

УДК 539.3

ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ РУХУ ПОВ'ЯЗАНИХ МАЯТНИКІВ

Ю. Е. Сурганова

surganova.julia@gmail.com

ORCID: 0000-0002-6540-3025

Ю. В. Міхлін,

д-р фіз.-мат. наук

yuri.mikhlin@gmail.com

ORCID: 0000-0002-1780-9346

Національний технічний
університет «Харківський
політехнічний інститут»
61002, Україна, м. Харків,
вул. Кирпичова, 2

У статті представлено дослідження динаміки коливальної дисипативної системи двох пружно пов'язаних маятників у магнітному полі. Досліджено нелінійні нормальні моди коливань маятникової системи з урахуванням опору середовища, моменту демпфування, створеного пружним елементом. Розглянуто систему з двома ступенями свободи, в якій маси маятників суттєво розрізняються, що приводить до можливості появи локалізації коливань. У наступному дослідженні співвідношення мас обрано як малий параметр. Для наближеного розрахунку магнітних сил використовується апроксимація Паде, яка найбільше задовольняє експериментальним даним. Це наближення забезпечує дуже точний опис магнітного збудження. Наявність зовнішніх впливів у вигляді магнітних сил і різного типу навантажень, які існують в багатьох інженерних системах, значно ускладнює аналіз мод коливань нелінійних систем. Проведено дослідження нелінійних нормальних мод коливань у даній системі, причому одна з мод є пов'язаним режимом, а друга – локалізованою. Моди коливань побудовано методом багатьох масштабів. Вивчено як регулярну, так і складну поведінку при зміні параметрів системи. Вплив цих параметрів досліджено для малих і значних початкових кутів нахилу маятника. Аналітичний розв'язок, який базується на методі Рунге-Кутти четвертого порядку, порівняно з результатами чисельного моделювання. Початкові умови для розрахунку мод коливань визначалися аналітичним розв'язком. Чисельне моделювання, яке складається з побудови фазових діаграм, траєкторій у конфігураційному просторі й амплітудно-частотних характеристик, дозволяє оцінити динаміку системи, що може бути як регулярною, так і складною. Стійкість режимів коливань досліджено за допомогою тестів чисельного аналізу, які є реалізацією критерію стійкості Ляпунова. При цьому стійкість режимів коливань визначається шляхом оцінки ортогональних відхилень відповідних траєкторій режимів коливань у конфігураційному просторі.

Ключові слова: пов'язані маятники, магнітні сили, нелінійні нормальні моди коливань, метод багатьох масштабів, стійкість.

Вступ

Моделі маятників часто використовуються у нелінійній динаміці. Одним із найважливіших етапів вивчення динаміки нелінійних систем із декількома незалежними змінними є дослідження нелінійних нормальних мод коливань (ННМ). Велике значення для інженерних застосувань має встановлення можливості локалізації коливань, що іноді шкодить нормальному функціонуванню машин й апаратів. Крім того, важливим і складним уявляється дослідження коливань систем, що знаходяться під впливом магнітних сил.

В останніх публікаціях [1–3] проведено теоретичне й експериментальне дослідження динаміки двох поєднаних маятників у магнітному полі. Крім того, ННМ коливань у такій системі без врахування впливу дисипативних сил для випадку, коли маси цих з'єднаних маятників істотно розрізняються, розглянуто в [4]. Зауважимо, що відтепер різні аспекти теорії ННМ та різноманітні випадки її застосування представлено в багатьох публікаціях. Основні елементи цієї теорії та посилання на публікації можна знайти, зокрема, в оглядах [5, 6] і книзі [7]. Слід також відзначити, що проблема локалізації коливань дуже важлива як для теорії, так і для інженерної практики, з огляду на це вона досліджувалася в останні десятиліття в численних публікаціях, серед яких варто виокремити [8–10].

Спираючись на те, що присутня в системі суттєва нелінійність зумовлює необхідність для аналізу форм коливань застосовувати асимптотичні методи. Враховуючи сказане, використано метод багатьох масштабів, що може бути успішно застосований саме до дисипативних систем, а також чисельне моделювання. Крім побудови мод коливань, досліджено їх стійкість, а також зроблено висновки про вплив зміни параметрів системи на її динаміку.

Статтю ліцензовано на умовах Ліцензії Creative Commons «Attribution» («Атрибуція») 4.0 Міжнародна.
© Ю. Е. Сурганова, Ю. В. Міхлін, 2023

Основна частина

Досліджувана математична модель руху пов'язаних маятників представлена на рис. 1, де $m_1 = \mu m_2 = \mu m$, μ – відношення мас двох маятників; ε – умовний малий параметр; $\varepsilon = 1$; m – маса більшого маятника; $k_l^* = \frac{k_l}{I}$, $I = 4ms^2$ – жорсткість пов'язаного пружного елемента; $k_l^*(\varphi_1 - \varphi_2)$ – момент крутильної деформації пружного елемента; γ – інтенсивність магнітного збудження; $M_{mag_{1,2}}^* = \frac{M_{mag_{1,2}}}{I}$, $M_{mag_{1,2}}$ – момент магнітного впливу; $C_{1,2}^* = \frac{C_{1,2}}{I}$, $C_{1,2}$ – коефіцієнт опору сил

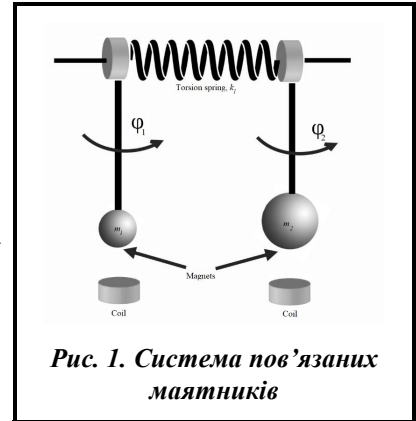


Рис. 1. Система пов'язаних маятників

в'язкого повітря; $C_e^* = \frac{C_e}{I}$, C_e – коефіцієнт демпфуючого моменту, створеного пружним елементом; $r^* \sin \varphi$ – момент повернення сили тяжіння; $r^* = \frac{r}{I}$; s – відстань між центром мас маятника і віссю обертання. Система описується системою диференціальних рівнянь (1).

$$\begin{cases} \varepsilon \mu \ddot{\varphi}_1 = \varepsilon \gamma M_{mag_1}^* - \varepsilon C_1^* \dot{\varphi}_1 - \varepsilon C_e^* (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) - \varepsilon \mu r^* \sin \varphi_1 - k_l^* (\varphi_1 - \varphi_2), \\ \ddot{\varphi}_2 = \varepsilon \gamma M_{mag_2}^* - \varepsilon C_2^* \dot{\varphi}_2 - \varepsilon C_e^* (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) - r^* \sin \varphi_2 - k_l^* (\varphi_2 - \varphi_1). \end{cases} \quad (1)$$

Відмітимо, що одиниці виміру параметрів такі: m вимірюється в кг, s – в м, r – в Н·м, I – в кг·м², k_l – в Н·м/рад, φ – в рад. (у дужках будуть також наведені їх значення в градусах, ε та γ – безрозмірні величини, а $g=9,81$ м/с². У числових розрахунках початкові швидкості нульові: $\dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0$.

З огляду на те, що досліджуємо поведінку системи, коли кути повороту маятників не дуже значні, використаємо розкладання синусів у ряд Маклорена. У розкладанні будемо застосовувати лише члени не вище третього порядку.

Скористаємось Паде-апроксимацією магнітного впливу у формі (2).

$$M_{mag}(\varphi) = \left(a_0 + \frac{a_1 \varphi + a_2 \varphi^3}{1 + b_1 \varphi^2 + b_2 \varphi^4} \right) \text{sign}(\varphi), \quad (2)$$

де a_0, a_1, a_2, b_1, b_2 – коефіцієнти моделі, отримані за допомогою методу найменших квадратів для того, щоб найкраще задовольнити експериментальні дані [1–3]. Порівняння цієї апроксимації з експериментальними даними представлено на рис. 2.

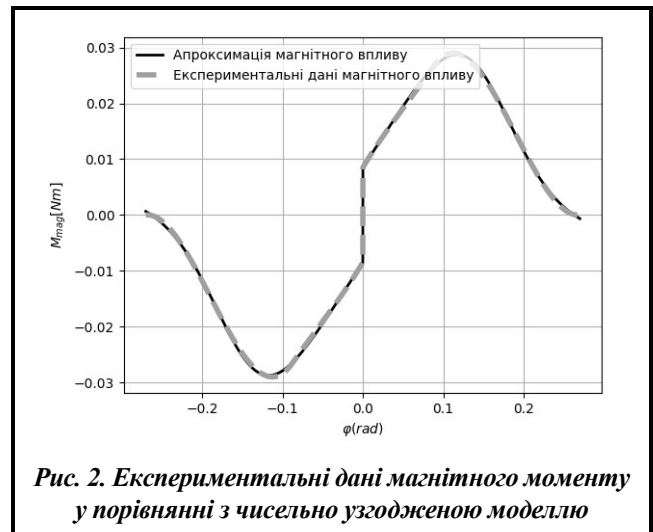


Рис. 2. Експериментальні дані магнітного моменту у порівнянні з чисельно узгодженою моделлю

Представимо розв'язок (1) у вигляді розкладання за малим параметром

$$\varphi_1 = \varphi_{10} + \varepsilon \varphi_{11} + O(\varepsilon^2); \quad \varphi_2 = \varphi_{20} + \varepsilon \varphi_{21} + O(\varepsilon^2), \quad (3)$$

де $\varphi_{10}, \varphi_{20}$ – розв'язок породжувальної лінійної системи; $\varphi_{11}, \varphi_{21}$ – розв'язок першого наближення за малим параметру ε .

Використовується метод багатьох масштабів [10]. Відповідно до нього вводимо часові масштаби, а саме:

$$T_0 = \tau; \quad T_1 = \varepsilon \cdot \tau; \quad \tau = \omega_0 \cdot t, \quad (4)$$

де T_0 – швидкий час; T_1 – повільний час.

Виконуючи стандартні перетворення цього методу, отримуємо системи рівнянь (5) і (6), відповідні двом першим наближенням за малим параметром ε :

$$\varepsilon^0 : \begin{cases} -k_l^*(\varphi_{10} - \varphi_{20}) = 0, \\ \omega_0^2 \frac{\partial^2 \varphi_{20}}{\partial T_0^2} = -r^* \varphi_{20} - k_l^*(\varphi_{20} - \varphi_{10}). \end{cases} \quad (5)$$

$$\varepsilon^1 : \begin{cases} \mu \omega_0^2 \frac{\partial^2 \varphi_{20}}{\partial T_0^2} = \gamma M_{mag1}^* - C_1^* \frac{\partial \varphi_{10}}{\partial T_0} - \mu r^* \varphi_{10} - k_l^*(\varphi_{11} - \varphi_{21}), \\ \omega_0^2 \left(2 \frac{\partial^2 \varphi_{20}}{\partial T_0 \partial T_1} + \frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial T_0^2} \right) = \gamma M_{mag2}^* - C_2^* \frac{\partial \varphi_{20}}{\partial T_0} - r^*(\varphi_{21} - \frac{1}{6} \varphi_{20}^3) - k_l^*(\varphi_{21} - \varphi_{11}). \end{cases} \quad (6)$$

Розв'язком (5) є $\varphi_{10} = \varphi_{20} = A_1(T_1) \cos(T_0 + v)$, що відповідає *синфазній пов'язаній формі коливань*. Магнітний момент, що діє на перший маятник, представлено рядом Фур'є згідно із співвідношенням (7) (для магнітного впливу на другий маятник будемо використовувати коефіцієнти $h_i, i = \overline{(0,6)}$)

$$M_{mag1}^* \approx \frac{1}{I} \left(\frac{g_0}{2} + \sum_{i=1}^6 g_i \cos i(T_0 + v) \right), \quad (7)$$

$$\text{де } g_i = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \text{sign}(\varphi_{10}) \left(a_0 + \frac{a_1 \varphi_{10} + a_2 \varphi_{10}^3}{1 + b_1 \varphi_{10}^2 + b_2 \varphi_{10}^4} \right) \cos(i(T_0 + v)) dT_0, i = \overline{(0,6)}.$$

Щоб запобігти появі секулярних доданків у розв'язку системи рівнянь (6), виключаємо доданки, що містять функції $\cos(T_0 + v)$ та $\sin(T_0 + v)$ у правій частині цих рівнянь, і в результаті отримуємо рівняння (8) та (9)

$$\cos(T_0 + v): 2\omega_0^2 A_1 \frac{\partial v}{\partial T_1} + \frac{\gamma}{I} (g_1 + h_1) + \frac{r^* A_1}{8} = 0; \quad (8)$$

$$\sin(T_0 + v): 2\omega_0^2 \frac{\partial A_1}{\partial T_1} + A_1 (C_1^* + C_2^*) = 0. \quad (9)$$

$$\text{Звідси випливає, що } A_1 = e^{A_3 - \frac{(C_1^* + C_2^*) T_1}{2\omega_0^2}}; v = \frac{-\gamma(g_1 + h_1)}{I(C_1^* + C_2^*)} e^{\frac{(C_1^* + C_2^*) T_1}{2\omega_0^2} - A_3} + \frac{\omega_0^2}{16(C_1^* + C_2^*)} e^{2A_3 - \frac{(C_1^* + C_2^*) T_1}{\omega_0^2}},$$

де A_3 – довільна константа, що визначається початковим відхиленням маятника. Порівняння аналітичного розв'язку з чисельним, застосованим до базової системи (1) з використанням методу Рунге–Кутти 4-го порядку, проведено для початкових значень змінних, які встановлюються з аналітичного рішення. Таке порівняння показує хорошу точність аналітичної апроксимації при достатньо малих значеннях параметра μ , і для таких значень початкових кутів маятників, які не перевищують приблизно 60° .

Для дослідження впливу параметрів і початкових умов системи на *стійкість синфазної моди* зафіксуємо параметри таким чином: $\gamma=0,1; k_f=1; m=1; s=1,5; C_1=3,1 \times 10^{-5}; C_2=7,2 \times 10^{-5}; C_e=13,736 \times 10^{-5}$, а параметр A_3 , що відповідає за початковий кут нахилу маятника, задамо як масив елементів, розташованих через рівні інтервали в діапазоні від -2 до 2. Крім того, змінюватимемо значення коефіцієнта відношення мас двох маятників в інтервалі від 0,01 до 0,25. Кількість елементів у заданих масивах становить 50 і 25 відповідно. Спираючись на це, проведено дослідження зростання кількості нестійких вузлів відносно тривалості часу моделювання поведінки системи із вказаними параметрами. Аналіз показав, що кількість нестійких вузлів припиняє зростати після тривалості симуляції системи у 1000 секунд. Як при тривалості імітації у 1000 секунд, так і у 6000 секунд кількість унікальних значень кутів не перевищує 28. Тому, вивчаючи стійкість моделі, обмежимося часом моделювання у 1000 секунд.

Проаналізуємо стійкість пов'язаної моди коливань залежно від параметрів A_3, μ шляхом чисельної реалізації критерію стійкості за Ляпуновим, який було запропоновано й описано в роботі [11]. Стійкість моди коливань визначається ортогональними відхиленнями від її траєкторії в конфігураційному просторі, а початкові умови для відхилень від траєкторії – через початкові значення кутів двох маятників на формі коливань як $\tilde{\varphi}_{1,2}(0) = 1,01 \cdot \varphi_{1,2}(0)$. Після цього розраховуються вказані відхилення при зміні часу. Нестійкість моди коливань фіксуємо, коли відхилення за модулем $|\tilde{\varphi}_{1,2}(t)|$ перевищують значення $\rho|\varphi_{1,2}(0)|$. Як показано в [11], значення ρ можуть бути обрані в достатньо широкому діапазоні

чисел, що перевищують 1. У даній роботі прийнято $\rho=1,1$. Беручи до уваги те, що ми досліджуємо стійкість мод коливань залежно від значень параметрів A_3, μ , то на відповідній площині обираємо сітку значень у прямокутнику $A_3 \in [-2, 2], \mu \in [0,01, 0,25]$. Результати розрахунків представлені на рис. 3, де виділено області нестійкості.

Розглянемо приклади стійких і нестійких вузлів сітки з рис. 3. Візьмемо $\varphi_1(0)=30,14^\circ, \varphi_2(0)=30,454^\circ$ і відповідні значення $\mu=\{0,01, 0,1\}$. Результат такого моделювання представлено на рис. 4.

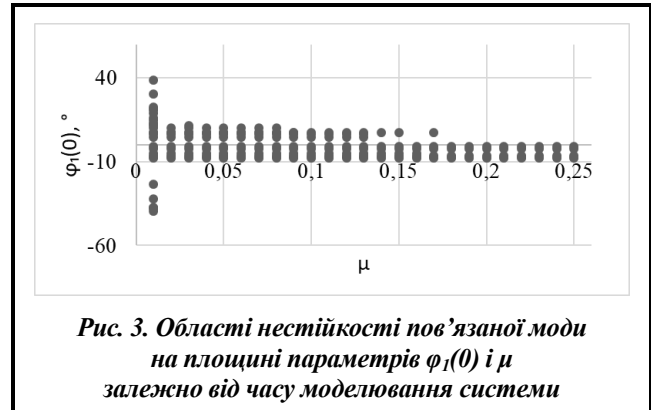


Рис. 3. Области нестійкості пов'язаної моди на площині параметрів $\varphi_1(0)$ і μ залежно від часу моделювання системи

Результати розрахунків демонструють, що пов'язана мода є нестійкою при малих значеннях параметру μ , якщо початкові значення кутів малі. Це впливає з того, що при малих початкових кутах вплив магнітних сил суттєво перевищує вплив пружних сил у системі. Іншими словами, збільшення величини коефіцієнта пропорційності мас призводить до зменшення блукання траєкторій у конфігураційному просторі поблизу моди.

Наступним етапом дослідимо вплив відстані від центра мас маятників до осі обертання на стійкість моди. Для цього зазначимо, що параметр $s \in [0,1, 4]$. Розглянемо 25 рівновіддалених точок із заданого діапазону. Результат представимо на рис. 5.

На рис. 5 у легенді зазначено значення μ . Також розглянемо тривимірний рис. 6, який зображує області нестійкості досліджуваної моди коливань у просторі параметрів $\varphi_2(0), \mu, s$.

Синфазна мода помітніше виражена при більшій відстані між центром мас і віссю обертання при невеликому початковому відхиленні маятників, оскільки вплив магнітного моменту менший. Цей режим спостерігається при збільшенні як відстані, так і маси меншого маятника. Проте при суттєвому зростанні коефіцієнта відношення маятників виникають області нестійкості і при значних відстанях, як бачимо на рис. 6 та 7. Наведемо приклад нестійкості на рис. 8 і 9 відповідно.

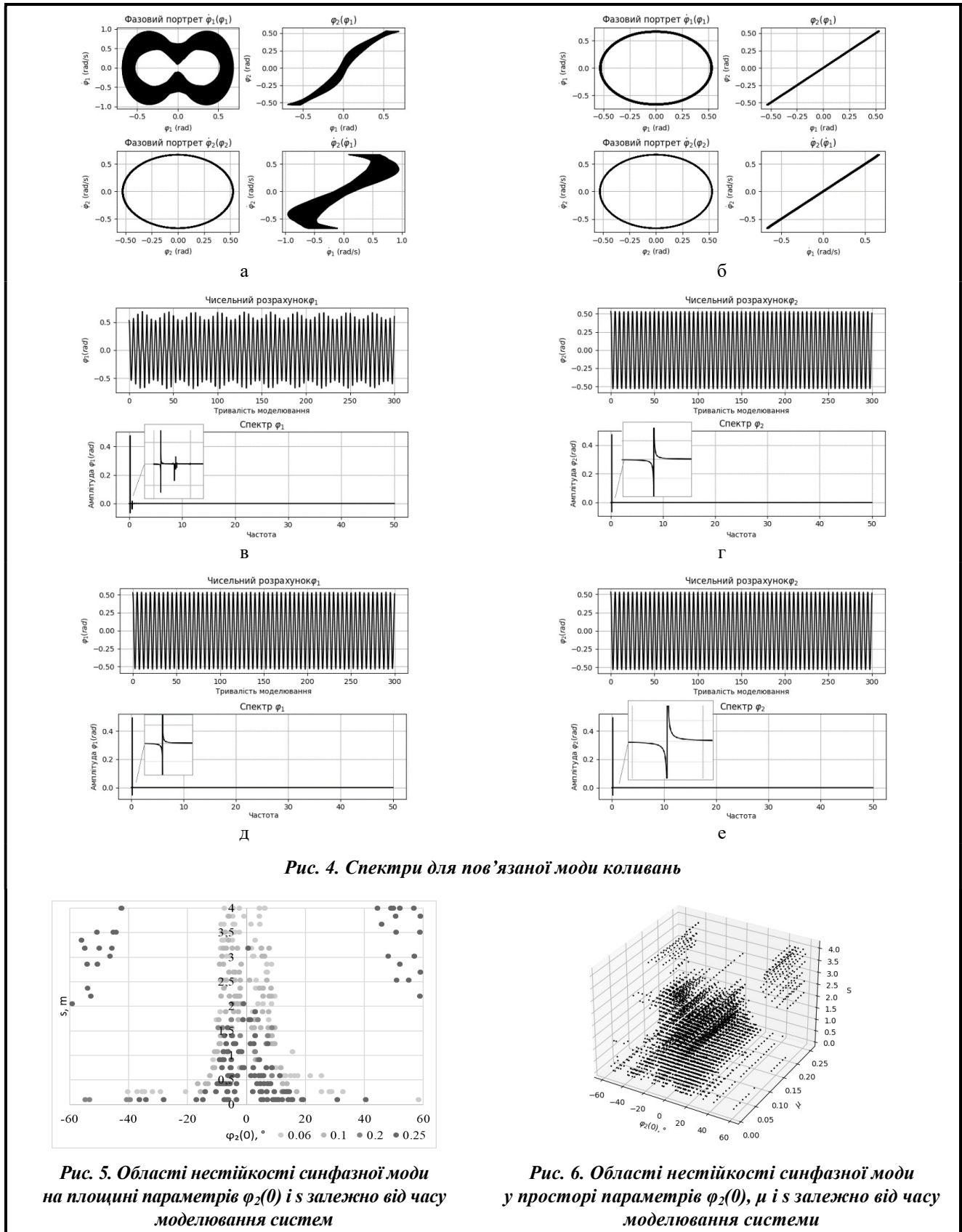
На рис. 7 $\varphi_1(0)=-52,8515^\circ; \varphi_2(0)=-52,88^\circ, s=2,2125; \mu=0,25$. При цьому на рис. 7 можна побачити виникнення биття, що є результатом додавання власних і вимушених коливань поблизу резонансу, при однакових початкових енергіях. Амплітуда коливань змінюється від мінімального значення рівної різниці вихідних амплітуд до максимального, що дорівнює сумі амплітуд початкових коливань, і знову ж таки до мінімального значення. Період биття – час повторення даного процесу.

Вивчимо вплив коефіцієнта зв'язку $k_l \in [0,01, 1]$. Із вказаного діапазону було розглянуто 25 рівновіддалених точок. Побудуємо області нестійкості у просторі параметрів $\varphi_2(0), \mu, k_l$ на рис. 8.

На рис. 9 продемонструємо декілька прикладів області нестійкості на площині при різних значеннях параметрів $\varphi_2(0)$ та μ і при фіксованих значеннях k_l (значення подані у легенді до діаграми).

Залишилося дослідити вплив коефіцієнтів дисипації на стійкість пов'язаної форми коливань. Надамо значення усіх коефіцієнтів тертя з діапазону $C_{1,2,e} \in [10^{-7}, 10^{-1}]$ (було розглянуто 25 точок із вказаного інтервалу). Виводити області нестійкості будемо на площині параметрів $\varphi_2(0), \mu$ у просторі параметрів $\varphi_2(0), \mu, C_{1,2,e}$. Результати представимо на рис. 10–11.

Рис. 10 зображує зменшення кількості нестійких вузлів при зростанні величин $C_{1,2,e}$.



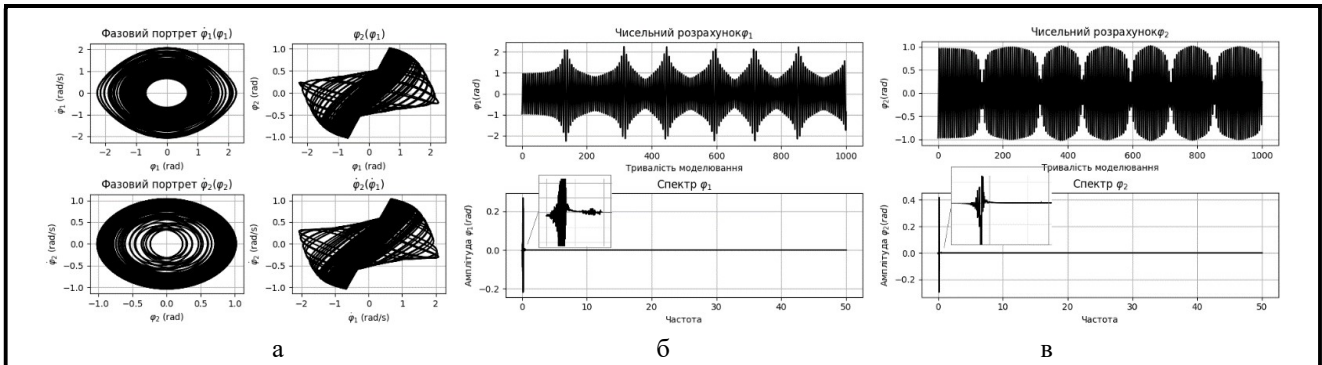


Рис. 7. Спектри для пов'язаної моди коливань

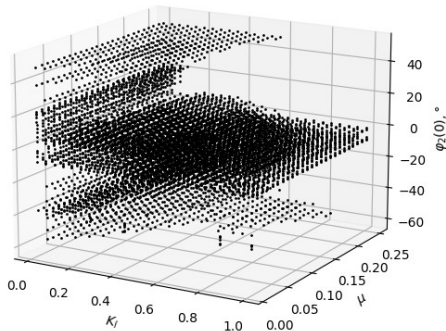


Рис. 8. Области нестійкості синфазної моди у просторі параметрів $\varphi_2(0)$, μ і k_1 залежно від часу моделювання системи

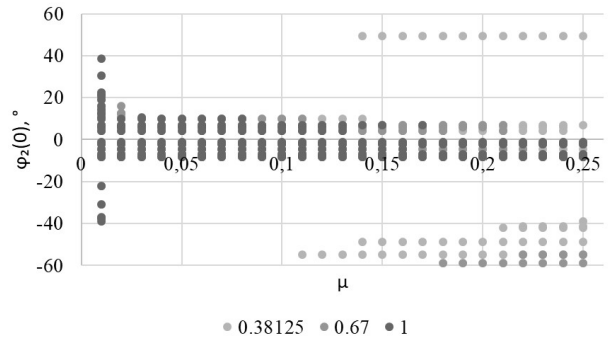


Рис. 9. Области нестійкості синфазної моди на площині параметрів $\varphi_2(0)$ і μ залежно від часу моделювання системи

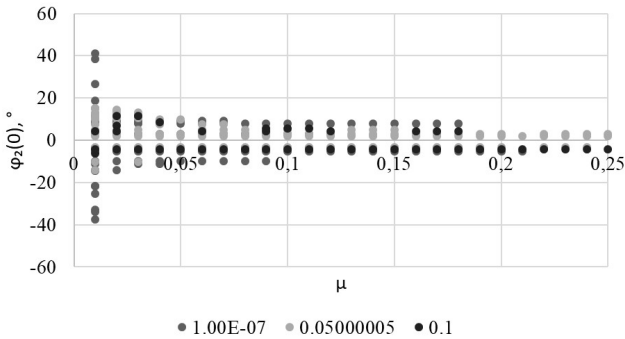


Рис. 10. Области нестійкості синфазної моди на площині параметрів $\varphi_2(0)$ і μ , залежно від часу моделювання системи

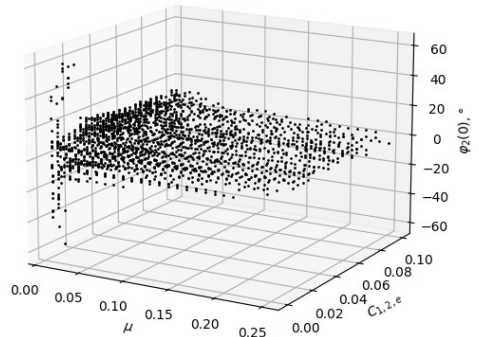


Рис. 11. Области нестійкості синфазної моди у просторі параметрів $\varphi_2(0)$, μ і $C_{1,2,\epsilon}$ залежно від часу моделювання системи

Проведемо тепер дослідження локалізованої моди коливань. Вона може бути аналітично представлена після введення перетворення часу $t = \sqrt{\epsilon}\tau$. Тоді система (1) набуває вигляду (10)

$$\begin{cases} \mu \ddot{\varphi}_1 = \epsilon \gamma M_{mag1}^* - \epsilon C_1^* \dot{\varphi}_1 - \epsilon C_e^* (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) - \epsilon \mu^* \sin \varphi_1 - k_l^* (\varphi_1 - \varphi_2), \\ \ddot{\varphi}_2 = \epsilon^2 \gamma M_{mag2}^* - \epsilon^2 C_2^* \dot{\varphi}_2 - \epsilon^2 C_e^* (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) - \epsilon r^* \sin \varphi_2 - \epsilon k_l^* (\varphi_2 - \varphi_1). \end{cases} \quad (10)$$

Аналогічно, як і у випадку синфазної моди, введемо відповідно до методу багатьох масштабів швидкі й повільні часові масштаби, розкладемо функції, що знаходимо, за малим параметром ϵ , подібно формулам (3) і (4). Запишемо дві системи, що відповідають двом наближенням за малим параметром:

$$\varepsilon^0 : \begin{cases} \mu\omega_0^2 \frac{\partial^2 \varphi_{10}}{\partial T_0^2} = -k_l^* (\varphi_{10} - \varphi_{20}), \\ \omega_0^2 \frac{\partial^2 \varphi_{20}}{\partial T_0^2} = 0. \end{cases} \quad (11)$$

$$\varepsilon^1 : \begin{cases} \mu\omega_0^2 \left(2 \frac{\partial^2 \varphi_{20}}{\partial T_0 \partial T_1} + \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial T_0^2} \right) = \gamma M_{mag1}^* - C_1^* \frac{\partial \varphi_{10}}{\partial T_0} - C_e^* \left(\frac{\partial \varphi_{10}}{\partial T_0} - \frac{\partial \varphi_{20}}{\partial T_0} \right) - \mu r^* \varphi_{10} - k_l^* (\varphi_{11} - \varphi_{21}), \\ \omega_0^2 \left(2 \frac{\partial^2 \varphi_{20}}{\partial T_0 \partial T_1} + \frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial T_0^2} \right) = -r^* \varphi_{20} - k_l^* (\varphi_{20} - \varphi_{10}). \end{cases} \quad (12)$$

Рішенням (11) є $\varphi_{20}=0$, $\varphi_{10} = A_1(T_1) \cos(T_0 + v)$, $\omega_0^2 = \frac{k_l^*}{\mu}$. Магнітний момент представимо у вигляді (7). Знову виключаємо доданки, що містять $\cos(T_0 + v)$ і $\sin(T_0 + v)$, тому

$$\cos(T_0 + v): \quad 2\mu\omega_0^2 A_1 \frac{\partial v}{\partial T_1} + \frac{\gamma}{I} g_1 - \mu A_1 (r^* + k_l^*) = 0; \quad (13)$$

$$\sin(T_0 + v): \quad 2\mu\omega_0^2 \frac{\partial A_1}{\partial T_1} + A_1 (C_1^* + C_e^*) = 0. \quad (14)$$

$$\text{Звідси випливає, що } A_1 = e^{\frac{A_3 - (C_1^* + C_e^*)T_1}{2k_l^*}}; \quad v = \frac{-\gamma g_1}{C_1^* + C_e^*} e^{\frac{(C_1^* + C_e^*)T_1}{2k_l^*} - A_3} + \frac{(r^* + k_l^*)T_1}{2\omega_0^2}.$$

При дослідженні впливу параметрів A_3 , який визначається початковими кутами маятників, і μ на локалізований режим ми прийшли до таких саме висновків, як і при вивченні синфазної моди. Зі збільшенням величини коефіцієнта пропорційності мас маятників блукання поблизу режиму зменшуються і локалізована мода стає більш визначеною. Зрозуміло, що при малих початкових кутах локалізованого режиму не існує, оскільки вплив магнітного моменту дуже значний.

Висновки

Стійка синфазна (пов'язана) мода коливань існує не на всьому діапазоні початкових умов. Вона є нестійкою при малих початкових значеннях кутів відхилення маятників, якщо маси маятників суттєво розрізняються. Збільшення коефіцієнта пропорційності мас маятників призводить до зменшення блукання траєкторій поблизу моди. Синфазна мода більш виражена при більшій відстані між центром мас і віссю обертання, оскільки вплив магнітного моменту менший. Цей режим спостерігається при зростанні як маси меншого маятника, так і відстані. У більшості розглянутих випадків при великих значеннях відстані від осі обертання до центра мас маятника і коефіцієнта співвідношення мас збільшення значення коефіцієнта зв'язку призводить до стабілізації синфазної моди і зменшення блукань траєкторій поблизу такої моди. Збільшення дисипації не завжди стягує траєкторії до моди коливань.

Як і синфазна мода, локалізована існує не на всьому діапазоні початкових відхилень маятників. Зі збільшенням величини коефіцієнта пропорційності мас маятників блукання поблизу режиму зменшуються і мода стає більш визначеною. З'ясувалося, як і для пов'язаної моди, що локалізація проявляється при зростанні зв'язку та відстані між центром мас і віссю обертання маятників або при збільшенні як зв'язку, так і коефіцієнта пропорційності мас маятників. Чималі коефіцієнти пропорційності мас разом зі великими значеннями зв'язку і відстані при збільшенні коефіцієнтів тертя зменшують блукання траєкторій поблизу локалізованої моди, або стягують траєкторії до цього режиму.

Література

1. Polczyński K., Wijata A., Awrejcewicz J., Wasilewski G. Numerical and experimental study of dynamics of two pendulums under a magnetic field. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. Part I: Journal of Systems and Control Engineering*. 2019. Vol. 233. Iss. 4. P. 441–453. <https://doi.org/10.1177/0959651819828878>.
2. Wijata A., Polczyński K., Awrejcewicz J. Theoretical and numerical analysis of regular one-side oscillations in a single pendulum system driven by a magnetic field. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2021. Vol. 150. 107229. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2020.107229>.
3. Polczyński K., Skurativskiy S., Bednarek M., Awrejcewicz J. Nonlinear oscillations of coupled pendulums subjected to an external magnetic stimulus. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2021. Vol. 154. 107560. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2020.107560>.
4. Surganova Yu. E., Mikhlin Yu. V. Localized and non-localized nonlinear normal modes in a system of two coupled pendulums under a magnetic field. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2022. Vol. 147. 104182. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2022.104182>.
5. Mikhlin Yu. V., Avramov K. V. Nonlinear normal modes for vibrating mechanical systems. review of theoretical developments. *Applied Mechanics Reviews*. 2010. Vol. 63. Iss. 6. 060802. <https://doi.org/10.1115/1.4003825>.
6. Avramov K. V., Mikhlin Yu. V. Review of applications of nonlinear normal modes for vibrating mechanical systems. *Applied Mechanics Reviews*. 2013. Vol. 65. Iss. 2. 020801. <https://doi.org/10.1115/1.4023533>.
7. Kerschen G. (ed.) *Modal Analysis of Nonlinear Mechanical Systems*. Vienna: Springer, 2014. <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-7091-1791-0>.
8. Manevitch L. I., Smirnov V. V. Limiting phase trajectories and the origin of energy localization in nonlinear oscillatory chains. *Physical Review E*. 2010. Vol. 82. Iss. 3. 036602. <https://doi.org/10.1103/physreve.82.036602>.
9. Vakakis A. F., Gendelman O. V., Bergman L., McFarland D. M., Kerschen G., Lee Y. S. Nonlinear targeted energy transfer in mechanical and structural systems I. In: *Solid Mechanics and its Applications*. Vol. 156. Springer, 2008. P. 1–1033.
10. Nayfeh A. H., Mook D. T. *Nonlinear oscillations*. John Wiley & Sons, 1995. 720 p. <https://doi.org/10.1002/9783527617586>.
11. Mikhlin Yu. V., Shmatko T. V., Manucharyan G. V. Lyapunov definition and stability of regular or chaotic vibration modes in systems with several equilibrium positions. *Computers & Structures*. 2004. Vol. 82. Iss. 31–32. P. 2733–2742. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2004.03.082>.

Надійшла до редакції 16.10.2023