

УДК 539.6

## АНАЛІЗ СТІЙКОСТІ ТА КОЛИВАНЬ ПОРИСТИХ СТЕПЕНЕВИХ ТА СИГМОВИДНИХ ФУНКЦІОНАЛЬНО-ГРАДІЄНТНИХ СЕНДВІЧ-ПЛАСТИН МЕТОДОМ R-ФУНКЦІЙ

Л. В. Курпа, д-р техн. наук

[kurpalidia@gmail.com](mailto:kurpalidia@gmail.com)

ORCID: 0000-0002-4459-8249

Т. В. Шматко, канд. техн. наук

[ktv\\_ua@yahoo.com](mailto:ktv_ua@yahoo.com)

ORCID: 0000-0003-3386-8343

Г. Б. Лінник, канд. техн. наук

[linnik2105@gmail.com](mailto:linnik2105@gmail.com)

ORCID: 0000-0003-4227-3210

Національний технічний університет  
«Харківський політехнічний інститут»  
61002, Україна, м. Харків, вул. Кирпичова, 2

У даній роботі вперше застосовано метод R-функцій для дослідження стійкості та коливань пористих функціонально-градієнтних сендвіч-пластин зі складною геометричною формою. Припускається, що зовнішні шари пластини виготовлено із функціонально-градієнтних матеріалів, а заповнювач є ізотропним, а саме керамічним. Диференціальні рівняння руху одержано за допомогою звичайної зсувної деформаційної теорії першого порядку із заданим коефіцієнтом зсуву (FSDT). Досліджено дві моделі розподілення пористості згідно із степеневим (P-law) і сигмовидним (S-law) законами. Одержані аналітичні вирази для обчислення ефективних механічних характеристик функціонально-градієнтних матеріалів при рівномірному й нерівномірному розподіленні пористості. Запропонований підхід враховує той факт, що докритичний стан пластини може бути неоднорідним, і тому перш за все визначаються напруження в серединній площині пластини, а потім розв'язується задача на власні значення критичного навантаження критичного навантаження. Для визначення частот пластин використано метод Рітца разом із теорією R-функцій. Розроблені алгоритми і програмне забезпечення перевірені на тестових прикладах і порівняні з відомими результатами, одержаними за допомогою інших методів. Розв'язано ряд задач стійкості й коливань пористих функціонально-градієнтних сендвіч-пластин зі складною геометричною формою для різних схем укладання шарів, різних граничних умов і законів розподілення пористості.

**Ключові слова:** стійкість, коливання, сендвіч-пластини, пористість, функціонально-градієнтний матеріал, теорія R-функцій, метод Рітца.

### Вступ та аналіз останніх досліджень

Задачі про визначення критичного навантаження і вільні коливання пластин й оболонок завжди були актуальними для інженерів, що займаються проектуванням тонкостінних конструкцій. Це пов'язано з необхідністю гарантії міцності конструкції при певних навантаженнях. Враховуючи, що велика кількість елементів тонкостінних конструкцій виготовлюється із функціонально-градієнтних матеріалів (ФГМ), ця проблема, як і раніше, залишається актуальною при використанні сучасних матеріалів. Незважаючи на велику кількість закордонних публікацій, присвячених цій проблемі [1–3], існує ще багато не зовсім вирішених питань. Одним із них є розробка ефективних методів дослідження статичної та динамічної поведінки функціонально-градієнтних (ФГ) пластин й оболонок складної геометричної форми при різних видах навантаження й умов закріплення елементів. Особливо це стосується ФГ сендвіч-пластин й оболонок з урахуванням таких чинників, як пористість, наявність пружної основи, нерівномірне навантаження об'єкта у серединній площині, змінна товщина та ін.

Аналіз існуючої літератури показує, що найбільш розвинені аналітичні методи для дослідження стійкості і коливань елементів прямокутної форми і зазвичай вільно опертих на границі [4–10]. У разі пластин іншої форми пропонується використовувати найбільш універсальний числовий метод скінченних елементів (МСЕ) [11]. На жаль, авторам невідомі роботи, в яких наведені конкретні числові розрахунки, одержані МСЕ для ФГ сендвіч-пластин складної геометричної форми (які, щонайменше, відрізняються від прямокутних пластин) з урахуванням неоднорідного докритичного стану.

У даній роботі пропонується чисельно-аналітичний підхід для розв'язання однієї з перерахованих проблем, а саме метод визначення критичного навантаження і власних частот пористих пластин.

Статтю ліцензовано на умовах Ліцензії Creative Commons «Attribution» («Атрибуція») 4.0 Міжнародна.  
© Л. В. Курпа, Т. В. Шматко, Г. Б. Лінник, 2023

тин довільної геометричної форми. Припускається, що пористість моделюється степеневим або сигмовидним законами. Метод базується на використанні теорії R-функцій та варіаційного методу Рітца. Головна ідея методу була запропонована раніше в роботах [12–16] для дослідження стійкості і коливань ізотропних, ортотропних, одношарових і багатошарових пластин, ФГ одношарових і сендвіч-пластин. У запропонованому дослідженні цей метод вперше застосовано до пористих P- і S-ФГМ сендвіч-пластин. Одержано аналітичні вирази для обчислення ефективних властивостей таких матеріалів і перевірено їх вірогідність на тестових прикладах. Розроблений підхід застосовано для розрахунку пористих ФГ сендвіч-пластин складної геометричної форми.

### Постановка задачі

Розглянемо пористу ФГ сендвіч-пластину довільної геометричної форми, що стискається силами в серединній площині. Припускається, що зовнішні шари виготовлено із ФГМ, а саме із суміші металу і кераміки, а внутрішній шар (заповнювач) є керамічним. Необхідно визначити критичне навантаження і власні частоти пластини, якщо у зовнішніх шарах присутня пористість, а розподілення часткових долей кераміки відбувається за різними законами, а саме за степеневим і сигмовидним.

### 2.1. Механічні властивості ФГМ

Будемо розглядати два типи розподілення пористості у ФГ шарах: рівномірний і нерівномірний. Ефективні механічні властивості ФГМ (модуль пружності  $E$  і густина матеріалу  $\rho$ ) у разі рівномірного розподілення пористості визначаються за формулами (1) [7–10]:

$$\begin{cases} P^{(1)}(z) = P_m + (P_c - P_m)V^{(1)}(z) - \frac{\alpha}{2}(P_c + P_m), \\ P^{(2)}(z) = P_m + (P_c - P_m)V^{(2)}(z), \\ P^{(3)}(z) = P_m + (P_c - P_m)V^{(3)}(z) - \frac{\alpha}{2}(P_c + P_m). \end{cases} \quad (1)$$

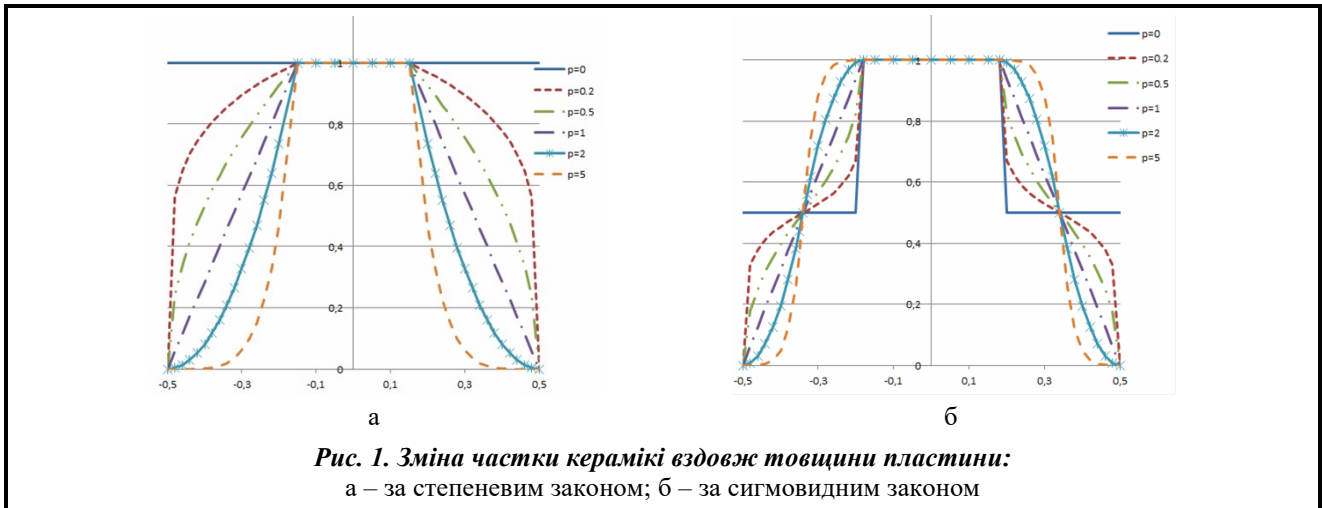
Для нерівномірного розподілення вони задаються наступними виразами:

$$\begin{cases} P^{(1)}(z) = P_m + (P_c - P_m)V^{(1)}(z) - \frac{\alpha}{2}(P_c + P_m) \left( 1 + \frac{z - h_1}{\frac{h}{2} + h_1} \right), \\ P^{(2)}(z) = P_m + (P_c - P_m)V^{(2)}(z), \\ P^{(3)}(z) = P_m + (P_c - P_m)V^{(3)}(z) - \frac{\alpha}{2}(P_c + P_m) \left( \frac{z - \frac{h}{2}}{h_2 - \frac{h}{2}} \right), \end{cases} \quad (2)$$

де  $\alpha$  – це коефіцієнт пористості, а  $V^{(1)}$ ,  $V^{(2)}$ ,  $V^{(3)}$  – часткові долі кераміки, які визначаються залежно від прийнятого закону розподілення часткових долей кераміки (рис. 1, а–б).

Наприклад, для степеневого закону (P-law, рис. 1, а) вони можуть бути визначеними згідно з наступними формулами [9]:

$$\begin{cases} V^{(1)}(z) = \left( \frac{z + \frac{h}{2}}{h_1 + \frac{h}{2}} \right)^p, & -\frac{h}{2} \leq z \leq h_1, \\ V^{(2)}(z) = 1, & h_1 \leq z \leq h_2, \\ V^{(3)}(z) = \left( \frac{z - \frac{h}{2}}{h_2 - \frac{h}{2}} \right)^p, & h_2 \leq z \leq \frac{h}{2}. \end{cases} \quad (3)$$



**Математична постановка задачі в рамках уточненої зсувної теорії першого порядку**

Для аналізу стійкості і коливань пластини будемо використовувати теорію деформації зсуву першого порядку [17]. Тоді переміщення  $u, v, w$  в будь-якій точці пластини визначаються як функції переміщень середньої поверхні  $u_0, v_0$  та  $w_0$  у напрямках осей  $Ox, Oy$  й  $Oz$  і незалежних поворотів  $\psi_x, \psi_y$  поперечної нормалі до середньої поверхні навколо осей  $Oy$  і  $Ox$  відповідно:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) + z\psi_x(x, y, t); \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) + z\psi_y(x, y, t); \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t). \end{aligned} \tag{4}$$

Компоненти деформацій визначаються як

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon^0\} + z\{\chi^0\},$$

де

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix}; \{\varepsilon^0\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{Bmatrix}; \{\chi^0\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \end{Bmatrix}; \{\gamma^0\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} + \varphi_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \varphi_y \end{Bmatrix}.$$

Напруження для кожного  $r$ -го шару визначаються згідно із законом Гука як:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}(z) & Q_{12}(z) & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12}(z) & Q_{22}(z) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66}(z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55}(z) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{44}(z) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}, \tag{5}$$

$$Q_{11}(z) = Q_{22}(z) = \frac{E(z)}{1-\nu^2}; Q_{12}(z) = \nu Q_{11}(z); Q_{44}(z) = Q_{55}(z) = Q_{66}(z) = \frac{E(z)}{2(1+\nu)}.$$

Зусилля  $N=(N_x, N_y, N_{xy})^T$ , моменти  $M=(M_x, M_y, M_{xy})^T$  і перерізуючі сили  $Q=(Q_x, Q_y)^T$  після інтегрування вздовж товщини обчислюються за формулами

$$\{N\} = [A]\{\varepsilon\} + [B]\{\chi\}; \{M\} = [B]\{\varepsilon\} + [D]\{\chi\}; \{Q\} = K_s^2 A_{66} \{\varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}\}^T + [B]\{\chi\}, \quad (6)$$

де  $K_s^2$  визначає коефіцієнт зсуву. У даній роботі він приймається рівним  $K_s^2 = 5/6$ . Зауважимо, що елементи  $A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}$  матриць  $[A], [B]$  і  $[D]$  у виразах (6) обчислюються за формулами

$$A_{ij} = \sum_{r=1}^3 \int_{z_r}^{z_{r+1}} Q_{ij}^{(r)} dz; B_{ij} = \sum_{r=1}^3 \int_{z_r}^{z_{r+1}} Q_{ij}^{(r)} z dz; D_{ij} = \sum_{r=1}^3 \int_{z_r}^{z_{r+1}} Q_{ij}^{(r)} z^2 dz,$$

де  $z_1 = -h/2; z_2 = h_1; z_3 = h_2; z_4 = h/2$ . Величини  $Q_{ij}^{(r)}$  ( $i, j = 1, 2, 6$ ) визначаються за формулами (5).

Представимо аналітичні вирази для обчислення елементів  $A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}$  матриць  $[A], [B]$  і  $[D]$  для двох випадків розподілу пористості. Для скорочення вводимо такі допоміжні позначення:

$$E_{cm} = E_c - E_m; E_{cm}^{(s)} = \alpha \frac{E_c + E_m}{2}; h_c = h_2 - h_1; AS1 = h_1 + \frac{1}{2}h; AS2 = h_2 - \frac{1}{2}h.$$

У цьому випадку вирази для  $A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}$  набувають наступного вигляду:

$$A_{11}^{(1,2)} = \frac{1}{1-\nu^2} (A_{11}^{(g)} - E_{cm}^{(s)} P_{11}^{(1,2)}); B_{11}^{(1,2)} = \frac{1}{1-\nu^2} (B_{11}^{(g)} - E_{cm}^{(s)} P_{12}^{(1,2)}); D_{11}^{(1,2)} = \frac{1}{1-\nu^2} (D_{11}^{(g)} - E_{cm}^{(s)} P_{13}^{(1,2)}).$$

Верхні індекси відповідають типу пористості: 1 – рівномірне розподілення; 2 – нерівномірне. Формально ці вирази будуть однакові для обох законів (P-ФГМ) і (S-ФГМ). Різними будуть тільки вирази для доданків  $A_{11}^{(g)}, B_{11}^{(g)}, D_{11}^{(g)}$ . Для випадку степеневого закону (P-ФГМ) ці вирази мають наступний вигляд:

$$A_{11}^{(g)} = E_m h + E_{cm} \left( \frac{h + p h_c}{p + 1} \right); B_{11}^{(g)} = E_{cm} \left( \frac{h_2^2 - h_1^2}{2} + \frac{AS1^2 - AS2^2}{p + 2} - \frac{h(AS1 + AS2)}{2(p + 1)} \right);$$

$$D_{11}^{(g)} = E_m \frac{h^3}{12} + E_{cm} \left( \frac{AS1^3 - AS2^3}{p + 3} - \frac{h(AS1^2 + AS2^2)}{p + 2} + \frac{h_2(AS1 + AS2)}{4(p + 1)} + \frac{h_2^3 - h_1^3}{3} \right).$$

Вирази для доданків  $P_{11}^{(1,2)}, P_{12}^{(1,2)}, P_{13}^{(1,2)}$  наведено нижче

$$P_{11}^{(1)} = (h - h_c); P_{12}^{(1)} = \left( \frac{h_1^2 - h_2^2}{2} \right); P_{13}^{(1)} = \left( \frac{h^3}{12} - \frac{h_2^3 - h_1^3}{3} \right);$$

$$P_{11}^{(2)} = \frac{1}{2}(h - h_c); P_{12}^{(2)} = \left( \frac{AS1^2 - AS2^2}{3} - \frac{1}{4}h(h_1 + h_2) \right); \quad (7)$$

$$P_{13}^{(2)} = \frac{1}{3} \left( \frac{h^3}{8} + h_1^3 \right) - \frac{AS1^3 + AS2^3}{4} + \frac{2h_1 AS1^2 - h AS2^2}{3} - \frac{1}{2} \left( AS1 h_1^2 + AS2 \frac{h^2}{4} \right).$$

Для сигмовидного закону (S-ФГ) вирази для  $A_{11}^{(g)}, B_{11}^{(g)}, D_{11}^{(g)}$  мають наступний вигляд:

$$A_{11}^{(g)} = E_m h + \frac{1}{2} E_{cm} (h + h_c); B_{11}^{(g)} = \frac{1}{2} E_{cm} (h_n^2 - h_m^2) + \frac{AS2^2 - AS1^2}{2(p + 1)(p + 2)};$$

$$D_{11}^{(g)} = E_m \frac{h^3}{12} + E_{cm} \left( \frac{h_n^3 - h_m^3}{3} + \frac{AS2^2 \left( h_2 + \frac{h}{2} \right) - AS1^2 \left( h_1 - \frac{h}{2} \right)}{4(p + 1)(p + 2)} \right).$$

Вирази  $P_{11}^{(1,2)}, P_{12}^{(1,2)}, P_{13}^{(1,2)}$  для обох законів P-S-ФГ мають однакову форму (7).

Усі інші елементи  $A_{12}, A_{66}, B_{12}, B_{66}, D_{12}, D_{66}$  визначаються за допомогою одержаних формул для  $A_{11}, B_{11}, D_{11}$ , а саме:

$$A_{12} = \nu A_{11}; \quad A_{22} = A_{11}; \quad A_{66} = \frac{1-\nu}{2} A_{11};$$

$$B_{12} = \nu B_{11}; \quad B_{22} = B_{11}; \quad B_{66} = \frac{1-\nu}{2} B_{11};$$

$$D_{12} = \nu D_{11}; \quad D_{22} = D_{11}; \quad D_{66} = \frac{1-\nu}{2} D_{11}.$$

Припустимо, що на пластину діє стискуюче статичне навантаження  $p_{st}$ , а всі зовнішні сили змінюються пропорційно параметру  $\lambda$ . Основні диференціальні рівняння рівноваги пластини, що навантажена в серединній площині, мають наступний вигляд:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} - m_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0;$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} - m_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0;$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \lambda \left( \frac{\partial^2 N_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 N_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 N_y}{\partial y^2} \right) - m_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0; \quad (8)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_x - m_2 \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} = 0;$$

де  $N_x, N_y, N_{xy}$  – зусилля, які характеризують докритичний стан пластини;  $m_1 = \sum_{s=1}^n \int_{h_s}^{h_{s+1}} \rho_0^{(r)} dz$ ;

$m_2 = \sum_{s=1}^n \int_{h_s}^{h_{s+1}} \rho_0^{(r)} z^2 dz$ ;  $\rho_0^{(s)}$  – щільність  $r$ -го шару.

Рівняння руху (8) доповнюються відповідними граничними умовами.

### Метод розв'язання

У загальному випадку докритичний стан пластини може бути неоднорідним. Наприклад, це стосується пластин з отворами, або коли діє складне навантаження, у разі пластин складної геометричної форми та ін. З огляду на це важливо передусім визначити докритичний стан пластини, тобто знайти зусилля в серединній площині  $\{N^0\} = (N_x^0, N_y^0, N_{xy}^0)^T$ . Враховуючи, що пластини залишається плоскою, при знаходженні цих зусиль величинами  $w, \psi_x, \psi_y$  можна нехтувати. Отже, вважатимемо, що докритичний стан пластини моделюється наступною системою рівнянь

$$\begin{cases} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (9)$$

Система (9) доповнюється такими граничними умовами на навантаженій частині границі  $\partial\Omega_1$ :

$$N_n(u, v) = -1; \quad T_n(u, v) = 0. \quad (10)$$

Оператори  $N_n, T_n$  визначаються як:

$$N_n = N_{11}l^2 + N_{22}m^2 + 2N_{12}lm; \quad T_n = N_{12}(l^2 - m^2) + (N_{11} - N_{22})lm.$$

де  $l = \cos(\vec{n}, Ox)$ ;  $m = \cos(\vec{n}, Oy)$ ; вектор  $\vec{n}$  – це нормальний вектор до границі області. Вид крайових умов на ненавантаженій частині області визначається способом закріплення цієї частини границі.

Задачу (9–10) розв’язуватимемо методом Рітца разом з теорією R-функцій [18]. Тому представимо варіаційну постановку задачі (9–10), яка зводиться до знаходження екстремуму наступного функціоналу:

$$I(u_0, v_0) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (N_x^0 \varepsilon_x^L + N_y^0 \varepsilon_y^L + N_{xy}^0 \gamma_{xy}^L) d\Omega + \int_{\partial\Omega_1} p_{st} (u_0 \cos \alpha + v_0 \sin \alpha) ds, \quad (11)$$

де

$$\{N^0\} = [A] \{\varepsilon_0\}^T; \{\varepsilon_0\} = \{u_{0,x}; v_{0,y}; u_{0,y} + v_{0,x}\}.$$

Розв’язання крайової задачі (9–10) або варіаційної проблеми (11) дозволяє визначити переміщення  $u_0, v_0$ , а отже, і сили  $\{N_0\}$  в серединній площині, які характеризують докритичний стан пластини.

Щоб знайти критичне навантаження, будемо, як і раніше [15, 16], застосовувати динамічний підхід [19]. Для цього необхідно знайти екстремум функціоналу:

$$I(u, v, w, \psi_x, \psi_y) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} [N_x^L \varepsilon_x^L + N_y^L \varepsilon_y^L + N_{xy}^L \gamma_{xy}^L + M_x \chi_x + M_y \chi_y + M_{xy} \chi_{xy} + Q_x \varepsilon_{xz} + Q_y \varepsilon_{yz} + p_{st} (N_x^0 (w_{,x})^2 + N_y^0 (w_{,y})^2 + N_{xy}^0 w_{,x} w_{,y})] d\Omega - \frac{1}{2} \omega_L^2 \iint_{\Omega} (I_0 (u^2 + v^2 + w^2) + I_1 (u \varphi_x + v \varphi_y) + I_2 (\psi_x^2 + \psi_y^2)) d\Omega. \quad (12)$$

Величину параметру  $p_{st}$  збільшуватимемо, поки частота  $\omega_L$  буде дійсним числом. Величина критичного навантаження  $N_{cr}$  визначається значенням параметру  $p_{st}$ , яке відповідає найменшому невід’ємному значенню квадрата частоти. Величини  $I_0, I_1, I_2$  формулі (12) обчислюються як наступні інтеграли

$$(I_0, I_1, I_2) = \sum_{r=1}^3 \int_{z_r}^{z_{r+1}} (\rho^{(r)}(1, z, z^2) dz).$$

З урахуванням того, що густина маси  $r$ -го шару визначається за формулами (1–3), були одержані аналітичні вирази для обчислення  $I_0, I_1, I_2$ :

– для степеневого закону (P-law)

$$I_0^{(1,2)} = IA_{11}^g - \rho_{cm}^{(r)} P_{11}^{(1,2)}; I_1^{(1,2)} = IB_{11}^g - \rho_{cm}^{(r)} P_{12}^{(1,2)}; I_2^{(1,2)} = ID_{11}^g - \rho_{cm}^{(r)} P_{13}^{(1,2)}. \quad (13)$$

Вирази для  $IA_{11}^g, IB_{11}^g, ID_{11}^g$  представлені нижче

$$IA_{11}^g = IA_{11}^{(gp)}; IB_{11}^g = IB_{11}^{(gp)}; ID_{11}^g = ID_{11}^{(gp)},$$

$$\text{де } IA_{11}^{(gp)} = \rho_m h + \rho_{cm} \left( \frac{h + p h_c}{p + 1} \right); IB_{11}^{(gp)} = \rho_{cm} \left( \frac{h_2^2 - h_1^2}{2} + \frac{AS1^2 - AS2^2}{p + 2} - \frac{h(AS1 + AS2)}{2(p + 1)} \right);$$

$$ID_{11}^{(gp)} = \rho_m \frac{h^3}{12} + \rho_{cm} \left( \frac{h_2^3 - h_1^3}{3} + \frac{AS1^3 - AS2^3}{p + 3} - \frac{h(AS1^2 + AS2^2)}{p + 2} + \frac{h_2(AS1 - AS2)}{4(p + 1)} \right);$$

– для сигмовидного закону (S-law)

$$IA_{11}^g = IA_{11}^{(gs)}; IB_{11}^g = IB_{11}^{(gs)}; ID_{11}^g = ID_{11}^{(gs)},$$

де  $IA_{11}^{(gs)}, IB_{11}^{(gs)}, ID_{11}^{(gs)}$  визначаються як:

$$IA_{11}^{(gs)} = \rho_m h + \frac{1}{2} \rho_{cm} (h + h_c); IB_{11}^{(gs)} = \frac{1}{2} \rho_{cm} (h_2^2 - h_1^2) + \frac{AS2^2 - AS1^2}{2(p + 1)(p + 2)};$$

$$ID_{11}^{(gs)} = \rho_m \frac{h^3}{12} + \rho_{cm} \left( \frac{h_2^3 - h_1^3}{3} + \frac{AS2 \left( h_2 + \frac{h}{2} \right) - AS1 \left( h_1 - \frac{h}{2} \right)}{4(p + 1)(p + 2)} \right).$$

Вирази для  $P_{11}^{(1,2)}$ ,  $P_{12}^{(1,2)}$ ,  $P_{13}^{(1,2)}$  у формулах (13) мають форму (7).

Мінімізація функціонала (12) виконується методом Рітца. Послідовність координатних функцій була побудована за допомогою теорії R-функцій [18].

**Числові результати**  
**Тестові задачі**

Тестування представленого алгоритму виконано для наступних прикладів. Нехай квадратна шарнірно оперта ФГ сандвіч-пластина стиснута зусиллями рівномірно з усіх сторін. Зовнішні шари виготовлено з ФГМ  $Al/Al_2O_3$ , а заповнювач – металевий. Товщини шарів і градієнт індекс  $p$  варіюються. Відношення загальної товщини пластини  $p$  до довжини сторони квадрата  $2a$  прийнято рівним 0,1, тобто  $h/(2a)=0,1$ . Властивості обох матеріалів для ФГМ суміші  $Al/Al_2O_3$  є наступними [9, 17]:  $Al - E_m=70$  ГПа;  $\nu_m=0,3$ ;  $\rho_m=2707$  кг/м<sup>3</sup>;  $Al_2O_3 - E_c=380$  ГПа;  $\nu_c=0,3$ ;  $\rho_c=3800$  кг/м<sup>3</sup>.

Аналогічна задача була розглянута в роботі [10]. У табл. 1 наведено порівняння одержаних результатів для безрозмірного критичного навантаження  $\bar{N}_{cr} = \frac{N_{cr}}{100E_0h^3}$  (де  $E_0=1$  ГПа;  $\rho_0=1$  кг/м<sup>3</sup>) з результатами роботи [10] для ФГМ  $Al_2O_3/Al$ ,  $p=2$ . Розглянуто різні схеми розташування шарів  $h^{(1)}-h^{(2)}-h^{(3)}$ . Величини  $h^{(1)}$ ,  $h^{(2)}$ ,  $h^{(3)}$  визначають товщину шарів і дорівнюють  $h^{(1)}=h_1+h/2$ ;  $h^{(2)}=h_2-h_1$ ;  $h^{(3)}=h/2-h_2$ .

У табл. 2 наведено порівняння одержаних результатів для основної власної частоти  $\Lambda = \frac{\lambda(2a)^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_0}{E_0}}$  вільно опертої пластини із зовнішніми шарами, виготовленими із ФГМ ( $Al_2O_3/Al$ ,  $p=2$ ), з аналогічними результатами роботи [10].

**Таблиця 1. Порівняння критичного навантаження з відомими результатами для квадратної шарнірно закріпленої пластини, стиснутої вздовж всієї границі рівномірними зусиллями ( $Al_2O_3/Al$ ,  $p=2$ )**

Тип пористості	$\alpha$	Метод	1-0-1	1-1-1	1-2-1	2-1-2
P-ФГМ	0	[10]	1,7786	2,4045	2,9934	2,0828
		RFM	1,7681	2,3920	2,9830	2,0715
P-I (рівном.)	0,1	[10]	1,3623	1,9972	2,6223	1,6648
		RFM	1,3783	2,1980	2,0647	1,6850
	0,2	[10]	0,9303	1,6046	2,2654	1,2621
		RFM	0,9870	1,6451	2,3072	1,2573
P-II (нерівн.)	0,1	[10]	1,6660	2,2576	2,8409	1,9485
		RFM	1,6686	2,2633	2,8501	1,9515
	0,2	[10]	1,5633	2,1134	2,6927	1,8181
		RFM	1,5695	2,1335	2,7181	1,8325
S-ФГМ	0	[10]	2,2554	3,0372	3,6296	2,6673
		RFM	2,2441	3,0265	3,6219	2,6560
S-I (рівном.)	0,1	[10]	1,8310	2,6215	3,2501	2,2416
		RFM	1,8541	2,6381	3,2325	2,2681
	0,2	[10]	1,4224	2,2216	2,8861	1,8323
		RFM	1,4565	2,2496	2,8451	1,8772
S-II (нерівн.)	0,1	[10]	2,1429	2,8844	3,4716	2,5287
		RFM	2,1465	2,8962	3,4882	2,5365
	0,2	[10]	2,0326	2,7359	3,3184	2,3937
		RFM	2,0462	2,7675	3,3561	2,4182

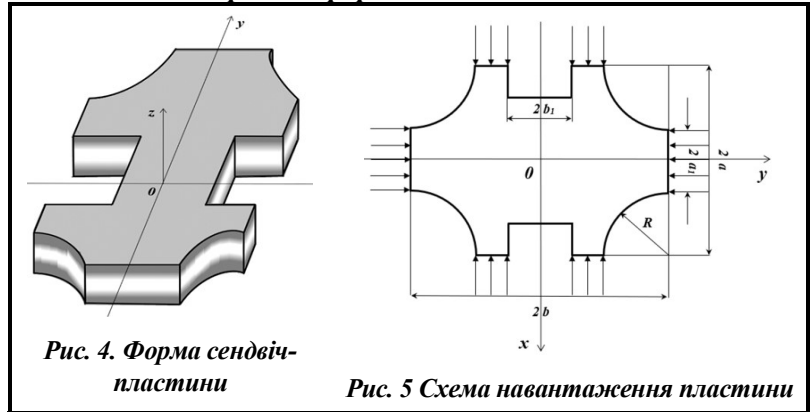
**Таблиця 2. Порівняння безрозмірного параметра власної частоти квадратної вільно опертої ФГ сандвіч пластини з відомими результатами,  $p=2$ ,  $h/(2a)=0,1$**

$\alpha$	Метод	1-0-1	1-1-1	1-2-1	2-1-2	2-2-1	2-1-1
P-I, ФГМ							
0	[10]	1,0615	1,1885	1,3024	1,1225	1,2439	1,1653
	RFM	1,0584	1,1857	1,3002	1,1195	1,2415	1,1627
0,1	[10]	0,9826	1,1207	1,2493	1,0471	1,1819	1,0935
	RFM	0,9885	1,1271	1,2549	1,0531	1,1880	1,1007
0,2	[10]	0,8787	1,0420	1,1915	1,9549	1,1105	1,0056
	RFM	0,8913	1,0551	1,2026	0,9684	1,1228	1,0188
P-II, ФГМ							
0,1	[10]	1,0556	1,1708	1,2842	1,1084	1,2270	1,1512
	RFM	1,0565	1,1725	1,2864	1,0941	1,2277	1,1512
0,2	[10]	1,0521	1,1526	1,2658	1,0939	1,2097	1,1376
	RFM	1,0544	1,1581	1,2717	1,0984	1,2126	1,1383
S-I, ФГМ							
0	[10]	1,1617	1,3119	1,4155	1,2427	1,3594	1,2797
	RFM	1,1588	1,3096	1,4137	1,2401	1,3573	1,2774
0,1	[10]	1,1039	1,2595	1,3718	1,1862	1,3113	1,2262
	RFM	1,1105	1,2676	1,3792	1,1942	1,3189	1,2339
0,2	[10]	1,0315	1,2011	1,3256	1,2076	1,2580	1,1632
	RFM	1,0467	1,2173	1,3399	1,1371	1,2732	1,1797
S-II, ФГМ							
0,1	[10]	1,1615	1,2992	1,4001	1,2340	1,3470	1,2712
	RFM	1,1641	1,3029	1,4046	1,2374	1,3502	1,2740
0,2	[10]	1,1620	1,2864	1,3859	1,2255	1,3346	1,2628

**Стійкість і вільні коливання пластин складної геометричної форми**

Порівняння даних у табл. 1 та 2 свідчить про добрий збіг отриманих результатів із відомими в літературі. Цей факт дозволяє нам розглянути пластини складної геометричної форми з вирізами, як показано на рис. 4 і 5.

Геометричні параметри прийнято наступними:  $b/2a=0,75$ ;  $a_1/2a=0,35$ ;  $b_1/2a=0,15$ ;  $R/2a=0,2$ ;  $h/2a=0,1$ . Рівняння границі даної області  $\omega(x, y)=0$  побудуємо, використовуючи теорію R- функцій, де



**Рис. 4. Форма сендвіч-пластини**

**Рис. 5. Схема навантаження пластини**

$$\omega(x, y) = (f_1 \wedge_0 f_2) \wedge_0 (f_3 \wedge_0 f_4) \wedge_0 (f_5 \wedge_0 f_6) \wedge_0 (f_7 \wedge_0 f_8). \tag{14}$$

Функції  $f_i(x, y), (i=1,5)$  у виразі (14) визначаються наступними нерівностями:

$$f_1 = \frac{a^2 - x^2}{2a} \geq 0; f_2 = \frac{b^2 - y^2}{2b} \geq 0; f_3 = \frac{a_1^2 - x^2}{2a_1} \geq 0; f_4 = \frac{y^2 - b_1^2}{2b_1} \geq 0; f_5 = \frac{R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2}{2R} \geq 0;$$

$$f_6 = \frac{R^2 - (x+a)^2 - (y-b)^2}{2R} \geq 0; f_7 = \frac{R^2 - (x-a)^2 - (y+b)^2}{2R} \geq 0; f_8 = \frac{R^2 - (x+a)^2 - (y+b)^2}{2R} \geq 0,$$

де операції  $\wedge_0, \vee_0$  мають такий зміст:  $f_k \wedge_0 f_s = f_k + f_s - \sqrt{f_k^2 + f_s^2}$  – R-кон’юнкція, яка описує перетин областей, визначених аналітичними нерівностями  $f_k \geq 0, f_s \geq 0$ ;  $f_k \vee_0 f_s \equiv f_k + f_s + \sqrt{f_k^2 + f_s^2}$  – R-диз’юнкція, що описує об’єднання областей, визначених аналітичними нерівностями  $f_k \geq 0, f_s \geq 0$ .

Розглянемо два типи крайових умов:

– ГУ-I. Пластина, жорстко закріплена вздовж сторін  $x=\pm a, y=\pm b$ , тобто на частинах границі, де діють стискаючі зусилля, інша частина контуру вважається вільною.

– ГУ-II. Пластина, жорстко закріплена вздовж всього контуру.

У табл. 3 наведено значення критичного навантаження  $\bar{N}_{cr} = \frac{N_{cr}}{100E_0h^3}$  для різних схем тов-

щин шарів та для різних законів розподілення пористості при фіксованому значенні об’ємної доли кераміки  $p=2$ .

**Таблиця 3. Критичне навантаження для пористої пластини складної геометричної форми з граничними умовами ГУ-I,  $p=2; Al/Al_2O_3$**

Закон	$\alpha$	1-0-1	1-1-1	1-2-1	2-1-2
P-I	0	4,6550	6,3150	7,8356	5,469
	0,1	3,6450	5,3540	6,9785	4,474
	0,2	2,6330	4,3840	6,1112	3,465
P-II	0,1	4,3935	5,9800	7,4950	5,162
	0,2	4,1315	5,6420	7,1550	4,847
S-I	0	5,9157	7,9440	9,4580	6,990
	0,1	4,9095	6,9470	8,6050	6,002
	0,2	3,8959	6,0385	7,7530	5,005
S-II	0,1	5,6702	7,6111	9,1221	6,681
	0,2	5,3928	7,2755	8,7850	6,371

На рис. 6, а–б показано вплив градієнтного індексу на власні частоти коливань сендвіч-пластин для різних схем розташування шарів при рівномірному й нерівномірному розподіленні пористості, якщо значення коефіцієнта пористості  $\alpha=0,1$ .

Порівнюючи рис. 6, а і рис. 6, б, можна зробити наступні висновки: в обох випадках при збільшенні градієнтного індексу частоти зменшуються. Починаючи з  $p=5$ , зменшення проходить досить плавно, тобто вплив градієнтного індексу буде незначним; найбільші значення частот мають пластини у разі схеми 1–2–1 як при рівномірному розподіленні пористості, так і нерівномірному, що добре узгоджується із фізичним змістом. У цьому разі доля кераміки буде найбільшою, а пластина буде найбільш жорсткою. Для сигмовидного закону (рис. 6, б) товщини шарів більш суттєво впливають на частоти, ніж для степеневого закону (рис. 6, а).



На рис. 7 представлені графіки поведінки частот для жорстко закріплених вздовж всього контуру пластин для двох законів розподілення об'ємної долі кераміки Р-ФГМ та S-ФГМ за умови відсутності пористості,  $\alpha=0$ .

Вплив коефіцієнта пористості на власні частоти таких пластин для схеми розташування шарів (1-1-1) показано на рис. 8. Як видно, зміна коефіцієнта пористості в обраних межах  $0 \leq \alpha \leq 0,2$  майже не впливає на поведінку жорстко закріпленої пластини як для сигмовидного, так і для степеневого законів. Для степеневого закону цей вплив більш суттєвий, хоча також незначний.

На рис. 9, а-б представлені графіки поведінки частот для пористих жорстко закріплених вздовж всього контуру пластин (ГУ-II) при нерівномірному розподіленні пористості для двох законів Р-ФГМ і S-ФГМ зміни об'ємної частки кераміки: а –  $\alpha=0,1$ ; б –  $\alpha=0,2$ ). Розглянуто різні схеми розташування шарів: 1-0-1; 1-1-1; 1-2-1; 2-1-2.

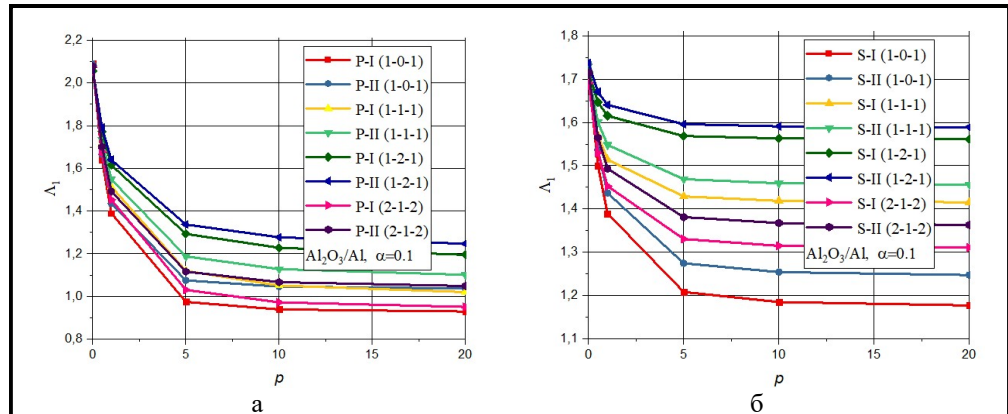


Рис. 6. Власні частоти пористої сендвіч-пластини, ГУ-I: а – Р-ФГМ; б – S-ФГМ

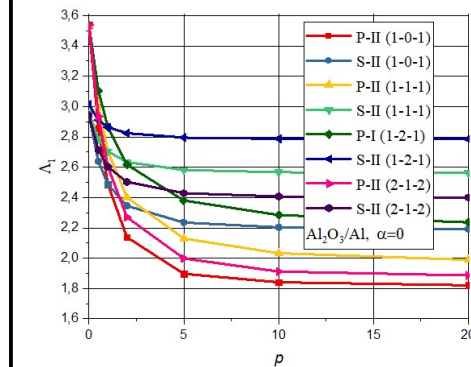


Рис. 7. Власні частоти пластини, закріпленої вздовж всього контуру, (Р-ФГМ та S-ФГМ) без пористості

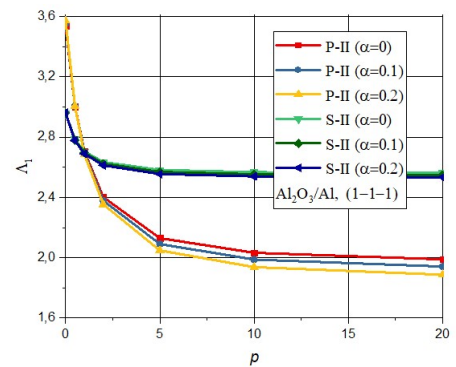


Рис. 8. Вплив коефіцієнта пористості на власні частоти (Р-ФГМ та S-ФГМ) пластини для схеми (1-1-1)

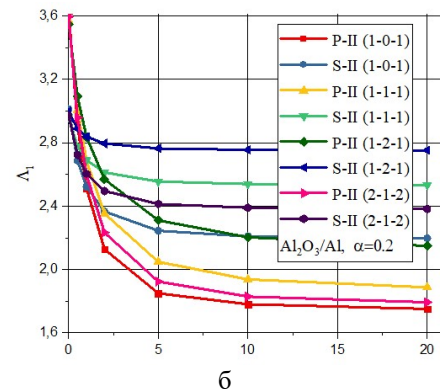
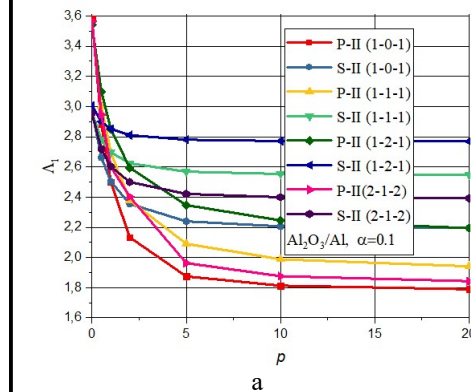


Рис. 9. Власні частоти пористої сендвіч-пластини, закріпленої вздовж всього контуру (ГУ-II): а –  $\alpha=0,1$ ; б –  $\alpha=0,2$

Із наведених графіків випливає, що частоти мають більші значення при сигмовидному законі зміни ефективних властивостей матеріалу для всіх розглянутих схем величин товщин. На зменшення власних частот найбільш суттєво впливають значення градієнтного індексу від 0 до 5. Зміна параметра пористості несуттєво впливає на значення частот. Більш наглядно це видно з графіка рис. 8.

**Перспективи подальших досліджень**

Найбільш суттєвими подальшими дослідженнями розглянутої теми, на думку авторів, є використання теорій вищого порядку, розробка методів дослідження стійкості ФГ сендвіч-пластин при сумісному температурному й механічному навантаженні.

**Висновки**

Запропоновано аналітично-числовий підхід для дослідження стійкості і коливань пористих ФГ пластин, який базується на використанні теорії R-функцій та варіаційних методів.

Показано і підтверджено на прикладах те, що розроблений метод дозволяє досліджувати пористі ФГ пластини з урахуванням неоднорідного докритичного стану й складною геометричною формою.

Вивчено вплив показника степеня розподілу об'ємних часток складових матеріалів і різних законів розподілення пористості (P-ФГМ та S-ФГМ) на власні частоти й критичне навантаження

Одержано аналітичні вирази для обчислення ефективних властивостей ФГМ для рівномірного й нерівномірного розподілення пористості для сигмовидного і степеневих законів.

Проаналізовано стійкість і коливання пластини складної геометричної форми під дією сил у серединній площині.

**Література**

1. Thai H.-T., Kim S.-E. A review of theories for the modeling and analysis of functionally graded plates and shells. *Composite Structures*. 2015. Vol. 128. P. 70–86. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.03.010>.
2. Swaminathan K., Naveenkumar D. T., Zenkour A. M., Carrera E. Stress, vibration and buckling analyses of FGV plates – A state-of-the-art review. *Composite Structures*. 2015. Vol. 120. P. 10–31. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2014.09.070>.
3. Kumar Y. The Rayleigh–Ritz method for linear dynamic, static and buckling behavior of beams, shells and plates: A literature review. *Journal of Vibration and Control*. 2017. Vol. 24. Iss. 7. P. 1205–1227. <https://doi.org/10.1177/1077546317694724>.
4. Elmeiche N., Tounsi A., Ziane N., Mechab I., El Abbes A. B. A new hyperbolic shear deformation theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2011. Vol. 53. Iss. 4. P. 237–247. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2011.01.004>.
5. Neves A. M. A., Ferreira A. J. M., Carrera E., Cinefra M., Jorge R. M. N., Soares C. M. M. Buckling analysis of sandwich plates with functionally graded skins using a new quasi-3D hyperbolic sine shear deformation theory and collocation with radial basis functions. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2012. Vol. 92. Iss. 9. P. 749–766. <https://doi.org/10.1002/zamm.201100186>.
6. Yaghoobi H., Yaghoobi P. Buckling analysis of sandwich plates with FGM face sheets resting on elastic foundation with various boundary conditions: An analytical approach. *Meccanica*. 2013. Vol. 48. P. 2019–2035. <https://doi.org/10.1007/s11012-013-9720-0>.
7. Singh S. J., Harsha S. P. Exact solution for free vibration and buckling of sandwich S-FGM plates on Pasternak elastic foundation with various boundary conditions. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. 2019. Vol. 19. No. 3. Paper 1950028. <https://doi.org/10.1142/S0219455419500287>.
8. Li D., Zhu H., Gong X. Buckling analysis of functionally graded sandwich plates under both mechanical and thermal loads. *Materials*. 2021. Vol. 14. Iss. 23. Paper 7194. <https://doi.org/10.3390/ma14237194>.
9. Zencour A. M. A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates: Part 2 – Buckling and free vibration. *International Journal of Solids and Structures*. 2005. Vol. 42. Iss. 18–19. P. 5243–5258. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2005.02.016>.
10. Daikh A. A., Zenkour A. M. Free vibration and buckling of porous power-law and sigmoid functionally graded sandwich plates using a simple higher-order shear deformation theory. *Materials Research Express*. 2019. Vol. 6. No. 11. Paper 115707. <https://doi.org/10.1088/2053-1591/ab48a9>.
11. Le C. I., Tran Q. D., Pham V. N., Nguyen D. K. Free vibration and buckling of bidirectional functionally graded sandwich plates using an efficient Q9 element. *Vietnam Journal of Mechanics*. 2021. Vol. 43. No. 3. P. 277–295. <https://doi.org/10.15625/0866-7136/15981>.
12. Kurpa L., Mazur O., Tkachenko V. Dynamical stability and parametrical vibrations of the laminated plates with complex shape. *Latin American Journal of Solids and Structures*. 2013. Vol. 10. Iss. 1. P. 175–188. <https://doi.org/10.1590/S1679-78252013000100017>.
13. Awrejcewicz J., Kurpa L., Mazur O. Dynamical instability of laminated plates with external cutout. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2016. Vol. 81. P. 103–114. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2016.01.002>.

14. Awrejcewicz J., Kurpa L., Shmatko T. Analysis of geometrically nonlinear vibrations of functionally graded shallow shells of a complex shape. *Latin American Journal of Solids and Structures*. 2017. Vol. 14. Iss. 9. P. 1648–1668. <https://doi.org/10.1590/1679-78253817>.
15. Kurpa L. V., Shmatko T. V. Investigation of free vibrations and stability of functionally graded three-layer plates by using the R-functions theory and variational methods. *Journal of Mathematical Sciences*. 2020. Vol. 249. No. 3. P. 496–520. <https://doi.org/10.1007/s10958-020-04955-2>.
16. Kurpa L. V., Shmatko T. V. Buckling and free vibration analysis of functionally graded sandwich plates and shallow shells by the Ritz method and the R-functions theory. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*. 2020. Vol. 235. Iss. 20. P. 4582–4593. <https://doi.org/10.1177/0954406220936304>.
17. Shen H.-S. Functionally graded materials. Nonlinear analysis of plates and shells. USA, Boca Raton: CRC Press, 2011. 280 p. <https://doi.org/10.1201/9781420092578>.
18. Рвачев В. Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. Киев: Наукова думка, 1982. 552 с.
19. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. М: Гостехиздат, 1957. 464 с.

Надійшла до редакції 07.08.2023