

УДК 539.3

ЗГИН ПЛАСТИН СКЛАДНОЇ ФОРМИ ІЗ МАТЕРІАЛІВ, ЩО НЕОДНАКОВО ОПИРАЮТЬСЯ РОЗТЯГУ І СТИСКУ

С. М. Склепус,

д-р техн. наук

snsklepus@ukr.net

ORCID: 0000-0002-4119-4310

Інститут проблем
машинобудування
ім. А. М. Підгорного
НАН України,
61046, Україна, м. Харків,
вул. Пожарського, 2/10

У статті розроблено новий чисельно-аналітичний метод розв'язання фізично нелінійних задач згину тонких пластин складної форми із матеріалів, що неоднаково опираються розтягу і стиску. Для постановки й лінеаризації задачі фізично нелінійного згину використовувався метод неперервного продовження за параметром. Для лінеаризованої задачі побудовано функціонал у формі Лагранжа, заданий на кінематично можливих швидкостях переміщень. Основні невідомі задачі (переміщення, деформації, напруження) знаходилися із розв'язку початкової задачі, яка розв'язувалася методом Рунге-Кутта-Мерсона з автоматичним вибором кроку, за параметром, пов'язаним із навантаженням. Початкові умови знаходилися із розв'язку задачі лінійно-пружного деформування. Праві частини диференціальних рівнянь при фіксованих значеннях параметра навантаження, що відповідають схемі Рунге-Кутта-Мерсона, знаходилися із розв'язку варіаційної задачі для функціонала у формі Лагранжа. Варіаційні задачі розв'язувалися методом Рітца в поєднанні з методом R-функцій, який дозволяє подати наближений розв'язок у вигляді формули – структури розв'язку, яка точно задовольняє граничним умовам і є інваріантною стосовно форми області, де відшукується наближений розв'язок. Розв'язано тестову задачу для нелінійно-пружного згину квадратної шарнірно опертої пластини. Отримано задовільний збіг із тривимірним розв'язком. Розв'язано задачу згину пластини складної форми з комбінованими умовами закріплення. Досліджено вплив геометричної форми й умов закріплення на напружено-деформований стан. Показано, що неврахування різної поведінки матеріалу за розтягу і стиску може призвести до суттєвих похибок у розрахунках параметрів напружено-деформованого стану.

Ключові слова: тонка пластина, фізично нелінійний згин, складна форма, метод R-функцій.

Вступ

Експериментальні дослідження механічних властивостей багатьох матеріалів (сірий чавун, легкі сплави, полімери, композити та ін.) свідчать про їх неоднакову опірність розтягу і стиску за межами лінійної пружності [1–4]. Діаграми деформування таких матеріалів є нелінійними і містять малу початкову лінійну ділянку, на якій модулі Юнга при розтягу і стиску приблизно співпадають. При більшому навантаженні проявляється нелінійний характер деформування, за якого діаграми деформування при розтягу і стиску суттєво відрізняються. Неоднакова опірність матеріалів розтягу і стиску є одним із проявів явища залежності деформаційних характеристик матеріалу від виду навантаження, що вперше було систематизовано й детально проаналізовано в роботі [4]. Теорії і методи розрахунку напружено-деформованого стану пластин у фізично нелінійній постановці широко представлені в літературі й продовжують розвиватися. Достатньо повний огляд сучасного стану проблеми розв'язання фізично нелінійних задач теорії пластин і оболонок із матеріалів із характеристиками, що залежать від виду навантаження, представлений в [4, 5]. Найчастіше в дослідженнях розглядають пластини й оболонки канонічної геометричної форми. Так, у роботах [6–9] було вперше досліджено нелінійно-пружне і пружно-пластичне деформування прямокутних пластин, товстостінних циліндрів, циліндричних і конічних оболонок із матеріалів, що неоднаково опираються розтягу і стиску. У цьому випадку для розв'язання фізично нелінійних задач використовувалися методи дискретної ортогоналізації С.К. Годунова, неперервного продовження за параметром, ітераційні методи і метод Рунге-Кутта-Мерсона для інтегрування початкових задач.

Аналіз наявної літератури показав, що в даний час відсутні роботи, присвячені вивченню фізично нелінійного деформування пластин складної форми із матеріалів, що неоднаково опираються розтягу і стиску.

У випадку пластин складної геометричної форми виникає необхідність застосування універсальних методів розрахунку, таких як метод скінченних елементів [10], метод R-функцій [11, 12], метод «занурення» [13] та ін.

Метою роботи є розробка чисельно-аналітичного методу розв'язання задач фізично нелінійного згину тонких пластин складної форми із матеріалів, які неоднаково опираються розтягу і стиску, що базується на використанні методу R-функцій.

Постановка задачі. Метод розв'язання

Розглянемо в прямокутній декартовій системі координат $O x_1 x_2 z$ ізотропну тонку пластину товщиною h з довільною формою Ω . Пластина знаходиться під дією поперечного навантаження інтенсивністю $q=q(x_1, x_2)$.

Прийmemo, що компоненти ε_{kl} тензора деформацій складаються з «лінійних» e_{kl} , які підпорядковуються закону Гука, і «нелінійних» η_{kl} (пружних або пластичних) складових, тобто

$$\varepsilon_{kl} = e_{kl} + \eta_{kl}. \tag{1}$$

Вважаємо справедливими гіпотези Кірхгофа. Тоді деформації в пластині з переміщеннями пов'язані співвідношеннями

$$\varepsilon_{11} = u_{1,1} - zw_{,11}, \quad \varepsilon_{22} = u_{2,2} - zw_{,22}, \quad \gamma_{12} = 2\varepsilon_{12} = u_{1,2} + u_{2,1} - 2zw_{,12}, \quad \varepsilon_{i3} = 0, \quad (i = 1, 2, 3), \tag{2}$$

де $u_1(x_1, x_2)$, $u_2(x_1, x_2)$, $w(x_1, x_2)$ – переміщення точок координатної поверхні вдовж осей Ox_1 , Ox_2 , Oz відповідно.

Напруження й «лінійні» деформації e_{kl} пов'язані між собою законом Гука

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1-\nu^2}(e_{11} + \nu e_{22}), \quad \sigma_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}(e_{22} + \nu e_{11}), \quad \sigma_{12} = 2Ge_{12}, \tag{3}$$

де E, ν – модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона матеріалу пластини; $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ – модуль зсуву.

Для постановки й лінеаризації задачі фізично нелінійного згину пластин застосуємо метод неперервного продовження розв'язку за параметром [14]. Введемо до розгляду параметр $t \in [t_0, t_*]$, пов'язаний із зовнішнім навантаженням. Початкове значення $t=t_0$ задається таким чином, щоб воно забезпечувало деформування матеріалу пластини в межах лінійної пружності, а t_* відповідає заданому рівню навантаженості $q(t_*)=q^*$.

Позначимо крапкою над символом похідну за параметром t . Далі, по тексту статті, похідні за параметром t називатимемо швидкостями.

Для варіаційної постановки задачі використовуватимемо функціонал у формі Лагранжа, заданий на кінематично можливих швидкостях переміщень, який для тривимірного тіла має вигляд [15]

$$L(\dot{v}_i) = 0,5 \iiint_V \dot{\sigma}_{kl} \dot{e}_{kl} dV - \iint_{S_p} \dot{P}_i \dot{v}_i dS. \tag{4}$$

У нашому випадку функціонал (4) запишеться наступною формулою

$$L(\dot{u}_1, \dot{u}_2, \dot{w}) = 0,5 \iint_{\Omega(h)} (\dot{\sigma}_{11}(\dot{\varepsilon}_{11} - \dot{\eta}_{11}) + \dot{\sigma}_{22}(\dot{\varepsilon}_{22} - \dot{\eta}_{22}) + \dot{\sigma}_{12}(\dot{\gamma}_{12} - 2\dot{\eta}_{12})) dx_1 dx_2 dz - \iint_{\Omega} \dot{q} \dot{w} dx_1 dx_2, \tag{5}$$

де швидкості «нелінійних» складових $\dot{\eta}_{11}, \dot{\eta}_{22}, \dot{\eta}_{12}$ вважаються заданими для кожного фіксованого значення параметра t і не варіюються.

Продиференціювавши співвідношення (1)–(3) за параметром t і підставивши у (5), отримаємо функціонал у формі Лагранжа для задачі згину тонкої пластини

$$\begin{aligned} L = 0,5 \iint_{\Omega} [& A_1(\dot{u}_{1,1}^2 + \dot{u}_{2,2}^2) + A_2 \dot{u}_{1,1} \dot{u}_{2,2} + A_3(\dot{u}_{1,2} + \dot{u}_{2,1})^2 - 2B_1(\dot{u}_{1,1} \dot{w}_{,11} + \dot{u}_{2,2} \dot{w}_{,22}) - 2B_2(\dot{u}_{1,1} \dot{w}_{,22} + \dot{u}_{2,2} \dot{w}_{,11}) - 2B_3 \dot{w}_{,12}(\dot{u}_{1,2} + \dot{u}_{2,1}) \\ & + D_1(\dot{w}_{,11}^2 + \dot{w}_{,22}^2) + 2D_2 \dot{w}_{,11} \dot{w}_{,22} + D_3 \dot{w}_{,12}^2] dx_1 dx_2 - \iint_{\Omega} (\dot{N}_{11}^f \dot{u}_{1,1} + \dot{N}_{22}^f \dot{u}_{2,2} + \dot{N}_{12}^f(\dot{u}_{1,2} + \dot{u}_{2,1})) dx_1 dx_2 + \\ & + \iint_{\Omega} (\dot{M}_{11}^f \dot{w}_{,11} + \dot{M}_{22}^f \dot{w}_{,22} + 2\dot{M}_{12}^f \dot{w}_{,12}) dx_1 dx_2 - \iint_{\Omega} \dot{q} \dot{w} dx_1 dx_2, \end{aligned} \tag{6}$$

де

$$A_1 = \int_{(h)} \frac{E}{1-\nu^2} dz, \quad A_2 = \nu A_1, \quad A_3 = \int_{(h)} G dz, \quad B_1 = \int_{(h)} \frac{Ez}{1-\nu^2} dz, \quad B_2 = \nu B_1, \quad B_3 = 2 \int_{(h)} Gz dz,$$

$$D_1 = \int_{(h)} \frac{Ez^2}{1-\nu^2} dz, \quad D_2 = \nu D_1, \quad D_3 = 4 \int_{(h)} Gz^2 dz; \quad (7)$$

$$\dot{N}_{11}^f = \int_{(h)} \frac{E}{1-\nu^2} (\dot{\eta}_{11} + \nu \dot{\eta}_{22}) dz, \quad \dot{N}_{22}^f = \int_{(h)} \frac{E}{1-\nu^2} (\dot{\eta}_{22} + \nu \dot{\eta}_{11}) dz, \quad \dot{N}_{12}^f = 2 \int_{(h)} G \dot{\eta}_{12} dz,$$

$$\dot{M}_{11}^f = \int_{(h)} \frac{Ez}{1-\nu^2} (\dot{\eta}_{11} + \nu \dot{\eta}_{22}) dz, \quad \dot{M}_{22}^f = \int_{(h)} \frac{Ez}{1-\nu^2} (\dot{\eta}_{22} + \nu \dot{\eta}_{11}) dz, \quad \dot{M}_{12}^f = 2 \int_{(h)} G \dot{\eta}_{12} z dz. \quad (8)$$

За формулами (7), (8) обчислюються параметри жорсткості пластини й «фіктивні» сили, зумовлені нелінійними складовими.

Розв'язок варіаційного рівняння $\delta L=0$ дає розподіл полів швидкостей переміщень, для фіксованих значень параметра $t > t_0$, у будь-якій точці пластини. Основні невідомі задачі нелінійного вигину пластини можуть бути знайдені шляхом інтегрування відповідних полів швидкостей із розв'язання задачі Коші за параметром навантаження для системи диференціальних рівнянь

$$\frac{du_1}{dt} = \dot{u}_1, \quad \frac{du_2}{dt} = \dot{u}_2, \quad \frac{dw}{dt} = \dot{w},$$

$$\frac{d\varepsilon_{11}}{dt} = \dot{u}_{1,1} - z\dot{w}_{,11}, \quad \frac{d\varepsilon_{22}}{dt} = \dot{u}_{2,2} - z\dot{w}_{,22}, \quad \frac{d\gamma_{12}}{dt} = \dot{u}_{1,2} + \dot{u}_{2,1} - 2z\dot{w}_{,12},$$

$$\frac{d\sigma_{11}}{dt} = \frac{E}{1-\nu^2} (\dot{u}_{1,1} + \nu \dot{u}_{2,2} - z(\dot{w}_{,11} + \nu \dot{w}_{,22})) - (\dot{\eta}_{11} + \nu \dot{\eta}_{22}),$$

$$\frac{d\sigma_{22}}{dt} = \frac{E}{1-\nu^2} (\dot{u}_{2,2} + \nu \dot{u}_{1,1} - z(\dot{w}_{,22} + \nu \dot{w}_{,11})) - (\dot{\eta}_{22} + \nu \dot{\eta}_{11}),$$

$$\frac{d\sigma_{12}}{dt} = G(\dot{u}_{1,2} + \dot{u}_{2,1} - 2z\dot{w}_{,12} - 2\dot{\eta}_{12}),$$

$$\frac{d\eta_{11}}{dt} = \dot{\eta}_{11}, \quad \frac{d\eta_{22}}{dt} = \dot{\eta}_{22}, \quad \frac{d\eta_{12}}{dt} = \dot{\eta}_{12}. \quad (9)$$

Нелінійність системи (9) зумовлена нелінійністю визначальних співвідношень для $\dot{\eta}_{kl}$ ($k, l=1,2$), які будуть конкретизовані нижче. Початкові умови для шуканих функцій знаходяться із розв'язку задачі лінійного деформування при $q(t_0)=q_0$. Для цього можна використати функціонал виду (6), в якому швидкості функцій необхідно замінити самими функціями і прийняти, що «фіктивні» сили $\dot{N}_{kl}^f = 0$, $\dot{M}_{kl}^f = 0$ ($k, l=1, 2$).

Початкову задачу для системи рівнянь (9) розв'язуватимемо методом Рунге-Кутта-Мерсона (РКМ) з автоматичним вибором кроку [16]. Для обчислення правих частин рівнянь (9) при фіксованих значеннях $t > t_0$, що відповідають схемі РКМ, необхідно п'ять разів розв'язувати варіаційні задачі для функціонала (6) на кожному кроці. Варіаційні задачі розв'язувалися методом Рітца у поєднанні із методом R-функцій [11].

Числові результати

Як тестовий приклад розглянемо нелінійно-пружний згин квадратної ($2a \times 2a$) шарнірно закріпленої пластини із сірого чавуну СЧ 15-32. Геометричні розміри є такими: $a=0,05$ м, товщина $h=0,01$ м.

Для сірого чавуну експериментально встановлена рівність модулів пружності за розтягу і стиску на початкових лінійних ділянках діаграм деформування. При цьому, за межами лінійної пружності, діаграми суттєво відрізняються й залежать від виду навантаження [1].

Модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона матеріалу: $E=1,07 \times 10^5$ МПа, $\nu=0,22$. Границя міцності за розтягу $\sigma_B=150$ МПа. Відмітимо, що в умовах тиску границя міцності для чавунів вища, ніж при розтягу приблизно у 2,5–4,5 рази [17].

Пластина знаходиться під дією поперечного навантаження

$$q(x_1, x_2) = q_0 \cos \frac{\pi x_1}{2a} \cos \frac{\pi x_2}{2a},$$

де $q_0=8,0$ МПа.

Для амплітуди зовнішнього навантаження прийемо лінійний закон

$$q_0(t) = q_{01} + tq_{02}, \quad (10)$$

де $t \in [0, t_*]$.

Для опису нелінійної поведінки матеріалу скористаємося тензорно-лінійними визначальними співвідношеннями, що описують залежність характеристик матеріалу від виду навантаження [18]

$$\dot{\eta}_{ij} = \nu(\sigma_e) \dot{\sigma}_e \left(\frac{C\sigma_{ij} + AI_1\delta_{ij}}{\sigma_e^2} + B\delta_{ij} \right). \quad (11)$$

Тут $\sigma_e = \sigma_{e2} + \sigma_{e1}$ – еквівалентне напруження; $\sigma_{e1} = BI_1$, $\sigma_{e2}^2 = AI_1^2 + CI_2$; $I_1 = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) = \delta_{ij}\sigma_{ij}$, $I_2 = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}^2) = \sigma_{ij}\sigma_{ij}$ ($i, j=1, 2, 3$) – лінійний і квадратичний інваріанти тензора напружень; A, B, C – параметри матеріалу, які визначаються з експериментальних даних.

Найпростішою апроксимацією для функції $\nu(\sigma_e)$ в (11) може бути ступенева залежність [18]

$$\nu(\sigma_e) = n\sigma_e^{n-1}.$$

Параметри A, B, C, n для матеріалу СЧ 15-32 знайдено з даних базових експериментів на розтяг, стиск і кручення, які наведено у [5] (Ч. 1):

$$A = -1,024 \cdot 10^{-5} \text{ МПа}^{\frac{2n}{n+1}}, \quad B = 1,148 \cdot 10^{-3} \text{ МПа}^{\frac{n}{n+1}}, \quad C = 2,891 \cdot 10^{-5} \text{ МПа}^{\frac{2n}{n+1}}, \quad n=4,4.$$

Якщо досліджується пружно-пластичне деформування, то співвідношення (11) повинні доповнюватися умовою пластичності [4, 5, 18].

Кінематичні граничні умови для шарнірного закріплення мають вигляд

$$\dot{w} = 0, \quad \dot{u}_\tau = 0, \quad (12)$$

де $\dot{u}_\tau = \dot{u}_2 n_1 - \dot{u}_1 n_2$; n_1, n_2 – напрямні косинуси зовнішньої нормалі n до контуру пластини $\partial\Omega$.

Структура розв'язку, що задовольняє умови (12), може бути записана так:

$$\dot{w} = \omega\Phi_1, \quad \dot{u}_1 = \omega_1\Phi_2 + \omega\Phi_3, \quad \dot{u}_2 = \omega_1\Phi_2 + \omega\Phi_4,$$

де $\Phi_i, i=1, \dots, 4$ – невизначені компоненти структури розв'язку; функція $\omega = \omega(x_1, x_2)$ будується за допомогою теорії R-функцій і задовольняє умови [11]: $\omega=0$, $\omega_{,n}=-1$ на межі $\partial\Omega$, $\omega>0$ всередині Ω . Вимога нормалізованості функції ω до першого порядку ($\omega_{,n}=-1$) у деяких випадках не є обов'язковою.

Для квадратної пластини функція ω має вигляд

$$\omega = \omega_1 \wedge_0 \omega_2,$$

де $\omega_1 = \frac{1}{2a}(a^2 - x_2^2)$, $\omega_2 = \frac{1}{2a}(a^2 - x_1^2)$, а символ \wedge_0 позначає R-кон'юнкцію [7]:

$$f_1 \wedge_0 f_2 = f_1 + f_2 - \sqrt{f_1^2 + f_2^2}.$$

При чисельній реалізації невизначені компоненти структури розв'язку подавали у вигляді скінченних рядів $\Phi_i(x_1, x_2, t) = \sum_n C_n^{(i)}(t) f_n^{(i)}(x_1, x_2)$, де $C_n^{(i)}(t)$ – невизначені коефіцієнти, які на кожному кроці знаходимо методом Рітца; t – фіксоване значення параметра навантаження; $\{f_n^{(i)}\}$ – системи лінійно незалежних функцій. Як $\{f_n^{(i)}\}$ використовували степеневі поліноми виду $x_1^k x_2^l$. Швидкості екви-

валентних напружень σ_e у визначальних співвідношеннях, на кожному кроці по t , приймалися сталими і обчислювалися за значеннями напружень та швидкостей напружень на попередньому кроці.

У табл. 1–3 зіставлені результати розрахунку прогинів і нормальних напружень, отримані у тривимірній постановці (3D) [7] і за допомогою методу R-функцій (RFM). Просторовий розв’язок отримано шляхом розкладання невідомих функцій у тригонометричні ряди Фур’є. Лінеаризація виконувалася шляхом руху по навантаженню в поєднанні з ітераційним уточненням розв’язку. У табл. 1, 2 наведено дані для прогинів і напружень на нижній поверхні пластини ($z=h/2$) в перерізі $x_2=0$, а в табл. 3 – розподіл напружень по товщині в центрі пластини.

Таблиця 1. Прогини $w \cdot 10^4, м$			Таблиця 2. Нормальні напруження $\sigma_{11}, МПа$			Таблиця 3. Нормальні напруження $\sigma_{11}, МПа$ в центрі пластини		
x_1/a	3D	RFM	x_1/a	3D	RFM	$2z/h$	3D	RFM
0,0	2,60	2,48	0,0	107,0	92,2	-1,0	-168,0	-164,9
0,2	2,47	2,35	0,2	104,0	91,0	-0,5	-77,8	-76,9
0,4	2,09	1,99	0,4	93,7	86,6	0,0	10,7	11,6
0,6	1,51	1,43	0,6	75,7	71,7	0,5	77,5	78,5
0,8	0,79	0,75	0,8	43,3	43,4	1,0	107,0	92,2

Із табл. 3 видно, що вплив різної поведінки матеріалу при розтягу і стиску проявляється у значній відмінності абсолютних значень напружень в розтягнутій і стиснутій зонах. При цьому в пластині з’являються мембранні напруження, а нейтральна поверхня зміщується у бік стиснених волокон.

Із наведених вище результатів можна зробити висновок, що метод, запропонований у статті, забезпечує задовільний збіг із результатами тривимірного розв’язку. Максимальна відносна похибка для прогинів дорівнює 5,3%, а для напружень – 13,8%.

Далі розглянемо квадратну шарнірно закріплену пластину і пластину складної форми із матеріалу СЧ 15-32 під дією рівномірно розподіленого навантаження $q_0=6,0$ МПа (рис. 1). Прямолінійні ділянки контуру пластини складної форми шарнірно закріплені, а кругові кутові вирізи вільні від закріплення. Геометричні розміри: $2a=2b=0,1$ м, $r=0,02$ м, $h=0,01$ м.

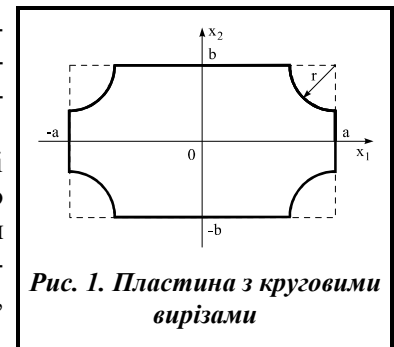


Рис. 1. Пластина з круговими вирізами

Рівняння межі області, зображеної на рис. 1, має вигляд

$$\omega = (\omega_1 \wedge_0 \omega_2) \wedge_0 ((\omega_3 \wedge_0 \omega_4) \wedge_0 (\omega_5 \wedge_0 \omega_6)) = 0, \tag{13}$$

$$\text{де } \omega_1 = \frac{1}{2b}(b^2 - x_2^2), \quad \omega_2 = \frac{1}{2a}(a^2 - x_1^2), \quad \omega_3 = \frac{1}{2r}((x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2 - r^2),$$

$$\omega_4 = \frac{1}{2r}((x_1 + a)^2 + (x_2 - b)^2 - r^2), \quad \omega_5 = \frac{1}{2r}((x_1 + a)^2 + (x_2 + b)^2 - r^2), \quad \omega_6 = \frac{1}{2r}((x_1 - a)^2 + (x_2 + b)^2 - r^2).$$

У даному випадку структура розв’язку може бути записана так:

$$\dot{w} = \omega_0 \Phi_1, \quad \dot{u}_1 = \omega_1 \Phi_2, \quad \dot{u}_2 = \omega_2 \Phi_3, \tag{14}$$

де $\omega_0 = \omega_1 \wedge_0 \omega_2$.

Зазначимо, що, оскільки структура розв’язку (14) задовольняє тільки кінематичним граничним умовам, то функція ω , яка визначається формулою (13), не входить до структури і використовується тільки для знаходження координат вузлів сітки інтегрування по області Ω при обчисленні матриці Рітца.

На рис. 2 наведено графіки залежності прогинів у центрі пластини складної форми від інтенсивності поперечного навантаження q . Суцільні лінії відповідають нелінійному розв’язку, а штрихові – лінійному. На рис. 3 зображено аналогічні графіки для квадратної пластини.

На рис. 4, 5 представлені результати розрахунку абсолютних значень напружень у центрі пластини складної форми й у центрі квадратної пластини. На рисунках цифра 1 відповідає напруженням на верхній поверхні ($z=-h/2$), а цифра 2 – на нижній ($z=h/2$). Штриховими лініями показано лінійний розв’язок.

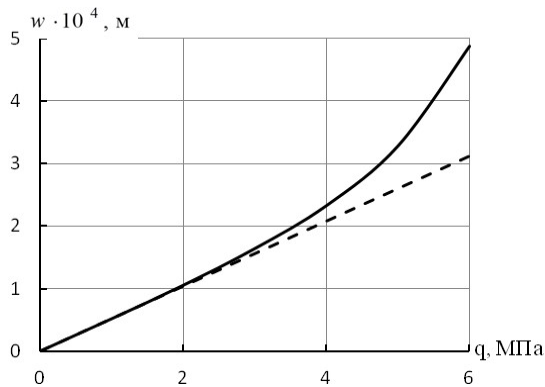


Рис. 2. Прогини в центрі пластини складної форми

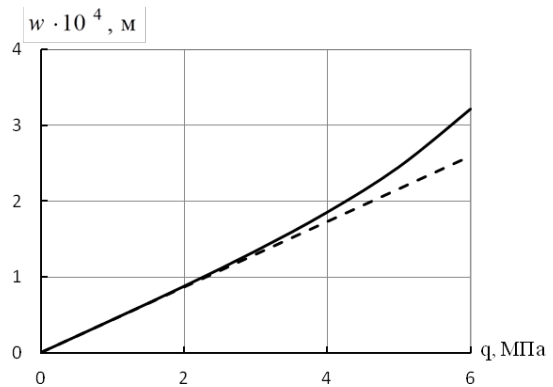


Рис. 3. Прогини в центрі квадратної пластини

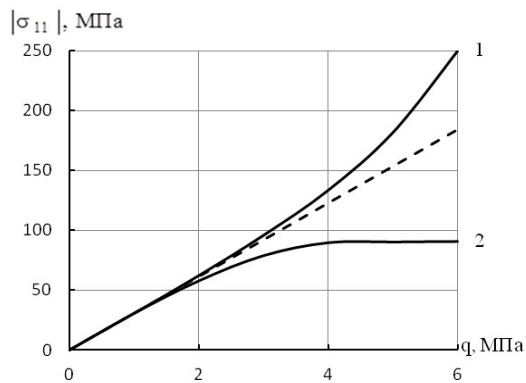


Рис. 4. Напруження в центрі пластини складної форми

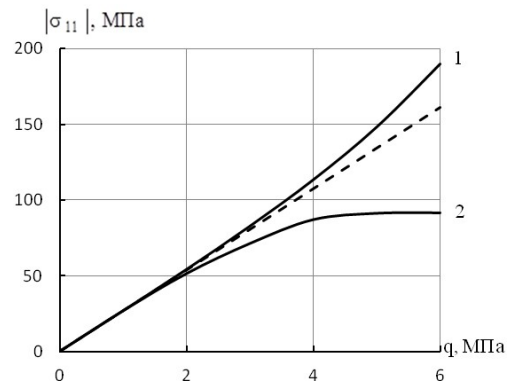


Рис. 5. Напруження в центрі квадратної пластини

При чисельних розрахунках, як у тестовому, так і у даному прикладі, для навантаження у формулі (10) приймали: $q_{01}=1,0$ МПа, $q_{02}=10^{-1}$ МПа, а початковий крок і задана похибка обчислень у методі РКМ дорівнювали: $\Delta t_0=10^{-2}$, $\varepsilon=10^{-5}$.

Із наведених на рис. 2–5 графіків видно, що наявність у пластині вільних від закріплення кутових вирізів призводить до збільшення прогинів і напружень, а неврахування різної поведінки матеріалу за розтягу і стиску суттєво впливає на результати розрахунку.

Висновки

Розроблено новий чисельно-аналітичний метод розв'язання задач фізично нелінійного згину пластин складної форми із матеріалів, що неоднаково опираються розтягу і стиску. Метод базується на спільному використанні методів R-функцій, неперервного продовження за параметром і Рунге-Кутга-Мерсона.

Розв'язано тестову задачу, отримано збіг з просторовим розв'язком. Виконано розрахунок нелінійно-пружного згину пластини складної форми з комбінованими умовами закріплення. Досліджено вплив геометричної форми й умов закріплення на напружено-деформований стан. Показано, що неврахування різної поведінки матеріалу за розтягу і стиску призводить до суттєвих похибок у результатах розрахунку параметрів НДС.

Література

1. Жуков А. М. Сопротивление некоторых материалов чистому растяжению и сжатию. *Известия АН СССР. Механика твердого тела*. 1986. № 4. С. 197–202.
2. Микляев П. Г., Фридман Я. Б. Анизотропия механических свойств металлов. Москва: Металлургия, 1986. 224 с.
3. Саррак В. И., Филиппов Г. А. Эффект разного сопротивления деформации при растяжении и сжатии мартенсита закаленной стали. *Физика металлов и металловедение*. 1977. Т. 44. № 4. С. 858–863.
4. Золочевский А. А. Разработка математических моделей упругости, пластичности, ползучести изотропных и анизотропных тел с характеристиками, зависящими от вида нагружения: дис. ... д-ра техн. наук: 05.13.16; 01.02.04 / Харьковский политехнический институт, Харьков, 1994. 521 с.

5. Золочевский А. А., Склепус А. Н., Склепус С. Н. Нелинейная механика деформируемого твердого тела. Харьков: «Бизнес Инвестор Групп», 2011. 720 с.
6. Золочевский А. А., Золочевский Ю. А. К методике расчета нелинейного деформирования тел вращения при неосесимметричном нагружении. *Прочность тонкостенных авиационных конструкций*. 1989. С. 9–12.
7. Золочевский А. А., Козьмин Ю. С., Конкин В. Н. Нелинейные задачи теории толстостенных оболочек из анизотропных материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию. *Труды XV Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин*. Казань: Изд-во КГУ, 1990. Т. 1. С. 286–290.
8. Золочевский А. А., Дамасевич С. В. Методика расчета нелинейно-упругого деформирования оболочек из материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию. *Известия вузов. Машиностроение*. 1990. № 5. С. 30–34.
9. Золочевский А. А., Козьмин Ю. С. Методика расчета в пространственной постановке прямоугольных пластин из материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию. *Известие вузов. Машиностроение*. 1991. № 1–3. С. 9–14.
10. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. Москва: Мир, 1976. 464 с.
11. Рвачев В. Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. Киев: Наукова думка, 1982. 552 с.
12. Рвачев В.Л., Курпа Л.В. R-функции в задачах теории пластин. Киев: Наукова думка, 1987. 175 с.
13. Smetankina N., Merkulova A., Merkulov D., Postnyi O. Dynamic response of laminate composite shells with complex shape under low-velocity impact. In: Nechyporuk M., Pavlikov V., Kritskiy D. (eds.) *Integrated Computer Technologies in Mechanical Engineering-2020. ICTM 2020. Lecture Notes in Networks and Systems*. Cham: Springer, 2021. Vol. 188. P. 267–276. https://doi.org/10.1007/978-3-030-66717-7_22.
14. Григолюк Э. И., Шалашилин В. И. Проблемы нелинейного деформирования: метод продолжения решения по параметру в нелинейных задачах механики твердого деформируемого тела. Москва: Наука, 1988. 232 с.
15. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. Москва: Мир, 1987. 542 с.
16. Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырный П. И. Вычислительные методы. Москва: Наука, 1977. 399 с.
17. Чернилевский Д. В., Лаврова Е. В., Романов В. А. Техническая механика. Москва: Наука, 1982. 544 с.
18. Золочевский А. А. Определяющие уравнения нелинейного деформирования с тремя инвариантами напряженного состояния. *Прикладная механика*. 1990. Т. 26. № 3. С. 74–80.

Надійшла до редакції 18.05.2023