

УДК 539.3

## МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧ ВИГИНУ ТОНКИХ ПОЛОГИХ ОБОЛОНОК СКЛАДНОЇ ФОРМИ

**С. М. Склепус,**

д-р техн. наук

[snsklepus@ukr.net](mailto:snsklepus@ukr.net)

ORCID: 0000-0002-4119-4310

Інститут проблем  
машинобудування  
ім. А. М. Підгорного  
НАН України,  
61046, Україна, м. Харків,  
вул. Пожарського, 2/10

У статті представлено новий чисельно-аналітичний метод розв'язання геометрично нелінійних задач вигину тонких пологих оболонок і пластин складної форми. Постановку задачі виконано у рамках класичної геометрично нелінійної постановки. Для лінеаризації нелінійної задачі вигину пологих оболонок і пластин використовувався метод продовження за параметром. Введено зростаючий параметр  $t$ , пов'язаний із зовнішнім навантаженням, який характеризує процес навантаження оболонки. Для варіаційної постановки лінеаризованої задачі побудовано функціонал у формі Лагранжа, заданий на кінематично можливих швидкостях переміщень. Для знаходження основних невідомих задачі нелінійного вигину оболонки (переміщення, деформації, напруження) сформульовано задачу Коші за параметром  $t$  для системи звичайних диференціальних рівнянь, що розв'язувалася методом Рунге-Кутти-Мерсона з автоматичним вибором кроку. Початкові умови знаходяться із розв'язку задачі геометрично лінійного деформування. Праві частини диференціальних рівнянь при фіксованих значеннях параметра  $t$ , що відповідають схемі Рунге-Кутти-Мерсона, знаходилися із розв'язку варіаційної задачі для функціонала у формі Лагранжа. Варіаційні задачі розв'язувалися методом Рітца в поєднанні з методом R-функцій, що дозволяє точно врахувати геометричну інформацію про крайову задачу і подати наближений розв'язок у вигляді формули – структури розв'язку, яка точно задовольняє всім (загальна структура) або частині (часткова структура) граничних умов. Розв'язано тестову задачу для нелінійного вигину квадратної жорстко закріпленої пластини під дією рівномірно розподіленого навантаження різної інтенсивності. Результати для прогинів і напружень, отримані за допомогою розробленого методу, порівняні з аналітичним розв'язком і розв'язком, отриманим методом скінченних елементів. Розв'язано задачу вигину жорстко закріпленої пластини складної форми. Досліджено вплив геометричної форми на напружено-деформований стан.

**Ключові слова:** гнучка полога оболонка, складна форма, метод R-функцій, метод продовження за параметром.

### Вступ

Тонкі пологі оболонки і пластини як конструктивні елементи широко використовуються в аерокосмічній техніці, машинобудуванні, енергетиці, хімічній промисловості та інших галузях. Теорії і методи розрахунку напружено-деформованого стану оболонок, зокрема, у геометрично нелінійній постановці, ґрунтовно висвітлені в літературі. Незважаючи на це, вони продовжують розвиватися. Достатньо повний огляд методів розв'язання лінійних і нелінійних задач теорії оболонок зроблено, наприклад, у роботах [1–3]. Найчастіше в дослідженнях розглядають пластини і оболонки канонічної геометричної форми в плані. За їх результатами можна зробити висновок, що отримати розв'язок крайової задачі в аналітичному вигляді вдається за певних умов навантаження й закріплення, а якщо ж пластина або оболонка мають складну геометричну форму, це виявляється неможливим. У такому випадку необхідно використовувати універсальні методи, що дозволяють знаходити наближений розв'язок в областях складної форми, наприклад, метод скінченних елементів [4–6], метод R-функцій [7, 8], метод «занурення» [9] та ін. Крім того, аналіз наявної літератури показав, що кількість робіт, присвячених вивченню геометрично нелінійного деформування пластин і пологих оболонок складної форми в плані, є досить обмеженою, що видається цілком логічним, бо пошук ефективних методів лінеаризації та розв'язання нелінійних задач теорії оболонок і пластин складної форми в даний час продовжується.

Метою роботи є розробка чисельно-аналітичного методу розв'язання задач геометрично нелінійного деформування тонких пологих оболонок і пластин складної форми в плані, що базується на методі R-функцій.

**Постановка задачі. Метод розв'язання**

Розглянемо в прямокутній декартовій системі координат  $Ox_1x_2z$  ізотропну тонку положу оболонку товщиною  $h$  й довільної форми  $\Omega$  в плані. Вісь  $Oz$  перпендикулярна плану оболонки. Температура є сталою. Для тонких пологих оболонок припускається, що внутрішня геометрія координатної поверхні  $z=0$  нічим не відрізняється від евклідової геометрії на площині. Стріла підйому оболонки  $f < 0,2a$ , де  $a$  – найменший характерний розмір оболонки. При цьому для коефіцієнтів першої квадратичної форми береться:  $A_i \approx 1$ , ( $i=1, 2$ ), а головні кривизни координатної поверхні є сталими:  $k_i = \text{const}$  [3, 10]. Оболонка знаходиться під дією поперечного навантаження інтенсивністю  $q_z^* = q_z^*(x_1, x_2)$ .

Якщо стрілу прогину можна порівняти з товщиною оболонки ( $w_{\max} \geq 0,25h$ ), то для постановки задачі необхідно використовувати нелінійну теорію оболонок, яка враховує великі прогини.

Переміщення точок оболонки вздовж осей  $Ox_1$ ,  $Ox_2$ ,  $Oz$  визначаються виразами [3, 10]:

$$v_1(x_1, x_2, z) = u_1 - zw_{,1}, \quad v_2(x_1, x_2, z) = u_2 - zw_{,2}, \quad v_3(x_1, x_2, z) = w, \quad (1)$$

де  $u_1(x_1, x_2)$ ,  $u_2(x_1, x_2)$ ,  $w(x_1, x_2)$  – переміщення точок координатної поверхні оболонки вдовж осей  $Ox_1$ ,  $Ox_2$ ,  $Oz$  відповідно.

При звичайних для тонких пологих оболонок спрощеннях і з урахуванням нелінійних членів, суттєвих у разі великого прогину і малих деформацій, останні пов'язані з переміщеннями наступними нелінійними співвідношеннями [3, 10]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= u_{1,1} - zw_{,11} + k_1 w + 0,5w_{,1}^2, \quad \varepsilon_{22} = u_{2,2} - zw_{,22} + k_2 w + 0,5w_{,2}^2, \\ \gamma_{12} &= 2\varepsilon_{12} = u_{1,2} + u_{2,1} - 2zw_{,12} + w_{,1}w_{,2}, \quad \varepsilon_{i3} = 0, \quad (i=1,2,3), \end{aligned} \quad (2)$$

Напруження й деформації пов'язані між собою законом Гука

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22}), \quad \sigma_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11}), \quad \sigma_{12} = G\gamma_{12}. \quad (3)$$

Тут  $E$ ,  $\nu$  – модуль Юнга й коефіцієнт Пуассона матеріалу оболонки,  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  – модуль зсуву.

Одним з найпоширеніших способів аналізу нелінійного деформування механічних систем вважається відстежування процесу розвитку їх деформацій в міру зміни будь-якого характерного параметра. Рівняння, що описують нелінійну поведінку деформованих систем, містять параметр або можуть бути представлені у формі, що включає параметр, наприклад, пов'язаний із навантаженням, часом або будь-яким іншим параметром, що кількісно характеризує деформування системи і явно чи неявно міститься в рівняннях.

Для лінеаризації й постановки задачі геометрично нелінійного деформування пологих оболонок і пластин будемо використовувати метод продовження за параметром [11], який в нашому випадку природно пов'язати із зовнішнім навантаженням. Введемо до розгляду зростаючий параметр  $t \in [t_0, t^*]$ , що характеризує процес навантаження оболонки. У даному випадку  $t_0$  є значенням параметра, при якому прогини малі, а отже, задача деформування геометрично лінійна,  $t^*$  відповідає заданому рівню навантаження оболонки  $q_z(t^*) = q_z^*$ . Для зовнішнього поперечного навантаження застосуємо лінійний закон

$$q_z(t) = q_{z0} + tq_{z1}, \quad (4)$$

де  $t \in [0, t^*]$ .

Слід зауважити, що, оскільки розв'язується пружна задача, то кінцевий результат не залежить від шляху навантаження і можуть бути взяті інші закони навантаження.

Продиференціювавши співвідношення (2) за параметром  $t$ , отримаємо формули, що пов'язують похідні деформацій і переміщень

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{11} &= \dot{u}_{1,1} - z\dot{w}_{,11} + k_1\dot{w} + w_{,1}\dot{w}_{,1}, \quad \dot{\varepsilon}_{22} = \dot{u}_{2,2} - z\dot{w}_{,22} + k_2\dot{w} + w_{,2}\dot{w}_{,2}, \\ \dot{\gamma}_{12} &= 2\dot{\varepsilon}_{12} = \dot{u}_{1,2} + \dot{u}_{2,1} - 2z\dot{w}_{,12} + w_{,1}\dot{w}_{,2} + w_{,2}\dot{w}_{,1}. \end{aligned} \quad (5)$$

У даному випадку крапка над символами позначає повну похідну за аргументом  $t$ . Далі, по тексту статті, похідні за  $t$  будемо називати швидкостями.

Якщо вважати кути повороту  $w_{,i}$  заданими функціями, то співвідношення (5) є лінійними.

Продиференціювавши закон Гука (3) за  $t$  і врахувавши (5), для швидкостей напружень запишемо

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_{11} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\dot{u}_{1,1} + \nu \dot{u}_{2,2} - z(\dot{w}_{,11} + \nu \dot{w}_{,22})) + (k_1 + \nu k_2) \dot{w} + w_{,1} \dot{w}_{,1} + \nu w_{,2} \dot{w}_{,2}, \\ \dot{\sigma}_{22} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\dot{u}_{2,2} + \nu \dot{u}_{1,1} - z(\dot{w}_{,22} + \nu \dot{w}_{,11})) + (k_2 + \nu k_1) \dot{w} + w_{,2} \dot{w}_{,2} + \nu w_{,1} \dot{w}_{,1}, \\ \dot{\sigma}_{12} &= G(\dot{u}_{1,2} + \dot{u}_{2,1} - 2z\dot{w}_{,12} + w_{,1} \dot{w}_{,2} + w_{,2} \dot{w}_{,1}),\end{aligned}\tag{6}$$

Для варіаційної постановки задачі будемо використовувати принцип віртуальної роботи для квазістатичних задач [12]. Відповідний функціонал у формі Лагранжа, записаний відносно швидкостей переміщень для тривимірного тіла, має вигляд [12]

$$L(\dot{v}_i) = 0,5 \iiint_V (\dot{\sigma}_{kl} \dot{\epsilon}_{kl} + \sigma_{ij} \dot{v}_{k,i} \dot{v}_{k,j}) - \iint_{S_p} \dot{P}_i \dot{v}_i dS, \quad (i, j, k, l=1, 2, 3),\tag{7}$$

де  $\dot{v}_i$  – кінематично можливі швидкості переміщень.

Вважаючи, що  $\dot{v}_{i,j} \sim \dot{w}_i^2 \ll 1$ , ( $i, j=1, 2$ ), і нехтуючи членами вищого порядку малості у виразі (7), для гнучкої тонкої оболонки будемо мати

$$L = 0,5 \iint_{\Omega(h)} (\dot{\sigma}_{kl} \dot{\epsilon}_{kl} + \sigma_{11} \dot{w}_{,1}^2 + \sigma_{22} \dot{w}_{,2}^2 + 2\sigma_{12} \dot{w}_{,1} \dot{w}_{,2}) dx_1 dx_2 dz - \iint_{\Omega} \dot{q}_z \dot{w} dx_1 dx_2, \quad (k, l=1, 2).\tag{8}$$

Підставивши (5), (6) у (8) і проінтегрувавши по  $z$ , отримаємо функціонал у формі Лагранжа для задачі вигину гнучкої пологої оболонки

$$L = L_l + L_n,\tag{9}$$

де  $L_l(\dot{u}_1, \dot{u}_2, \dot{w})$ ,  $L_n(\dot{u}_1, \dot{u}_2, \dot{w})$  – «лінійна» і «нелінійна» частини функціонала, які визначаються наступними формулами:

$$\begin{aligned}L_l &= 0,5 \iint_{\Omega} [A_1(\dot{u}_{1,1}^2 + \dot{u}_{2,2}^2 + \dot{w}^2(k_1^2 + k_2^2) + 2k_1 \dot{w} \dot{u}_{1,1} + 2k_2 \dot{w} \dot{u}_{2,2}) + 2A_2(\dot{u}_{1,1} \dot{u}_{2,2} + \dot{w}(k_1 \dot{u}_{2,2} + k_2 \dot{u}_{1,1}) + k_1 k_2 \dot{w}^2) + A_3(\dot{u}_{1,2} + \dot{u}_{2,1})^2 - \\ &- 2B_1(\dot{u}_{1,1} \dot{w}_{,11} + \dot{u}_{2,2} \dot{w}_{,22} + \dot{w}(k_1 \dot{w}_{,11} + k_2 \dot{w}_{,22})) - 2B_2(\dot{u}_{1,1} \dot{w}_{,22} + \dot{u}_{2,2} \dot{w}_{,11} + \dot{w}(k_1 \dot{w}_{,22} + k_2 \dot{w}_{,11})) - 2B_3 \dot{w}_{,12} (\dot{u}_{1,2} + \dot{u}_{2,1}) + \\ &+ D_1(\dot{w}_{,11}^2 + \dot{w}_{,22}^2) + 2D_2 \dot{w}_{,11} \dot{w}_{,22} + D_3 \dot{w}_{,12}^2] dx_1 dx_2 - \iint_{\Omega} \dot{q}_z \dot{w} dx_1 dx_2\end{aligned}\tag{10}$$

$$\begin{aligned}L_n &= 0,5 \iint_{\Omega} [A_1(w_{,1}^2 \dot{w}_{,1}^2 + w_{,2}^2 \dot{w}_{,2}^2 + 2w_{,1} \dot{u}_{1,1} \dot{w}_{,1} + 2w_{,2} \dot{u}_{2,2} \dot{w}_{,2} + 2\dot{w}(k_1 w_{,1} \dot{w}_{,1} + k_2 w_{,2} \dot{w}_{,2})) + \\ &+ 2A_2(w_{,1} \dot{u}_{2,2} \dot{w}_{,1} + w_{,2} \dot{u}_{1,1} \dot{w}_{,2} + \dot{w}(k_1 w_{,2} \dot{w}_{,2} + k_2 w_{,1} \dot{w}_{,1})) + w_{,1} w_{,2} \dot{w}_{,1} \dot{w}_{,2}) + \\ &+ A_3(w_{,1}^2 \dot{w}_{,2}^2 + w_{,2}^2 \dot{w}_{,1}^2 + 2(w_{,1} \dot{w}_{,2} + w_{,2} \dot{w}_{,1})(\dot{u}_{1,2} + \dot{u}_{2,1})) + 2w_{,1} w_{,2} \dot{w}_{,1} \dot{w}_{,2}) - \\ &- 2B_1(w_{,1} \dot{w}_{,1} \dot{w}_{,11} + w_{,2} \dot{w}_{,2} \dot{w}_{,22}) - 2B_2(w_{,1} \dot{w}_{,1} \dot{w}_{,22} + w_{,2} \dot{w}_{,2} \dot{w}_{,11}) - 2B_3 \dot{w}_{,12} (w_{,1} \dot{w}_{,2} + w_{,2} \dot{w}_{,1}) + \\ &+ f_{11} \dot{w}_{,1}^2 + f_{22} \dot{w}_{,2}^2 + 2f_{12} \dot{w}_{,1} \dot{w}_{,2}] dx_1 dx_2,\end{aligned}\tag{11}$$

де  $\Omega$  – область, в якій відшукується наближений розв'язок задачі;  $A_1 = \int_{(h)} \frac{E}{1-\nu^2} dz$ ,  $A_2 = \nu A_1$ ,  $A_3 = \int_{(h)} G dz$ ,

$$B_1 = \int_{(h)} \frac{Ez}{1-\nu^2} dz, \quad B_2 = \nu B_1, \quad B_3 = 2 \int_{(h)} Gz dz, \quad D_1 = \int_{(h)} \frac{Ez^2}{1-\nu^2} dz, \quad D_2 = \nu D_1, \quad D_3 = 4 \int_{(h)} Gz^2 dz, \quad f_{11} = \int_{(h)} \sigma_{11} dz,$$

$$f_{22} = \int_{(h)} \sigma_{22} dz, \quad f_{12} = \int_{(h)} \sigma_{12} dz.$$

Тут повороти  $w_{,1}$ ,  $w_{,2}$  і напруження  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{12}$  вважаються заданими для кожного фіксованого значення параметра  $t$  та не варіюються.

Основні невідомі задачі у будь якій точці оболонки, для значень  $t > 0$ , можна знайти із розв'язку задачі Коші за параметром  $t$  для системи звичайних диференціальних рівнянь, яку запишемо в символічній формі

$$\frac{dG_k}{dt} = F_k(G_l), \quad (k = \overline{1, 11}), \quad (12)$$

де  $G = \{G_k\} = \{u_i, w, w_{,i}, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}\}, (i, j = \overline{1, 2})$ . Праві частини рівнянь (12) мають вигляд:  $F_1 = \dot{u}_1, F_2 = \dot{u}_2, F_3 = \dot{w}; F_4 = \dot{w}_{,1}, F_5 = \dot{w}_{,2}; F_k (k=6, 7, 8)$  визначаються формулами (5);  $F_k (k=9, 10, 11)$  – формулами (6).

Початкові умови для рівнянь (12) знаходяться із розв'язку задачі лінійного деформування при  $q_z(0) = q_{z0}$ . Для її розв'язання можна використовувати функціонал у формі (10), замінивши в ньому швидкості функцій самими функціями.

До найвідоміших методів розв'язання початкових задач належать метод Ейлера, метод Адамса-Башфорта, методи Рунге-Кутти різного ступеня точності. У даній роботі початкову задачу для системи рівнянь (12) будемо розв'язувати методом Рунге-Кутти-Мерсона 4-го порядку (РКМ) з автоматичним вибором кроку [13].

Праві частини рівнянь, при фіксованих значеннях  $t \neq 0$ , що відповідають схемі РКМ, знаходимо із розв'язку варіаційної задачі для функціонала (9). Варіаційні задачі будемо розв'язувати методом Рітца в поєднанні з методом R-функцій [7], який дозволяє точно врахувати геометричну інформацію про крайову задачу і подати наближений розв'язок у вигляді формули – структури розв'язку, яка точно задовольняє всім (загальна структура) або частині (часткова структура) граничним умовам.

### Числові результати

Як тестовий приклад розглянемо вигин квадратної жорстко закріпленої пластини [14], яка знаходиться під дією рівномірно розподіленого навантаження. Геометричні розміри: довжина сторони  $2a = 7,62$  м, товщина  $h = 0,0762$  м. Пружні характеристики матеріалу:  $E = 2,1 \times 10^5$  МПа,  $\nu = 0,316$ .

Граничні умови для жорсткого закріплення мають вигляд

$$\dot{w} = 0, \dot{w}_{,n} = 0, \dot{u}_1 = 0, \dot{u}_2 = 0,$$

а відповідна структура розв'язку

$$\dot{w} = \omega^2 \Phi_1, \dot{u}_1 = \omega \Phi_2, \dot{u}_2 = \omega \Phi_3.$$

У даному разі  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$  – невизначені компоненти структури розв'язку; функція  $\omega = \omega(x_1, x_2)$  будується за допомогою теорії R-функцій [7] і задовольняє умовам:  $\omega = 0, \omega_{,n} = -1$  на межі  $\partial\Omega, \omega > 0$  всередині  $\Omega$  ( $\mathbf{n}$  – зовнішня нормаль до контуру  $\partial\Omega$ ).

У випадку квадратної пластини функція  $\omega$  має вигляд

$$\omega = \omega_1 \wedge_0 \omega_2,$$

де  $\omega_1 = \frac{1}{2a}(a^2 - x_2^2), \omega_2 = \frac{1}{2a}(a^2 - x_1^2)$ , а символ  $\wedge_0$  позначає

R-кон'юнкцію [7]:  $f_1 \wedge_0 f_2 = f_1 + f_2 - \sqrt{f_1^2 + f_2^2}$ .

При чисельній реалізації невизначені компоненти структури розв'язку подавалися у вигляді скінченних рядів  $\Phi_i(x_1, x_2, t) = \sum_n C_n^{(i)}(t) f_n^{(i)}(x_1, x_2), (i=1, 2, 3)$ , де  $C_n^{(i)}(t)$  – невизначені коефіцієнти, які на кожному кроці знаходилися методом Рітца;  $t$  – фіксоване значення параметра навантаження;  $\{f_n^{(i)}\}$  – системи лінійно незалежних функцій. Як  $\{f_n^{(i)}\}$  використовувалися степеневі поліноми виду  $x_1^k x_2^l$ .

Таблиця 1. Безрозмірні прогини  $\bar{w}$  в центрі пластини

$\bar{q}$	Analytical	FEM	RFM
17,8	0,237	0,2392	0,2356
38,3	0,471	0,4738	0,4676
63,4	0,695	0,6965	0,6903
95,0	0,912	0,9087	0,9042
134,9	1,121	1,1130	1,1110
184,0	1,323	1,3080	1,3090
245,0	1,521	1,5010	1,5040
318,0	1,714	1,6880	1,6930
402,0	1,902	1,8860	1,8720

Таблиця 2. Безрозмірні напруження  $\bar{\sigma}_{11}$  в центрі пластини

$\bar{q}$	Analytical	FEM	RFM
17,8	2,6	2,414	2,530
38,3	5,2	5,022	5,212
63,4	8,0	7,649	7,893
95,0	11,1	10,254	10,535
134,9	13,3	12,850	13,155
184,0	15,9	15,420	15,754
245,0	19,2	18,060	18,440
318,0	21,9	20,741	21,197
402,0	25,1	23,423	24,000

У табл. 1, 2 наведені результати розрахунку безрозмірних прогинів  $\bar{w} = \frac{w}{h}$  і нормальних напружень  $\bar{\sigma}_{11} = \frac{4\sigma_{11}a^2}{Eh^2}$  у центрі на нижній поверхні пластини, при  $z=0,5h$ , залежно від значення безрозмірного навантаження  $\bar{q} = \frac{16q_z^*a^4}{Eh^4}$ . Тут представлені дані аналітичного розв'язку (Analytical), отримані з використанням подвійних рядів Фур'є [15], а також результати, отримані методом скінченних елементів (FEM) [14] і методом R-функцій (RFM). У формулі (4) приймалося:  $q_{z0}=q_{z1}=10^{-2}$  МПа. Початковий крок і задана похибка обчислень у методі РКМ, відповідно, дорівнювали:  $\Delta t=10^{-3}$ ,  $\varepsilon=10^{-3}$ . Аналітичні результати та результати FEM отримані на основі уточненої теорії першого порядку (first-order shear deformation theory, FSDT).

Із наведених в табл. 1,2 результатів видно, що метод, запропонований у статті, забезпечує близький збіг із результатами, отриманими іншими методами.

Далі розглянемо вигін жорстко закріпленої пластини із круговими кутовими вирізами під дією рівномірно розподіленого навантаження (рис. 1). Геометричні розміри:  $2a=2b=7,62$  м,  $r=1,5$  м,  $h=0,0762$  м. Пружні константи ті самі, що й у тестовому прикладі.



Рис. 1. Пластина з круговими вирізами

Рівняння області на рис. 1 може бути записане так

$$\omega = (\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge ((\omega_3 \wedge \omega_4) \wedge (\omega_5 \wedge \omega_6)) = 0,$$

де  $\omega_1 = \frac{1}{2b}(b^2 - x_2^2)$ ,  $\omega_2 = \frac{1}{2a}(a^2 - x_1^2)$ ,  $\omega_3 = \frac{1}{2r}((x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2 - r^2)$ ,  $\omega_4 = \frac{1}{2r}((x_1 + a)^2 + (x_2 - b)^2 - r^2)$ ,

$\omega_5 = \frac{1}{2r}((x_1 + a)^2 + (x_2 + b)^2 - r^2)$ ,  $\omega_6 = \frac{1}{2r}((x_1 - a)^2 + (x_2 + b)^2 - r^2)$ .

На рис. 2, 3 представлені графіки для безрозмірних прогинів  $\bar{w}$  і нормальних напружень  $\bar{\sigma}_{11}$  у центрі, на нижній поверхні пластини, залежно від безрозмірного навантаження  $\bar{q}$ . Суцільними лініями показано результати для пластини складної форми, а переривчастими – для квадратної пластини. Як і очікувалося, кутові вирізи роблять пластину більш жорсткою, зменшуючи рівень прогинів і напружень.

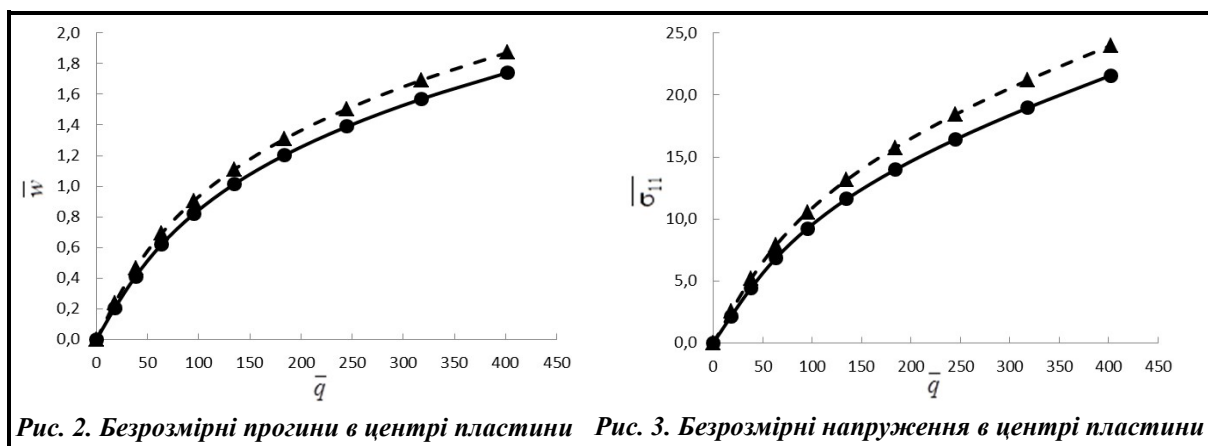


Рис. 2. Безрозмірні прогини в центрі пластини Рис. 3. Безрозмірні напруження в центрі пластини

### Висновки

У статті розроблено новий чисельно-аналітичний метод розв'язання геометрично нелінійних задач вигину тонких пологих оболонок і пластин складної форми в плані, який базується на методі R-функцій і методі продовження за параметром. Розв'язано, по-перше, тестову задачу, отримано збіг з аналітичним розв'язком і розв'язком методом скінченних елементів, по-друге, задачу вигину жорстко закріпленої пластини складної форми. Досліджено вплив геометричної форми на напружено-деформований стан.

## Література

1. Григоренко Я. М., Василенко А. Т. Методы расчета оболочек: в 5 т. Т. 4. Теория оболочек переменной жесткости. Киев: Наукова думка, 1981. 544 с.
2. Grigorenko Ya. M., Gulyaev V. I. Nonlinear problems of shell theory and their solution methods (review). *International Applied Mechanics*. 1991. Vol. 27. P. 929–947. <https://doi.org/10.1007/BF00887499>.
3. Рассказов А. О., Соколовская И. И., Шульга Н. А. Теория и расчет слоистых ортотропных пластин и оболочек. Киев: Высшая школа, 1986. 191 с.
4. Бате К., Вильсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. Москва: Книга по требованию, 2012. 445 с.
5. Sabir A. B., Djoudi M. S. Shallow shell finite element for the large deflection geometrically nonlinear analysis of shells and plates. *Thin-Walled Structures*. 1995. Vol. 21. Iss. 3. P. 253–267. [https://doi.org/10.1016/0263-8231\(94\)00005-K](https://doi.org/10.1016/0263-8231(94)00005-K).
6. Bucalem M. L., Bathe K. J. Finite element analysis of shell structures. *Archives of Computational Methods in Engineering*. 1997. Vol. 4. P. 3–61. <https://doi.org/10.1007/BF02818930>.
7. Рвачев В. Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. Киев: Наукова думка, 1982. 552 с.
8. Kurpa L. V., Lyubitskaya E. I., Morachkovskaya I. O. The R-function method used to solve nonlinear bending problems for orthotropic shallow shells on an elastic foundation. *International Applied Mechanics*. 2010. Vol. 46. P. 660–668. <https://doi.org/10.1007/s10778-010-0353-x>.
9. Smetankina N., Merkulova A., Merkulov D., Postnyi O. Dynamic response of laminate composite shells with complex shape under low-velocity impact. In: Nechyporuk M., Pavlikov V., Kritskiy D. (eds.) *Integrated Computer Technologies in Mechanical Engineering-2020. ICTM 2020. Lecture Notes in Networks and Systems*. Cham: Springer, 2021. Vol. 188. P. 267–276. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-66717-7\\_22](https://doi.org/10.1007/978-3-030-66717-7_22).
10. Вольмир А. С. Гибкие пластинки и оболочки. Москва: Гостеориздат, 1956. 420 с.
11. Григолюк Э. И., Шалашилин В. И. Метод продолжения по параметру в задачах нелинейного деформирования стержней, пластин и оболочек. *Исследования по теории пластин и оболочек*. 1984. Вып. 17. Ч. 1. С. 3–58.
12. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. Москва: Мир, 1987. 542 с.
13. Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырный П. И. Вычислительные методы. Москва: Наука, 1977. 399 с.
14. Urthaler Y., Reddy J. N. A mixed finite element for a nonlinear bending analysis of laminated composite plates based on FSDT. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2008. Vol. 15. P. 335–354. <https://doi.org/10.1080/15376490802045671>.
15. Levy S. Square plate with clamped edges under normal pressure producing large deflections. *Tech. Report, National Advisory Committee for Aeronautics*. 1942.

Надійшла до редакції 26.09.2022