

УДК 539.3

АНАЛІЗ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ШАРУ З ДВОМА ЦИЛІНДРИЧНИМИ ВРІЗАНИМИ ОПОРАМИ

В. Ю. Мірошніков, д-р техн. наук
v.miroshnikov@khai.edu
 ORCID: 0000-0002-9491-0181

О. Б. Савін, канд. техн. наук
asavin344@gmail.com
 ORCID: 0000-0002-2664-0255

М. М. Гребенніков
m.grebennikov@khai.edu
 ORCID: 0000-0001-7648-3027

В. Ф. Деменко, канд. техн. наук
v.demenko@khai.edu
 ORCID: 0000-0002-9555-4596

Національний аерокосмічний
 університет ім. М. Є. Жуковського
 «Харківський авіаційний
 інститут»,
 61070, Україна, Харків, вул. Чкалова, 17

Досліджується напружений стан однорідного ізотропного шару при дії просторового статичного зовнішнього навантаження. Дві кругові циліндричні опори врізані в тіло шару паралельно його межах. Опори та тіло шару жорстко спряжені між собою. Просторова задача теорії пружності розв'язується за допомогою аналітико-чисельного узагальненого методу Фур'є. Шар розглядається в декартовій системі координат, опори – у локальних циліндричних. На верхній та нижній поверхнях шару задані напруження. Опори розглядаються у вигляді циліндричних порожнин у шарі із заданими на їх поверхнях нульовими переміщеннями. Задовольняючи граничним умовам на верхній і нижній поверхнях шару, а також на циліндричних поверхнях порожнин, отримано системи нескінченних інтегро-алгебраїчних рівнянь, які в подальшому зведені до лінійних алгебраїчних. Нескінченна система розв'язується методом редукції. У чисельних дослідженнях проаналізовано параметри інтегрування коливних функцій, розв'язані задачі при різних відстанях між опорами. Одиничне навантаження у вигляді швидко спадаючої функції прикладено на верхній межі між опорами. Для цих випадків проведено аналіз напруженого стану на поверхнях шару між опорами та на циліндричних поверхнях, що контактують з опорами. Чисельний аналіз показав, що при збільшенні відстані між опорами зростають напруження σ_x на нижній та верхній поверхнях шару й напруження $\tau_{\rho\phi}$ на поверхнях порожнин. Використання аналітико-чисельного методу дало можливість отримати результат із точністю 10^4 для значень напружень від 0 до 1 при порядку системи рівнянь $m=6$. При збільшенні порядку системи точність виконання граничних умов зростатиме. Представлене аналітико-чисельне розв'язання може використовуватися для високоточного визначення напружено-деформованого стану представленої типу задач, а також як еталонне для задач, що базуються на чисельних методах.

Ключові слова: циліндричні порожнини в шарі, узагальнений метод Фур'є, рівняння Ламе.

Вступ

У машинобудуванні й аерокосмічній галузі доводиться стикатися з проектуванням деталей, кріплення яких одна до одної є циліндричним врізним. Розрахунок таких деталей відбувається, як правило, за допомогою методів опору матеріалів, будівельної механіки або методу скінчених елементів, тобто розрахункова схема або спрощується, або використовується наближений метод. Проте такі методи неефективні, коли необхідно мати точні значення напружено-деформованого стану [1].

Для підвищення точності результатів розрахунків використовують аналітичні або аналітико-чисельні методи. Так, у роботах [2–5] розв'язуються задачі для шару з перпендикулярними до його меж порожнинами. Проте для розв'язання задач статички просторових пружних тіл у вигляді шару з позовжніми порожнинами ці методи не можуть бути використані.

Крім того, у випадку з паралельними до меж шару циліндричними порожнинами в роботах [6–9] розглядаються стаціонарні задачі дифракції пружних хвиль, при розв'язанні яких використовується метод Фур'є в поєднанні з методом зображень. Однак цей підхід не дозволяє розв'язувати задачі з кількістю граничних поверхонь більшою трьох.

Для просторових моделей з великою кількістю граничних поверхонь і високою точністю визначення напруженого стану найбільш ефективним є аналітико-чисельний узагальнений метод Фур'є [10]. На основі цього методу розглянуті задачі для циліндра з циліндричними порожнинами або включеннями [11–14], для півпростору з порожниною [15], для шару з однією порожниною [16, 17], шару з декількома циліндричними порожнинами [18], шару з одним [19] або з двома включеннями [20]. У перелі-

чених роботах розглядаються задачі, граничні умови й алгоритми розв'язання яких не дозволяють застосовувати їх до задач для шару з циліндричними врізаними опорами.

Найбільш дотичними до теми, що розглядається, є роботи [21, 22], де розв'язуються задачі для шару з однією циліндричною порожниною [21] і для шару з циліндричною трубою [22]. Граничні умови в цих роботах дозволяють розглядати запропоновані моделі як шар з однією врізаною опорою. Однак врахування другої опори потребує додаткових умов.

Зважаючи на відсутність методу розрахунку задач для шару з врізаними циліндричними опорами при наявності подібних розрахункових схем на практиці, обрана тема є актуальною і потребує вивчення.

Для високоточного розв'язання задачі в роботі буде застосовано аналітико-чисельний узагальнений метод Фур'є.

Постановка задачі

Пружний однорідний шар має дві циліндричні порожнини, розташовані паралельно його межам. Радіуси порожнин R_p , де p – номер порожнини.

Порожнини розглядатимемо в локальних циліндричних системах координат (ρ_p, φ_p, z) , шар – у декартовій системі координат (x, y, z) . Межі шару розташовані на відстані $y=h$ та $y=-\tilde{h}$ (рис. 1).

Необхідно знайти розв'язок рівняння Ламе за умови, що на верхній межі шару задані напруження $F\vec{U}_0(x, z)|_{y=h} = \vec{F}_h^0(x, z)$, на нижній – напруження

$F\vec{U}(x, z)|_{y=-\tilde{h}} = \vec{F}_{\tilde{h}}^0(x, z)$, на поверхнях порожнин – переміщення $\vec{U}(\varphi_p, z)|_{\rho_p=R_p} = \vec{U}_p^0(\varphi_p, z)$, де \vec{U} – переміщення в шарі;

$F\vec{U} = 2 \cdot G \cdot \left[\frac{\sigma}{1-2 \cdot \sigma} \vec{n} \cdot \text{div} \vec{U} + \frac{\partial}{\partial n} \vec{U} + \frac{1}{2} (\vec{n} \times \text{rot} \vec{U}) \right]$ – оператор напруження;

$$\vec{F}_h^0(x, z) = \tau_{yx}^{(h)} \vec{e}_x + \sigma_y^{(h)} \vec{e}_y + \tau_{yz}^{(h)} \vec{e}_z;$$

$$\vec{F}_{\tilde{h}}^0(x, z) = \tau_{yx}^{(\tilde{h})} \vec{e}_x + \sigma_y^{(\tilde{h})} \vec{e}_y + \tau_{yz}^{(\tilde{h})} \vec{e}_z;$$

$$\vec{U}_p^0(\varphi_p, z) = U_{\rho}^{(p)} \vec{e}_{\rho} + U_{\varphi}^{(p)} \vec{e}_{\varphi} + U_z^{(p)} \vec{e}_z,$$

(1)

відомі функції, які будемо вважати швидко спадаючими від початку координат по осі z і x .

Метод розв'язання

Оберемо базисні розв'язки рівняння Ламе для декартових і циліндричних систем координат у вигляді [10]:

$$\vec{u}_k^{\pm}(x, y, z; \lambda, \mu) = N_k^{(d)} e^{i(\lambda z + \mu x) \pm \gamma y};$$

$$\vec{R}_{k,m}(\rho, \varphi, z; \lambda) = N_k^{(p)} I_m(\lambda \rho) e^{i(\lambda z + m\varphi)};$$

$$\vec{S}_{k,m}(\rho, \varphi, z; \lambda) = N_k^{(p)} \left[(\text{sign} \lambda)^m K_m(|\lambda| \rho) \cdot e^{i(\lambda z + m\varphi)} \right]; k = 1, 2, 3;$$

$$N_1^{(d)} = \frac{1}{\lambda} \nabla; N_2^{(d)} = \frac{4}{\lambda} (\sigma - 1) \vec{e}_2^{(1)} + \frac{1}{\lambda} \nabla(y \cdot); N_3^{(d)} = \frac{i}{\lambda} \text{rot}(\vec{e}_3^{(1)} \cdot); N_1^{(p)} = \frac{1}{\lambda} \nabla;$$

$$N_2^{(p)} = \frac{1}{\lambda} \left[\nabla \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + 4(\sigma - 1) \left(\nabla - \vec{e}_3^{(2)} \frac{\partial}{\partial z} \right) \right]; N_3^{(p)} = \frac{i}{\lambda} \text{rot}(\vec{e}_3^{(2)} \cdot); \gamma = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}, -\infty < \lambda, \mu < \infty,$$

де $I_m(x)$, $K_m(x)$ – модифіковані функції Бесселя; $\vec{R}_{k,m}$, $\vec{S}_{k,m}$ – внутрішні й зовнішні розв'язки рівняння Ламе для циліндру відповідно; $\vec{u}_k^{(-)}$, $\vec{u}_k^{(+)}$ – розв'язки рівняння Ламе для шару; σ – коефіцієнт Пуассона.

Розв'язання задачі представимо у вигляді [18]

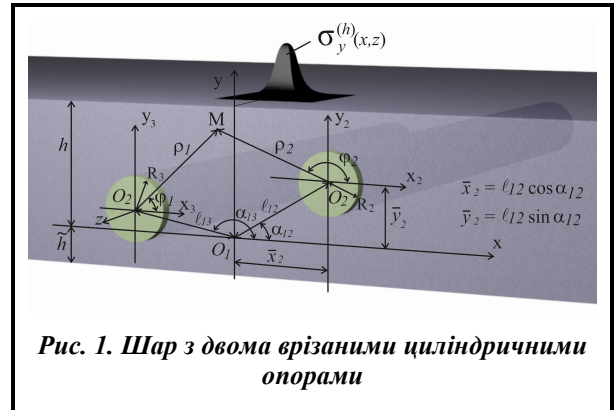


Рис. 1. Шар з двома врізаними циліндричними опорами

$$\begin{aligned} \bar{U}_0 = & \sum_{p=1}^2 \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_{k,m}^{(p)}(\lambda) \cdot \bar{S}_{k,m}(\rho_p, \varphi_p, z; \lambda) d\lambda + \\ & + \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (H_k(\lambda, \mu) \cdot \bar{u}_k^{(+)}(x, y, z; \lambda, \mu) + \tilde{H}_k(\lambda, \mu) \cdot \bar{u}_k^{(-)}(x, y, z; \lambda, \mu)) d\mu d\lambda, \end{aligned} \quad (3)$$

де $\bar{S}_{k,m}(\rho_p, \varphi_p, z; \lambda)$, $\bar{R}_{k,m}(\rho_p, \varphi_p, z; \lambda)$, $\bar{u}_k^{(+)}(x, y, z; \lambda, \mu)$ і $\bar{u}_k^{(-)}(x, y, z; \lambda, \mu)$ – базисні розв’язки, задані формулами (2), а невідомі функції $H_k(\lambda, \mu)$, $\tilde{H}_k(\lambda, \mu)$, $B_{k,m}^{(p)}(\lambda)$ необхідно знайти з граничних умов (1).

Для переходу між системами координат скористаємося формулами [10]:

– для переходу від розв’язків $\bar{S}_{k,m}$ циліндричної системи координат до розв’язків шару $\bar{u}_k^{(-)}$ (при $y > 0$) і $\bar{u}_k^{(+)}$ (при $y < 0$)

$$\begin{aligned} \bar{S}_{k,m}(\rho_p, \varphi_p, z; \lambda) = & \frac{(-i)^m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega_{\mp}^m \cdot e^{-i\mu\bar{x}_p \pm \gamma\bar{y}_p} \cdot \bar{u}_k^{(\mp)} \cdot \frac{d\mu}{\gamma}, \quad k = 1, 3; \\ \bar{S}_{2,m}(\rho_p, \varphi_p, z; \lambda) = & \frac{(-i)^m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega_{\mp}^m \cdot \left(\left(\pm m \cdot \mu - \frac{\lambda^2}{\gamma} \pm \lambda^2 \bar{y}_p \right) \bar{u}_1^{(\mp)} \mp \lambda^2 \bar{u}_2^{(\mp)} \pm \pm 4\mu(1-\sigma) \bar{u}_3^{(\mp)} \right) \cdot \frac{e^{-i\mu\bar{x}_p \pm \gamma\bar{y}_p} d\mu}{\gamma^2}, \end{aligned} \quad (4)$$

де $\gamma = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$, $\omega_{\mp}(\lambda, \mu) = \frac{\mu \mp \gamma}{\lambda}$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$;

– для переходу від розв’язків $\bar{u}_k^{(+)}$ і $\bar{u}_k^{(-)}$ шару до розв’язків $\bar{R}_{k,m}$ циліндричної системи координат

$$\begin{aligned} \bar{u}_k^{(\pm)}(x, y, z) = & e^{i\mu\bar{x}_p \pm \gamma\bar{y}_p} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} (i \cdot \omega_{\mp})^m \bar{R}_{k,m}, \quad (k = 1, 3); \\ \bar{u}_2^{(\pm)}(x, y, z) = & e^{i\mu\bar{x}_p \pm \gamma\bar{y}_p} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[(i \cdot \omega_{\mp})^m \cdot \lambda^{-2} \left((m \cdot \mu + \bar{y}_p \cdot \lambda^2) \cdot \bar{R}_{1,m} \pm \gamma \cdot \bar{R}_{2,m} + 4\mu(1-\sigma) \bar{R}_{3,m} \right) \right], \end{aligned} \quad (5)$$

де $\bar{R}_{k,m} = \tilde{b}_{k,m}(\rho_p, \lambda) \cdot e^{i(m\varphi_p + \lambda z)}$; $\tilde{b}_{1,n}(\rho, \lambda) = \bar{e}_{\rho} \cdot I_n'(\lambda\rho) + i \cdot I_n(\lambda\rho) \cdot \left(\bar{e}_{\varphi} \frac{n}{\lambda\rho} + \bar{e}_z \right)$;

$\tilde{b}_{2,n}(\rho, \lambda) = \bar{e}_{\rho} \cdot [(4\sigma - 3) \cdot I_n'(\lambda\rho) + \lambda\rho I_n''(\lambda\rho)] + \bar{e}_{\varphi} i \cdot m \left(I_n'(\lambda\rho) + \frac{4(\sigma - 1)}{\lambda\rho} I_n(\lambda\rho) \right) + \bar{e}_z i \lambda\rho I_n''(\lambda\rho)$;

$\tilde{b}_{3,n}(\rho, \lambda) = - \left[\bar{e}_{\rho} \cdot I_n(\lambda\rho) \frac{n}{\lambda\rho} + \bar{e}_{\varphi} \cdot i \cdot I_n'(\lambda\rho) \right]$; \bar{e}_{ρ} , \bar{e}_{φ} , \bar{e}_z – орти в циліндричній системі координат;

– для переходу від розв’язків циліндру з номером p до розв’язків циліндру з номером q

$$\begin{aligned} \bar{S}_{k,m}(\rho_p, \varphi_p, z; \lambda) = & \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{b}_{k,pq}^{mn}(\rho_q) \cdot e^{i(n\varphi_q + \lambda z)}, \quad k = 1, 2, 3; \\ \bar{b}_{1,pq}^{mn}(\rho_q) = & (-1)^n \tilde{K}_{m-n}(\lambda \ell_{pq}) \cdot e^{i(m-n)\alpha_{pq}} \cdot \tilde{b}_{1,n}(\rho_q, \lambda), \\ \bar{b}_{3,pq}^{mn}(\rho_q) = & (-1)^n \tilde{K}_{m-n}(\lambda \ell_{pq}) \cdot e^{i(m-n)\alpha_{pq}} \cdot \tilde{b}_{3,n}(\rho_q, \lambda); \end{aligned} \quad (6)$$

$$\bar{b}_{2,pq}^{mn}(\rho_q) = (-1)^n \left\{ \tilde{K}_{m-n}(\lambda \ell_{pq}) \cdot \tilde{b}_{2,n}(\rho_q, \lambda) - \frac{\lambda}{2} \ell_{pq} \cdot [\tilde{K}_{m-n+1}(\lambda \ell_{pq}) + \tilde{K}_{m-n-1}(\lambda \ell_{pq})] \cdot \tilde{b}_{1,n}(\rho_q, \lambda) \right\} \cdot e^{i(m-n)\alpha_{pq}},$$

де α_{pq} – кут між віссю x_p та відрізком ℓ_{pq} , $\tilde{K}_m(x) = (\text{sign}(x))^m \cdot K_m(|x|)$.

Для задоволення граничних умов на верхній та нижній межах шару знайдемо напруження для правої частини вектора (3). Отриманий вектор прирівнюємо при $y=h$ заданому $\bar{F}_h^0(x, z)$, а при $y=-\tilde{h}$ за-

даному $\bar{F}_h^0(x, z)$, представленими через подвійний інтеграл Фур'є. Базисні розв'язки $\bar{S}_{k,m}(\rho_p, \varphi_p, z; \lambda)$, за допомогою формул переходу (4), перепишемо у декартовій системі координат через базисні розв'язки $\bar{u}_k^{(-)}(x, y, z; \lambda, \mu)$ при $y=h$ і $\bar{u}_k^{(+)}(x, y, z; \lambda, \mu)$ при $y=\tilde{h}$. Таким чином, отримаємо три рівняння для верхньої межі шару (по одному на кожну проекцію) і три рівняння для нижньої межі шару з 12-ма невідомими $H_k(\lambda, \mu)$, $\tilde{H}_k(\lambda, \mu)$, $B_{k,m}^{(2)}(\lambda)$, $B_{k,m}^{(3)}(\lambda)$.

Із цієї системи рівнянь знайдемо $H_k(\lambda, \mu)$ і $\tilde{H}_k(\lambda, \mu)$ через $B_{k,m}^{(p)}(\lambda)$.

Для задоволення граничних умов на поверхні кожної порожнини p праву частину (3), за допомогою формул переходу (5) і (6), перепишемо в локальній циліндричній системі координат кожної порожнини p через базисні розв'язки $\bar{R}_{k,m}$, $\bar{S}_{k,m}$. Отриманий вектор, при $\rho_p=R_p$, прирівняємо заданим $\bar{U}_p^0(\varphi_p, z)$, представленим через подвійний інтеграл Фур'є. У результаті для кожного циліндра з номером p отримаємо по три нескінченні системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно $B_{k,m}^{(p)}(\lambda)$, які містять $H_k(\lambda, \mu)$ і $\tilde{H}_k(\lambda, \mu)$.

Таким чином, ми отримаємо 12 інтегро-алгебраїчних рівнянь з 12-ма невідомими $H_k(\lambda, \mu)$, $\tilde{H}_k(\lambda, \mu)$, $B_{k,m}^{(p)}(\lambda)$. Виключивши з цих рівнянь знайдені раніше $H_k(\lambda, \mu)$ і $\tilde{H}_k(\lambda, \mu)$ через $B_{k,m}^{(p)}(\lambda)$ та звільнившись від рядів по m і інтегралів по λ , отримаємо 12 нескінченних лінійних алгебраїчних рівнянь другого роду для визначення невідомих $B_{k,m}^{(p)}(\lambda)$.

До отриманих нескінченних систем рівнянь застосуємо метод редукції, завдяки чому знайдемо коефіцієнти $B_{k,m}^{(p)}(\lambda)$. Тепер $B_{k,m}^{(p)}(\lambda)$ підставимо у вираз для $H_k(\lambda, \mu)$ і $\tilde{H}_k(\lambda, \mu)$. Так будуть знайдені всі невідомі виразу (3).

Представлені у роботі чисельні розв'язання нескінченної системи методом редукції показали його збіжність, що з високою точністю задовольняє граничним умовам.

Чисельні дослідження напруженого стану

У пружному ізотропному шарі (рис. 1) розташовано дві циліндричні порожнини. Коефіцієнт Пуассона шару (ABS пластик) $\sigma_0=0,38$, модуль пружності $E_0=1700$ Н/мм². Геометричні параметри моделі: $R_2=R_3=5$ мм, $h=12$ мм, $\tilde{h}=12$ мм, $\alpha_{12}=0$, $\alpha_{13}=\pi$. Відстань до порожнин приймемо у двох варіантах $L_{12}=L_{13}=15$ мм і $L_{12}=L_{13}=30$ мм.

На верхній межі шару задані нормальні напруження у вигляді одиничної хвилі $\sigma_y^{(h)}(x, z)=-10^8 \cdot (z^2+10^2)^{-2} \cdot (x^2+10^2)^{-2}$ і нульові дотичні напруження $\tau_{yx}^{(h)}=\tau_{yz}^{(h)}=0$, на нижній межі шару

задані напруження $\sigma_y^{(\tilde{h})}(x, z)=\tau_{yx}^{(\tilde{h})}(x, z)=\tau_{yz}^{(\tilde{h})}(x, z)=0$.

Нескінченна система була зрізана по параметру $m=6$ (кількість членів ряду Фур'є і порядок системи рівнянь).

Обчислення інтегралів виконано квадратурними формулами Філона. Точність виконання граничних умов при зазначених m і заданих геометричних параметрах не менше ніж 10^{-4} при значеннях від 0 до 1. Це відповідає роботі [16], в якій проведений ґрунтовний аналіз збіжності розв'язків відносно різних значень m для шару з порожнинами.

На рис. 2 надано графік заданих напружень σ_y і відповідних їм напружень σ_x на верхній та нижній поверхнях шару при $z=0$.

При збільшенні відстані між опорами напруження σ_x на верхній і нижній поверхнях шару зростають. При $L_{12}=L_{13}=30$ мм максимальні напруження σ_x на верхній

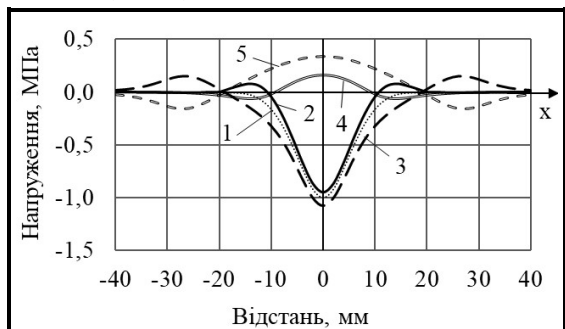


Рис. 2. Напруження на верхній і нижній поверхнях шару:

- 1 – задані σ_y ;
- 2 – σ_x на верхній межі при $L_{12}=L_{13}=15$ мм;
- 3 – σ_x на верхній межі при $L_{12}=L_{13}=30$ мм;
- 4 – σ_x на нижній межі при $L_{12}=L_{13}=15$ мм;
- 5 – σ_x на нижній межі при $L_{12}=L_{13}=30$ мм

поверхні шару перевищують задані (рис. 2, лінія 3). Також при $L_{12}=L_{13}=30$ мм спостерігається значне зростання напружень σ_x на верхній та нижній поверхнях шару біля опор.

На рис. 3 зображено напруження σ_p на поверхні опори, розташованої праворуч ($p=2$) при $z=0$.

При збільшенні відстані між опорами максимальні напруження σ_p на поверхнях циліндрів зменшуються (рис. 3), зміщуючись до горизонтальної осі в бік навантаження.

Графіки напружень σ_p на поверхні опори, розташованої ліворуч ($p=3$), симетричні рис. 3 відносно вертикальної осі ($\pi/2$).

Графіки напружень σ_p і σ_z між собою майже співпадають і мають такий самий вигляд, як напруження σ_p , тільки з меншими значеннями. Так, напруження $\sigma_{p, \max} = -0,08794$ МПа (при $\varphi=2,74889$, $L_{12}=L_{13}=30$ мм), $\sigma_{p, \max} = -0,26128$ МПа (при $\varphi=2,356$, $L_{12}=L_{13}=15$ мм), $\sigma_{z, \max} = -0,0886$ МПа (при $\varphi=2,74889$, $L_{12}=L_{13}=30$ мм), $\sigma_{z, \max} = -0,26548$ МПа (при $\varphi=2,356$, $L_{12}=L_{13}=15$ мм).

На рис. 4 зображено напруження $\tau_{p\varphi}$ на поверхні опори, розташованої праворуч ($p=2$) при $z=0$.

При збільшенні відстані між опорами напруження $\tau_{p\varphi}$ на поверхнях циліндрів збільшуються (рис. 4).

Графіки напружень $\tau_{p\varphi}$ на поверхні опори, розташованої ліворуч ($p=3$), симетричні рис. 4 відносно вертикальної осі ($\pi/2$) та з іншим знаком.

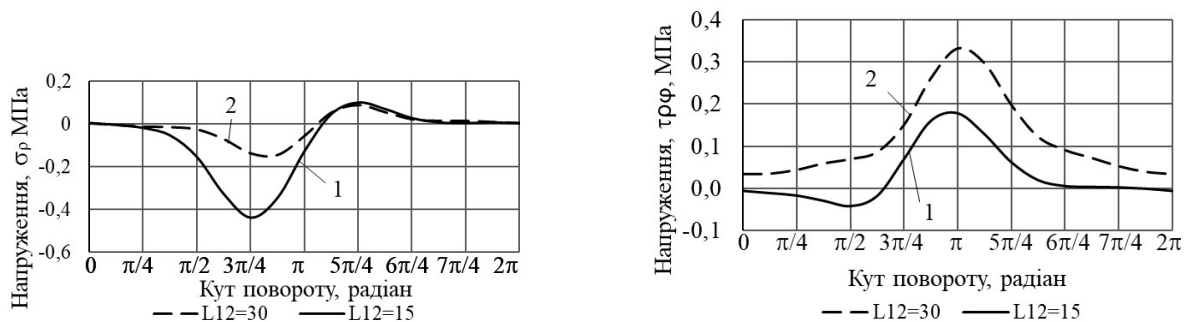


Рис. 3. Напруження σ_p на поверхні порожнини $p=2$

Рис. 4. Напруження $\tau_{p\varphi}$ на поверхні порожнини $p=2$

Висновки

Запропоновано аналітико-чисельний метод розв'язання просторової задачі теорії пружності для шару, який жорстко з'єднаний з двома круговими циліндричними врізаними в нього опорами. Задачу зведено до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь, що допускає застосування до неї методу редукції. Чисельні дослідження дають підстави стверджувати, що її розв'язання може бути з будь-якою точністю знайдено запропонованим методом, що підтверджується високою точністю виконання граничних умов.

Представлений порівняльний аналіз показує, що в наведеній моделі при збільшенні відстані між опорами зростають напруження σ_x на нижній та верхній поверхнях шару, а також напруження $\tau_{p\varphi}$ на поверхнях порожнин.

Запропонований метод розв'язання дозволяє отримати напружено-деформований стан для шару лише з двома поздовжніми круговими циліндричними опорами. Для подальшого розвитку цього методу можна збільшити кількість опор і додати циліндричні неоднорідності між опорами.

Література

1. Азаров А. Д., Журавлев Г. А., Пискунов А. С. Сравнительный анализ аналитического и численного методов решения плоской задачи о контакте упругих цилиндров. *Инновационная наука*. 2015. № 1–2. С. 5–13.
2. Гузь А. Н., Космодамианский А. С., Шевченко В. П., Немиш Ю. Н., Авдюшина Е. В. *Механика композитов*: в 12 т. Т. 7. Концентрация напряжений. Киев: Наукова думка, 1998. 387 с.
3. Vaysfel'd N., Popov G., Reut V. The axisymmetric contact interaction of an infinite elastic plate with an absolutely rigid inclusion. *Acta Mechanica*. 2015. Vol. 226. Iss. 3. P. 797–810. <https://doi.org/10.1007/s00707-014-1229-7>.
4. Попов Г. Я., Вайсфельд Н. Д. Осесимметричная задача теории упругости для бесконечной плиты с цилиндрическим включением при учете ее удельного веса. *Прикладная механика*. 2014. Т. 50. № 6. С. 27–38.
5. Bobyleva T. Approximate method of calculating stresses in layered array. *Procedia Engineering*. 2016. Vol. 153. P. 103–106. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2016.08.087>.

6. Гузь А. Н., Кубенко В. Д., Черевко М. А. Дифракция упругих волн. Киев: Наукова думка, 1978. 307 с.
7. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наукова думка, 1981. 284 с.
8. Волчков В. В., Вуколов Д. С., Сторожев В. И. Дифракция волн сдвига на внутренних туннельных цилиндрических неоднородностях в виде полости и включения в упругом слое со свободными гранями. *Механика твердого тела*. 2016. Вып. 46. С. 119–133.
9. Grinchenko V. T., Ulitko A. F. An exact solution of the problem of stress distribution close to a circular hole in an elastic layer. *Soviet Applied Mechanics*. 1968. Vol. 4. Iss. 10. P. 31–37. <https://doi.org/10.1007/BF00886618>.
10. Николаев А. Г., Проценко В. С. Обобщенный метод Фурье в пространственных задачах теории упругости. Харьков: Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», 2011. 344 с.
11. Nikolaev A. G., Tanchik E. A. The first boundary-value problem of the elasticity theory for a cylinder with N cylindrical cavities. *Numerical Analysis and Applications*. 2015. Vol. 8. Iss. 2. P. 148–158. <https://doi.org/10.1134/S1995423915020068>.
12. Nikolaev A. G., Tanchik E. A. Stresses in an infinite circular cylinder with four cylindrical cavities. *Journal of Mathematical Sciences*. 2016. Vol. 217. Iss. 3. P. 299–311. <https://doi.org/10.1007/s10958-016-2974-z>.
13. Nikolaev A. G., Tanchik E. A. Model of the stress state of a unidirectional composite with cylindrical fibers forming a tetragonal structure. *Mechanics of Composite Materials*. 2016. Vol. 52. Iss. 2. P. 177–188. <https://doi.org/10.1007/s11029-016-9571-6>.
14. Nikolaev A. G., Tanchik E. A. Stresses in an elastic cylinder with cylindrical cavities forming a hexagonal structure. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2016. Vol. 57. Iss. 6. P. 1141–1149. <https://doi.org/10.1134/S0021894416060237>.
15. Николаев А. Г., Орлов Е. М. Решение первой осесимметричной термоупругой краевой задачи для трансверсально-изотропного полупространства со сфероидальной полостью. *Проблемы вычислительной механики и прочности конструкций*. 2012. Вып. 20. С. 253–259.
16. Miroschnikov V. Yu. Stress state of an elastic layer with a cylindrical cavity on a rigid foundation. *International Applied Mechanics*. 2020. Vol. 56. Iss. 3. P. 372–381. <https://doi.org/10.1007/s10778-020-01021-x>.
17. Мірошніков В. Ю., Денисова Т. В., Проценко В. С. Дослідження першої основної задачі теорії пружності для шару з циліндричною порожниною. *Опір матеріалів і теорія споруд*. 2019. № 103. С. 208–218. <https://doi.org/10.32347/2410-2547.2019.103.208-218>.
18. Miroschnikov V. Yu., Protsenko V. S. Determining the stress state of a layer on a rigid base weakened by several longitudinal cylindrical cavities. *Journal of Advanced Research in Technical Science*. 2019. Iss. 17. P. 11–21. <https://doi.org/10.26160/2474-5901-2019-17-11-21>.
19. Miroschnikov V. Yu., Medvedeva A. V., & Oleshkevich S. V. Determination of the stress state of the layer with a cylindrical elastic inclusion. *Materials Science Forum*. 2019. Vol. 968. P. 413–420. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/MSF.968.413>.
20. Miroschnikov V. Yu., Savin O. B., Hrebennikov M. M., Pohrebniak O.A. Analysis of the stress state of a layer with two cylindrical elastic inclusions and mixed boundary conditions. *Journal of Mechanical Engineering – Problemy mashynobuduvannya*. 2022. Vol. 25. No. 2. P. 22–29. <https://doi.org/10.15407/pmach2022.02.022>.
21. Гребенніков М. М., Миронов К. В. Аналіз напруженого стану шару з поздовжньою порожниною та заданими невласно мішаними граничними умовами. *Наука, теорія і практика: тези доповідей ХХІХ Міжнародної науково-практичної конференції*. Японія, Токіо, 2021. С. 536–540.
22. Miroschnikov V. Rotation of the layer with the cylindrical pipe around the rigid cylinder. In: *Advances in Mechanical and Power Engineering*. CAMPE 2021. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Cham: Springer. P. 314–322. https://doi.org/10.1007/978-3-031-18487-1_32.

Надійшла до редакції 23.02.2023