{2j+2k+4}} A'_{-2k-2},$$

$$g_j = 2 \sum_{m,n}^{\infty} \frac{1}{m^{2j}} \quad (j=1,2,\dots), \quad k_2 = \frac{\pi^2}{24}, \quad A'_2 = A_2 + i\tau_{xy}^{\infty}, \quad A'_0 = A_0 - 2i\tau_{xy}^{\infty},$$

$$A'_{2k} = A_{2k} \quad k = (-1, \pm 2, \dots).$$

Коэффициенты β_{2k} определяются соотношениями

$$i\beta_2 = \frac{1}{1-(1+\varepsilon)k_2\lambda^2} \left[-A'_0 + i\varepsilon_2\lambda^2\alpha_2 + (1+\varepsilon) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_{k+1}\lambda^{2k+2}i\alpha_{2k+2}}{2^{2k+2}} \right],$$

$$i\beta_{2j+4} = i(2j+3)\alpha_{2j+2} + \varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2j+2k+3)!g_{j+k+2}\lambda^{2j+2k+4}}{(2j+2)!(2k+1)!2^{2j+2k+4}} i\alpha_{2k+2} - A'_{-2j-2}.$$

Поступая с краевым условием (17) так же, как с условием (16), после некоторых преобразований получим такую же систему уравнений, как (18) относительно α_{2k}^* при $\varepsilon = -\kappa_s$, причем в правой части вместо коэффициентов A'_{2k} следует брать в данном случае A_{2k}^*

$$A_0^* = (\kappa_b - 1)i\tau_{xy}^{\infty} + \frac{(1-\kappa_b)\mu_s}{2\mu_b} A_0 - \frac{(1+\kappa_b)\mu}{2\mu_0} B_0,$$

$$A_2^* = i\tau_{xy}^{\infty} + \left(\frac{\mu_s}{\mu_0} \right) A_2, \quad A_{2k}^* = \left(\frac{\mu_s}{\mu_0} \right) A_{2k}, \quad (k=2, 3, \dots),$$

$$A_{-2k}^* = -\frac{\mu\kappa_b}{\mu_0} A_{-2k} + \frac{(1+\kappa_b)\mu_s}{\mu_b} B_{-2k} \quad (k=1, 2, \dots).$$

Используя полученные соотношения и выполняя некоторые преобразования, получаем формулы, определяющие коэффициенты α_{2k} , β_{2k} , A_0 , A_{-2k} , через величины A_{2k} , а также бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно

$$i\alpha_{2j+2} = \frac{1-\mu_s/\mu_0}{1+\kappa_s} A_{2j+2}, \quad A_{-2j} = -\frac{(1+\kappa_b)\mu_s}{\mu_0 + \kappa_b\mu_s} B_{-2j} + \frac{\mu_b - \mu_s}{\mu_0 + \kappa_b\mu_s} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{2j+2k+2} r_{j,k} A_{2k+2},$$

$$A_0 = \sum_{k=0}^{\infty} e_{0,k} \lambda^{2k+2} A_{2k+2} + e_0 i - \frac{(1+\kappa_b)\mu_s}{2\mu_0 e} B_0,$$

$$\begin{aligned}
 e_{0,k} &= \frac{1-\mu_S/\mu_0}{(1-2k_2\lambda^2)^e} r_{0,k}, & e_0 &= \frac{1+\kappa_S}{(1-2k_2\lambda^2)^e}, & e &= \frac{1+\kappa_S}{2(1-2k_2\lambda^2)} - \frac{\chi_S-1}{2} + \frac{\mu_S(\kappa_b-1)}{2\mu_0}, \\
 i\beta_{2j+2} &= \frac{1-\mu_S/\mu_b}{1+\kappa_S} \left[(2j+3)A_{2j+2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2j+2k+3)!g_{j+k+2}\lambda^{2j+2k+4}A_{2k+2}}{(2j+2)!(2k+1)!2^{2j+2k+4}} \right] - A_{-2j-2}, \\
 A_{2j+2} &= \sum_{k=0}^{\infty} D_{j,k}A_{2k+2} + T_j, & (j=0,1,2,\dots), & & D_{j,k} &= (2j+1)\lambda^{2j+2k+2}S_{j,k}/\gamma, \\
 S_{j,k} &= \frac{1-\mu_S/\mu_b}{1+\kappa_S} \left(\gamma_{j,k} + \frac{\mu_b}{\kappa_b\mu_S} \gamma_{j,k}^* + d_{j,k} \right), & d_{j,k} &= \lambda^2 \frac{g_{j+1}g_{k+1}}{2^{2j+2k+4}} \eta(\mu_S/\mu_b), & \eta(\mu_S/\mu_b) &= \frac{C}{C_1}, \\
 C &= \frac{(\kappa_b-1)}{\kappa_b} \frac{1}{1-(\kappa_S-1)k_2\lambda^2} - \frac{2}{1-2k_2\lambda^2}, & C_1 &= 1 - \left(1-2k_2\lambda^2 \right) \left[\frac{\kappa_S-1}{\kappa_S+1} - \frac{\mu_S}{\mu_0} \frac{(\kappa_b-1)}{(\kappa_S+1)} \right], \\
 T_j &= T_j^* + H_j, & T_j^* &= t_j^*/\gamma, & H_j &= h_j/\gamma, \\
 t_0^* &= \left(1 + \frac{\mu_0}{\kappa_b\mu_S} \right) i\tau_{xy}^{\infty}, & t_j^* &= \frac{(2j+1)g_{j+1}\lambda^{2j+2}}{2^{2j+2}} \eta_1(\mu_S/\mu_b) i\tau_{xy}^{\infty}, \\
 \eta_1(\mu_S/\mu_0) &= \frac{(1+\mu_b/\kappa_b\mu_S)[(\mu_S/\mu_b)(\kappa_b-1) - (\kappa_S-1)]}{1+(\kappa_S-1)k_2\lambda^2 + (\mu_S/2\mu_b)(\kappa_b-1)(1-2k_2\lambda^2)}, & h_0 &= \frac{1+\kappa_b}{\kappa_b} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k+2}\lambda^{2k+4}}{2^{2k+4}} B_{-2k-2}, \\
 h_j &= \frac{(2j+1)g_{j+1}\lambda^{2j+2}}{2^{2j+2}} (1+\kappa_b) \left\{ \frac{1}{2\kappa_b[1+(\kappa_S-1)k_2\lambda^2]} + \frac{\mu_S}{2e\mu_b} \left[\frac{1}{1-2k_2\lambda^2} + \frac{1-\kappa_b}{2\kappa_b[1+(\kappa_S-1)k_2\lambda^2]} \right] \right\} B_0 + \\
 &+ \frac{1+\kappa_S}{\kappa_b} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2j+2k+3)!g_{j+k+2}\lambda^{2k+2j+4}}{(2j)!(2k+3)!2^{2j+2k+4}} B_{-2k-2}, \\
 \gamma &= \frac{(1-\mu_S/\mu_b)(1-\kappa_S\mu_b/\kappa_b\mu_S)}{1+\kappa_b} - \frac{1+\kappa_b}{\kappa_b}, & r_{j,k} &= \frac{(2j+2k+1)!g_{j+k+1}}{(2j)!(2k+1)!2^{2j+2k+2}}.
 \end{aligned}$$

Напомним, что величины $\gamma_{j,k}$ определены в (18) при $\varepsilon = 1$, а величины $\gamma_{j,k}^*$ – при $\varepsilon = -\kappa_S$.

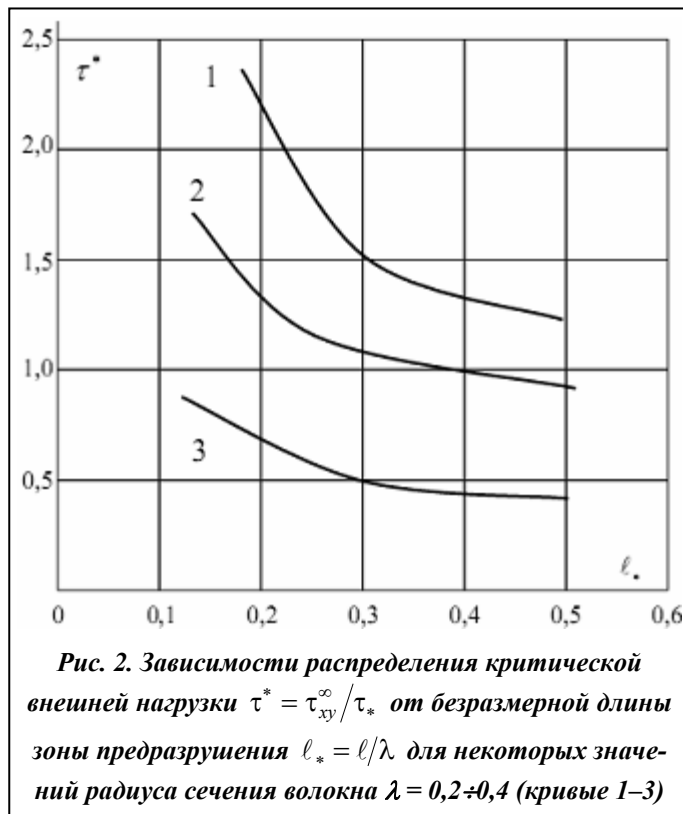
Численные результаты и их анализ

В правую часть полученной системы (15) входят неизвестные значения касательных напряжений $q_x(\eta_m)$ в узловых точках, принадлежащих зоне предразрушения. Неизвестные касательные напряжения в связях $q_x(\eta_m)$, возникающие на берегах зоны предразрушения, определяются из дополнительного условия (1). Используя построенное решение рассматриваемой задачи, уравнение (1) представим в виде

$$g(x) = -\frac{2\mu_b i}{1+\kappa_S} \frac{d}{dx} [C(x, q_x(x))q_x(x)]. \tag{19}$$

Это дифференциальное уравнение служит для нахождения касательных напряжений в связях. Для построения недостающих уравнений требуем выполнения условий (19) в узловых точках. При этом используем метод конечных разностей. В результате получим еще одну систему из n уравнений для определения приближенных значений $q_x(\eta_m)$ ($m = 1, 2, \dots, n$). Так как в составном теле напряжения ограничены, то решение сингулярного интегрального уравнения (13) следовало бы искать в класс всюду ограниченных функций. Следовательно, к полученным системам следует добавить условие ограниченности напряжений у вершин зоны предразрушения

$$\sum_{k=1}^m (-1)^k p_k^0 \text{ctg} \frac{\theta_k}{2} = 0.$$



$(u^+ - u^-) \leq \delta_*$. Нелинейная часть кривой деформирования связей аппроксимировалась билинейной зависимостью [10], восходящий участок которой соответствовал деформированию с их максимальным усилием связей. При $(u^+ - u^-) > \delta_*$ закон деформирования описывался нелинейной зависимостью, определяемой точками (δ_*, τ_*) и (δ_c, τ_c) , причем при $\tau_c \geq \tau_*$ имела место возрастающая линейная зависимость (линейное упрочнение, соответствующее упругопластической деформации связей). В результате численного расчета найдена зависимость длины зоны предразрушения, касательные напряжения в связях и сдвиг противоположных берегов зоны предразрушения в волокне от параметра нагружения τ_{xy}^∞ .

Для определения предельного равновесного состояния зоны предразрушения, при котором происходит трещинообразование в волокне композита, использовали условие (2). Используя полученное решение, условием, определяющим предельную внешнюю нагрузку, при которой в точке $x = x_0$ происходит критический сдвиг межчастичных связей материала волокна, будет

$$C(x_0, q_x(x_0))q_x(x_0) = \delta_{cr} \quad (20)$$

Решение объединенной алгебраической системы и критерия (20) позволяет определить критическое значение внешней нагрузки, размер зоны предразрушения и касательных напряжений в связях в состоянии предельного равновесия, при котором в волокне композита появляется трещина.

На основании численных расчетов были построены (рис. 2) графики зависимости критической (продольной) нагрузки $\tau^* = \tau_{xy}^\infty / \tau_*$ от длины зоны предразрушения $\ell_* = \ell / \lambda$ для различных значений радиуса сечения волокна.

Выводы

Анализ предельно равновесного состояния композита при поперечном сдвиге, когда в волокне зарождается трещина, сводится к параметрическому исследованию объединенной алгебраической системы и критерия появления трещины сдвига (20) при различных законах деформирования связей, упругих постоянных материалов и геометрических характеристик составного тела. Непосредственно

Для численной реализации изложенного метода были выполнены расчеты. Для решения объединенной системы уравнений применялся метод редукции, т. е. усечение до конечного числа неизвестных и уравнений. Каждая из бесконечных систем урезалась до пяти уравнений. В численных расчетах полагалось $n = 20$ и $n = 30$, что отвечает разбиению интервала на 20 и 30 чебышевских узлов. Так как размер зоны предразрушения ℓ неизвестен, то разрешающая объединенная алгебраическая система уравнений задачи является нелинейной даже при линейном законе деформирования связей. Для ее решения при линейных связях использовали обратный способ. В каждом приближении решалась объединенная алгебраическая система методом Гаусса. В случае нелинейного закона деформирования связей для определения касательных напряжений в зоне предразрушения использовался также итерационный алгоритм, подобный методу упругих решений [9]. Считается, что закон деформирования межчастичных связей в зоне предразрушения линейный при

из решения полученных алгебраических систем определяются усилия в связях и сдвиг берегов зон предразрушения.

Литература

1. *Болотин, В. В.* Механика зарождения и начального развития усталостных трещин / В. В. Болотин // Физико-хим. механика материалов. – 1986. – Т. 22, № 1. – С. 18–23.
2. *Zolgharnein, E.* Nucleation of a crack under inner compression of cylindrical bodies / E. Zolgharnein, V. M. Mirsalimov // Acta Polytechnica Hungarica. – 2012. – Vol. 9, № 2. – P. 169–183.
3. *Vaghari, A. R.* Nucleation of cracks in a perforated heart – releasing material with temperature – dependent elastic properties / A. R. Vaghari, V. M. Mirsalimov // J. Appl. Mech. Tech. Phys. – 2012. – Vol. 53, № 7. – P. 589–598.
4. *Гасанов, Ф. Ф.* Трещинообразование в перфорированном теле при продольном сдвиге / Ф. Ф. Гасанов // Механика машин, механизмов и материалов. – 2013. – № 2 (23). – С. 46–52.
5. *Гасанов, Ф. Ф.* Моделирование зарождения трещин сдвига в теле, ослабленном периодической системой круглых отверстий / Ф. Ф. Гасанов // Пробл. машиностроения. – 2013. – Т. 16, № 3, – С. 29–37.
6. *Мухелишвили, Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мухелишвили. – М.: Наука. 1966. – 707 с.
7. *Мирсалимов, В. М.* Неодномерные упругопластические задачи / В. М. Мирсалимов. – М.: Наука. 1987. – 256 с.
8. *Ladopoulos, E. G.* Singular integral Equations, Linear and Non-Linear Theory and its Applications in Science and Engineering / E. G. Ladopoulos. – New York, Berlin: Springer Verlag. 2000. – 547 p.
9. *Ильюшин, А. А.* Пластичность / А. А. Ильюшин. – М.: ЛОГОС, 2004. – 376 с.
10. *Гольдштейн, Р. В.* Моделирование трещиностойкости композиционных материалов / Р. В. Гольдштейн, М. Н. Перельмутер // Вычисл. механика сплошных сред. – 2009. – Т. 2, № 2. – С. 22–39.

Поступила в редакцию 12.02.14