УДК 539.3

НЕЛІНІЙНЕ ДЕФОРМУВАННЯ ЦИЛІНДРІВ ІЗ МАТЕРІАЛІВ, ЩО НЕОДНАКОВО ОПИРАЮТЬСЯ РОЗТЯГУ І СТИСКУ

[1] **О. З. Галішин**, д-р техн. наук
plast@inmech.kiev.ua
ORCID: 0000-0003-0286-872X

[1, 2] **С. М. Склепус**, д-р техн. наук
snsklepus@ukr.net,
ORCID: 0000-0002-4119-4310

[1] Інститут механіки
ім. С. П. Тимошенка НАН України,
03057, Україна, м. Київ, вул. Нестерова, 3

[2] Інститут проблем машинобудування
ім. А. М. Підгорного НАН України,
61046, Україна, м. Харків,
вул. Пожарського, 2/10

Розроблено новий чисельно-аналітичний метод розв'язування фізично нелінійних задач деформування осесиметрично навантажених циліндрів із матеріалів, що неоднаково опираються розтягу і стиску. Для лінеаризації задачі використано метод неперервного продовження за параметром. Для варіаційної постановки лінеаризованої задачі побудовано функціонал у формі Лагранжа, заданий на кінематично можливих швидкостях переміщень. Для знаходження основних невідомих задачі фізично нелінійного деформування циліндра сформульовано задачу Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь. Задачу Коші розв'язано методом Рунґе-Кутта-Мерсона з автоматичним вибором кроку. Початкові умови встановлювалися шляхом розв'язання задачі лінійно-пружного деформування. Праві частини диференціальних рівнянь при фіксованих значеннях параметра навантаження, що відповідають схемі Рунґе-Кутта-Мерсона, знайдено із розв'язку варіаційної задачі для функціонала у формі Лагранжа. Варіаційні задачі розв'язано методом Рітца. Розв'язано тестову задачу для нелінійно-пружного деформування тонкої циліндричної оболонки. Отримано збіг просторового розв'язку з оболонковим. Досліджено фізично нелінійне деформування товстостінного циліндра. Показано, що неврахування різної поведінки матеріалу за розтягу і стиску призводить до значних похибок у результатах розрахунку параметрів напружено-деформованого стану.

***Ключові слова**: товстостінний циліндр, різноопірність розтягу і стиску, фізично нелінійне деформування, метод неперервного продовження за параметром.*

Вступ

Осесиметрично навантажені циліндри широко використовуються в сучасній техніці, наприклад, як судини під тиском (гідравлічні балони, стовбури гармат, патрубки, котли, паливні баки), корпуси акумуляторів, балони для авіаційно-космічної промисловості, трубопроводів ядерних реакторів тощо.

Для багатьох матеріалів (легкі сплави, суперсплави, сірий чавун, полімери, композити та ін.) характерна неоднакова опірність розтягу і стиску за межами лінійної пружності [1–3]. Задача деформування тіл із таких матеріалів стає фізично нелінійною. Однак при дослідженні фізично нелінійного деформування циліндрів вчені стикаються з певними математичними труднощами, пов'язаними з моделюванням нелінійної поведінки матеріалу, розробкою методів лінеаризації та розв'язання нелінійних крайових задач.

Вивченню фізично нелінійного деформування (нелінійно-пружні, пружно-пластичні задачі, задачі повзучості) циліндрів і циліндричних оболонок присвячені, наприклад, роботи [4–19]. Лише одиничні публікації [11–19] досліджують нелінійне деформування циліндрів й оболонок із матеріалів, що неоднаково опираються розтягу і стиску. Так, у роботі [11] розв'язок задачі нелінійно-пружного згину циліндричної оболонки із матеріалу, що неоднаково опирається розтягу і стиску, отримано шляхом інтегрування задачі Коші методом Рунге-Кутта-Мерсона з одночасним п'ятикратним розв'язанням на кожному кроці крайових задач для вихідних рівнянь методом дискретної ортогоналізації. У монографії [12, Ч.1] задачі пружно-пластичного й нелінійно-пружного деформування товстостінних циліндрів зводилися до розв'язання початково-крайових задач. Для інтегрування рівнянь рівноваги використовувалися методи дискретної ортогоналізації С. К. Годунова і руху по навантаженню в поєднанні з ітераційним уточненням розв'язку. У статті [13] виконано порівняльний аналіз просторового й оболонкового розв'язків осесиметричної задачі повзучості й пошкоджуваності циліндра, що знаходиться під дією зовнішнього тиску. Як у просторовій, так і в оболонковій постановці задача зводилася до початково-крайової задачі. Інтегрування за часом виконувалося методом Рунге-Кутта-Мерсона, а крайові задачі на кожному кроці розв'язувалися методом R-функцій і методом дискретної ортогоналізації С. К. Годунова.

Теорія і методи розрахунку нелінійного деформування циліндрів із нетрадиційних матеріалів у даний час розвиваються. Метою роботи є розробка чисельно-аналітичного методу розв’язування задач фізично нелінійного деформування циліндрів із матеріалів, які неоднаково опираються розтягу і стиску, що базується на використанні методів неперервного продовження за параметром, Рітца і Рунге-Кутта-Мерсона.

Постановка задачі і метод розв’язування

Розглянемо осесиметрично навантажений ізотропний порожнистий циліндр скінченної довжини у циліндричній системі координат $Or\varphi z$. Вісь Oz співпадає з віссю симетрії.

Для постановки й лінеаризації задачі фізично нелінійного деформування циліндрів використовуватимемо метод неперервного продовження розв’язку за параметром [20]. Введемо до розгляду параметр $t \in [t_0, t_*]$, який пов’язаний із зовнішнім навантаженням, що діє на циліндр. У даному випадку t_0 – значення параметра, при якому задача деформування є лінійною, а t_* відповідає заданому рівню навантаження. Позначимо крапкою над символом похідну за параметром t. Далі по тексту статті похідні за параметром t називатимемо швидкостями.

Приймемо, що компоненти $\dot{\varepsilon}_{kl}$ тензора швидкостей деформацій складаються з швидкостей лінійних $\dot{e}_{kl}$, що підпорядковуються закону Гука, і нелінійних $\dot{\eta}_{kl}$ складових, тобто

$$\dot{\varepsilon}_{rr} = \dot{e}_{rr} + \dot{\eta}_{rr}, \quad \dot{\varepsilon}_{zz} = \dot{e}_{zz} + \dot{\eta}_{zz}, \quad \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi} = \dot{e}_{\varphi\varphi} + \dot{p}_{\varphi\varphi}, \quad \dot{\varepsilon}_{rz} = \dot{e}_{rz} + \dot{\eta}_{rz}. \tag{1}$$

Продиференціювавши за параметром навантаження t залежності Коші в циліндричних координатах [21], отримаємо зв’язок між швидкостями деформацій і швидкостями переміщень

$$\dot{\varepsilon}_{rr} = \dot{u}_{r,r}, \quad \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi} = \dot{u}_r / r, \quad \dot{\varepsilon}_{zz} = \dot{u}_{z,z}, \quad \dot{\gamma}_{rz} = 2\dot{\varepsilon}_{rz} = \dot{u}_{r,z} + \dot{u}_{z,r}, \tag{2}$$

де $\dot{u}_r, \dot{u}_z$ – швидкості переміщень вздовж осей Or та Oz.

Аналогічно, продиференціювавши за t закон Гука [21] і врахувавши (1), отримаємо зв'язок між швидкостями напружень і швидкостями деформацій

$$\begin{gathered}
\dot{\sigma}_{rr} = \lambda\left(\dot{\varepsilon}_{zz} + \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi} - \dot{\eta}_{zz} - \dot{\eta}_{\varphi\varphi}\right) + \lambda_1\left(\dot{\varepsilon}_{rr} - \dot{\eta}_{rr}\right), \\
\dot{\sigma}_{zz} = \lambda\left(\dot{\varepsilon}_{rr} + \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi} - \dot{\eta}_{rr} - \dot{\eta}_{\varphi\varphi}\right) + \lambda_1\left(\dot{\varepsilon}_{zz} - \dot{\eta}_{zz}\right), \\
\dot{\sigma}_{\varphi\varphi} = \lambda\left(\dot{\varepsilon}_{rr} + \dot{\varepsilon}_{zz} - \dot{\eta}_{rr} - \dot{\eta}_{zz}\right) + \lambda_1\left(\dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi} - \dot{\eta}_{\varphi\varphi}\right), \\
\dot{\sigma}_{rz} = G\left(\dot{\gamma}_{rz} - 2\dot{\eta}_{rz}\right),
\end{gathered} \tag{3}$$

де $\lambda = \dfrac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}$, $\lambda_1 = \lambda + 2G$; E, G, ν – модуль Юнга, модуль зсуву і коефіцієнт Пуассона матеріалу.

Для опису нелінійної поведінки матеріалу скористаємося тензорно-лінійними визначальними співвідношеннями, що описують неоднакову поведінку матеріалу за розтягу і стиску [22]

$$\dot{\eta}_{ij} = n\sigma_e^{n-1}\dot{\sigma}_e\left(\frac{C\sigma_{ij} + AI_1\delta_{ij}}{\sigma_{e2}} + B\delta_{ij}\right), \ (i, j = 1,2,3), \tag{4}$$

де $\sigma_e = \sigma_{e2} + \sigma_{e1}$ – еквівалентне напруження; $\sigma_{e1} = BI_1$, $\sigma_{e2} = \sqrt{AI_1^2 + CI_2}$; $I_1 = \delta_{ij}\sigma_{ij}$, $I_2 = \sigma_{ij}\sigma_{ij}$ – лінійний та квадратичний інваріанти тензора напружень; A, B, C – параметри матеріалу, які визначаються із експериментальних даних.

Якщо досліджується пружно-пластичне деформування, то співвідношення (4) повинні доповнюватися умовою пластичності.

Розглянемо методику визначення параметрів матеріалу A, B, C у співвідношеннях (4). Для цього необхідно мати експериментальні дані для зразків матеріалу, наприклад, при одновісному напруженому стані й при чистому крученні.

Припустимо, що в результаті експериментів на одновісний розтяг (σ_{11}>0) встановлено, що у напрямку прикладеного навантаження

$$\eta_{11} = K_+\sigma_{11}^n, \tag{5}$$

а на одновісний стиск (σ_{11}<0)

$$\eta_{11} = -K_{-}\left|\sigma_{11}\right|^{n}. \tag{6}$$

Аналогічно для чистого кручення ($\sigma_{12}\neq 0$)

$$2\eta_{12} = K_0\sigma_{12}^{n}, \tag{7}$$

де $K_{+}, K_{-}, \hat{E}_0, n$ – константи матеріалу.

У випадку простого навантаження рівняння (4) можуть бути проінтегровані й записані у вигляді

$$\eta_{ij} = \sigma_e^{n}\left(\frac{C\sigma_{ij} + AI_1\delta_{ij}}{\sigma_{e2}} + B\delta_{ij}\right). \tag{8}$$

Із співвідношень (8) для одновісного розтягу будемо мати

$$\eta_{11} = \sigma_{11}^{n}\left(\sqrt{A+C} + B\right)^{n+1}. \tag{9}$$

У випадку стиску

$$\eta_{11} = -\left|\sigma_{11}\right|^{n}\left(\sqrt{A+C} - B\right)^{n+1}. \tag{10}$$

Для чистого кручення буде справедлива рівність

$$2\eta_{12} = \sigma_{12}^{n}\left(\sqrt{2C}\right)^{n+1}. \tag{11}$$

Далі, зіставивши попарно (5) і (9), (6) та (10), (7) і (11), отримаємо наступну систему рівнянь

$$\left(\sqrt{A+C} + B\right)^{n+1} = K_{+}, \quad \left(\sqrt{A+C} - B\right)^{n+1} = K_{-}, \quad \left(\sqrt{2C}\right)^{n+1} = K_0,$$

з якої нескладно знайти параметри матеріалу

$$A = 0{,}25\left(K_{+}^{\frac{1}{n+1}} + K_{-}^{\frac{1}{n+1}}\right)^{2} - C, \quad B = 0{,}5\left(K_{+}^{\frac{1}{n+1}} - K_{-}^{\frac{1}{n+1}}\right), \quad C = 0{,}5K_0^{\frac{2}{n+1}}.$$

Для варіаційної постановки задачі використовуватимемо функціонал у формі Лагранжа, заданий на кінематично можливих швидкостях переміщень, який для тіла обертання, має вигляд [12]

$$\Lambda(\dot{u}_r, \dot{u}_z) = 0.5\iint_{\Omega}\int_0^{2\pi}\left[\dot{\sigma}_{rr}(\dot{\varepsilon}_{rr} - \dot{\eta}_{rr}) + \dot{\sigma}_{zz}(\dot{\varepsilon}_{zz} - \dot{\eta}_{zz}) + \dot{\sigma}_{\varphi\varphi}(\dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi} - \dot{\eta}_{\varphi\varphi}) + \right.$$

$$\left. + \dot{\sigma}_{rz}(\dot{\gamma}_{rz} - 2\dot{\eta}_{rz})\right] r\,dr\,dz\,d\varphi \;-\; \int_{\partial\Omega_p}\int_0^{2\pi}\left(\dot{P}_n^0\dot{u}_n + \dot{P}_\tau^0\dot{u}_\tau\right)d\partial\Omega\,d\varphi, \tag{12}$$

де $\partial\Omega_p$ – частина межі $\partial\Omega$, до якої прикладені поверхневі навантаження; $P_n{}^0$, $P_\tau{}^0$ – нормальна й дотична складові зовнішніх навантажень; n, τ – зовнішня нормаль і дотична до контуру $\partial\Omega_p$; $\dot{u}_n = \dot{u}_r n_r + \dot{u}_z n_z$, $\dot{u}_\tau = \dot{u}_z n_r - \dot{u}_r n_z$; n_r, n_z – напрямні косинуси нормалі n.

У формулі (12) швидкості нелінійних складових $\dot{\eta}_{rr}, \dot{\eta}_{zz}, \dot{\eta}_{\varphi\varphi}, \dot{\eta}_{rz}$ вважаються заданими для кожного фіксованого значення параметра t і не варіюються.

Підставивши (2), (3) у (12) і проінтегрувавши по кутовій координаті, отримаємо наступний функціонал:

$$\Lambda = 0.5\iint_{\Omega}\left[\lambda_1\left(\dot{u}_{r,r}^2 + \dot{u}_{z,z}^2 + \frac{\dot{u}_r^2}{r^2}\right) + G\left(\dot{u}_{r,z} + \dot{u}_{z,r}\right)^2 + 2\lambda\left(\dot{u}_{r,r}\dot{u}_{z,z} + \frac{\dot{u}_r\left(\dot{u}_{r,r} + \dot{u}_{z,z}\right)}{r}\right)\right] r dr dz -$$

$$- \iint_{\Omega}\left[\dot{u}_{r,r}\dot{N}_r^f + \dot{u}_{z,z}\dot{N}_z^f + \frac{\dot{u}_r\dot{N}_\varphi^f}{r} + \dot{N}_{rz}^f\left(\dot{u}_{r,z} + \dot{u}_{z,r}\right)\right] r dr dz - \int_{\partial\Omega_p}\left(\dot{P}_n^0\dot{u}_n + \dot{P}_\tau^0\dot{u}_\tau\right)d\partial\Omega, \tag{13}$$

де $\dot{N}_r^f = \left(\lambda_1\dot{\eta}_{rr} + \lambda\left(\dot{\eta}_{zz} + \dot{\eta}_{\varphi\varphi}\right)\right)$, $\dot{N}_z^f = \left(\lambda_1\dot{\eta}_{zz} + \lambda\left(\dot{\eta}_{rr} + \dot{\eta}_{\varphi\varphi}\right)\right)$, $\dot{N}_\varphi^f = \left(\lambda_1\dot{\eta}_{\varphi\varphi} + \lambda\left(\dot{\eta}_{rr} + \dot{\eta}_{zz}\right)\right)$, $\dot{N}_{rz}^f = 2G\dot{\eta}_{rz}$ – «фіктивні» сили, обумовлені нелінійними складовими деформації.

Розв’язок варіаційного рівняння $\delta\Lambda=0$ дає розподіл полів швидкостей переміщень, для фіксованих значень параметра $t>t_0$, у будь-якій точці циліндра. Основні невідомі задачі нелінійного деформування можуть бути знайдені шляхом інтегрування відповідних полів швидкостей із розв’язання задачі Коші за параметром t для системи звичайних диференціальних рівнянь виду

$$\frac{du_r}{dt}=\dot{u}_r\,,\quad \frac{du_z}{dt}=\dot{u}_z\,,$$

$$\frac{d\varepsilon_{rr}}{dt}=\dot{u}_{r,r}\,,\quad \frac{d\varepsilon_{zz}}{dt}=\dot{u}_{z,z}\,,\quad \frac{d\varepsilon_{\varphi\varphi}}{dt}=\frac{\dot{u}_r}{r}\,,\quad \frac{d\gamma_{rz}}{dt}=2\frac{d\varepsilon_{rz}}{dt}=\dot{u}_{r,z}+\dot{u}_{z,r}\,,$$

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dt}=\lambda_1\left(\dot{\varepsilon}_{rr}-\dot{\eta}_{rr}\right)+\lambda\left(\dot{\varepsilon}_{zz}+\dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi}-\dot{\eta}_{zz}-\dot{\eta}_{\varphi\varphi}\right),$$

$$\frac{d\sigma_{zz}}{dt}=\lambda_1\left(\dot{\varepsilon}_{zz}-\dot{\eta}_{zz}\right)+\lambda\left(\dot{\varepsilon}_{rr}+\dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi}-\dot{\eta}_{rr}-\dot{\eta}_{\varphi\varphi}\right),$$

$$\frac{d\sigma_{\varphi\varphi}}{dt}=\lambda_1\left(\dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi}-\dot{\eta}_{\varphi\varphi}\right)+\lambda\left(\dot{\varepsilon}_{rr}+\dot{\varepsilon}_{zz}-\dot{\eta}_{rr}-\dot{\eta}_{zz}\right),$$

$$\frac{d\sigma_{rz}}{dt}=G\left(\dot{\gamma}_{rz}-2\dot{\eta}_{rz}\right),$$

$$\frac{d\eta_{rr}}{dt}=\dot{\eta}_{rr}\,,\quad \frac{dp_{zz}}{dt}=\dot{\eta}_{zz}\,,\quad \frac{dp_{\varphi\varphi}}{dt}=\dot{\eta}_{\varphi\varphi}\,,\quad \frac{dp_{rz}}{dt}=\dot{\eta}_{rz}\,. \tag{14}$$

Нелінійність системи (14) зумовлена нелінійністю визначальних співвідношень (4). Початкові умови для шуканих функцій знаходяться із розв’язку задачі лінійно-пружного деформування. Для цього можна використати функціонал виду (13), в якому замінити швидкості функцій самими функціями і прийняти, що «фіктивні» сили $\dot{N}_r^f=\dot{N}_z^f=\dot{N}_\varphi^f=\dot{N}_{rz}^f=0$.

Початкову задачу для системи рівнянь (14) розв’язуватимемо методом Рунґе-Кутта-Мерсона з автоматичним вибором кроку [23]. Для обчислення правих частини рівнянь (14) при фіксованих значеннях $t>t_0$, що відповідають схемі Рунґе-Кутта-Мерсона, необхідно п’ять разів розв’язувати варіаційні задачі для функціонала (13) на кожному кроці. Варіаційні задачі розв’язувалися методом Рітца.

Числові результати

Як тестовий приклад розглянемо нелінійно-пружне деформування тонкої циліндричної оболонки із сірого чавуна СЧ 15-32, яка навантажена внутрішнім тиском інтенсивністю P_{inn}=4 МПа. Оболонка жорстко закріплена на одному краю і вільна від закріплення та зусиль на іншому. Геометричні розміри є такими: довжина l=0,2 м, радіус внутрішньої поверхні r_1=0,195 м, радіус зовнішньої поверхні r_2=0,205 м.

Для сірого чавуну експериментально встановлена рівність модулів пружності за розтягу і стиску на початкових лінійних ділянках діаграм деформування. При більшому навантаженні проявляється нелінійний характер деформування, за якого діаграми деформування за розтягу і стиску суттєво відрізняються [1].

Модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона матеріалу: $E=1{,}07\times10^5$ МПа, ν=0,22. Константи матеріалу для нелінійних складових деформацій [12, Ч.1]: $K_+=1{,}53\times10^{-12{,}4}$ МПа$^{-n}$, $K_-=8{,}1\times10^{-14{,}4}$ МПа$^{-n}$, $K_0=9{,}07\times10^{-12{,}4}$ МПа$^{-n}$, n=4,4.

Для навантаження приймемо лінійний закон

$$P_{inn}\ (t)=P_1+tP_2\,, \tag{15}$$

де $t\in\left[0,t_*\right]$.

Помістимо початок координат на закріпленому краї. Тоді кінематичні граничні умови матимуть вигляд

$$\dot{u}_r=\dot{u}_z=0 \text{ для } z=0. \tag{16}$$

Послідовності координатних функцій, що задовольняють умови (16), можуть бути записані так:

$$\dot{u}_r=z\Phi_1\,,\ \dot{u}_z=z\Phi_2\,,$$

де $\Phi_1(r,z,t)=\sum_{n=1}^{N_1} C_n^{(1)}(t) f_n^{(1)}(r,z)$, $\Phi_2(r,z,t)=\sum_{n=1}^{N_2} C_n^{(2)}(t) f_n^{(2)}(r,z)$; $C_n^{(1)}$, $C_n^{(2)}$ – невизначені коефіцієнти, які на кожному кроці знаходяться методом Рітца; t – деяке фіксоване значення параметра навантаження; $\left\{f_n^{(1)}\right\}$, $\left\{f_n^{(2)}\right\}$ – системи лінійно незалежних функцій. В цій роботі як $\left\{f_n^{(1)}\right\}$, $\left\{f_n^{(2)}\right\}$ використовувалися бікубічні сплайни Шенберга. Системи сплайнів будувалися на регулярній сітці $N_r \times N_z$, де N_r, N_z – кількість відрізків дискретизації уздовж осей Or та Oz, відповідно.

Швидкості еквівалентних напружень $\dot{\sigma}_e$ у визначальних співвідношеннях, на кожному кроці по t, приймалися сталими і підраховувалися по значеннях напружень і швидкостях напружень на попередньому кроці.

На рис. 1, 2 представлені графіки зміни вздовж осі Oz радіальних $w=u_r(r_0, z)$ й осьових $u_{z0}=u_z(r_0, z)$ переміщень серединної поверхні оболонки $r = r_0 = \dfrac{r_2 - r_1}{2}$.

Штриховими лініями показано результати, отримані у рамках теорії оболонок [11], з використанням співвідношень (4), а суцільними – за допомогою розробленого у статті методу. При його використанні для навантаження у формулі (15) приймали: P_1=0,02 МПа, $P_2=10^{-1}$ МПа, а початковий крок і задана похибка обчислень у методі Рунґе-Кутта-Мерсона дорівнювали: $\Delta t_0=10^{-2}$, $\varepsilon=10^{-5}$.

Із рис. 1, 2 видно, що результати розрахунку переміщень оболонки, отримані по оболонковій і просторовій моделях, майже повністю співпали.

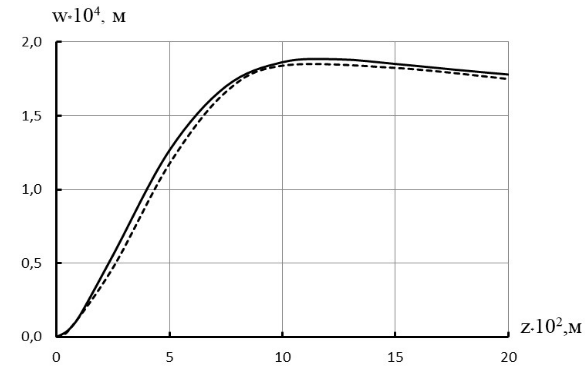

Рис. 1. Радіальні переміщення вздовж осі оболонки

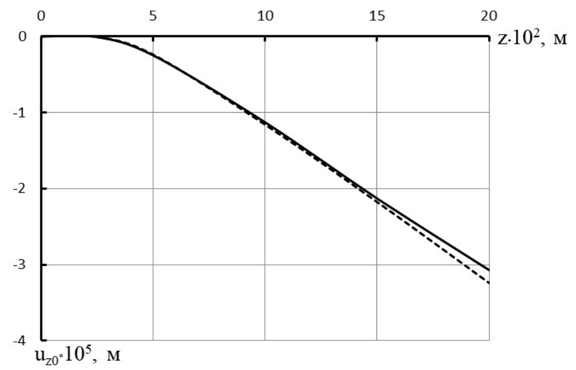

Рис. 2. Осьові переміщення вздовж осі оболонки

Далі розглянемо нелінійне деформування товстостінного порожнистого циліндра із матеріалу СЧ 15-32, навантаженого внутрішнім тиском P_{inn}=22,0 МПа. Геометричні розміри: l=0,2 м, r_1=0,18 м, r_2=0,22 м.

Торці циліндра вільні від навантаження і закріплені таким чином, що радіальні переміщення дорівнюють нулю. Початок координат помістимо в центрі циліндра. Тоді кінематична гранична умова запишеться так

$$\dot{u}_r = 0 \text{ для } z = \pm l/2 . \tag{17}$$

У цьому випадку послідовності координатних функцій мають вигляд

$$\dot{u}_r = \left((l/2)^2 - z^2\right)\Phi_1 , \quad \dot{u}_z = z\Phi_2 . \tag{18}$$

У формулах (18) другий вираз не пов'язаний із задоволенням граничних умов, а забезпечує лише виконання умов симетрії для осьових переміщень.

На рис. 3 представлені графіки зміни вздовж осі циліндра радіальних переміщень серединної поверхні, а на рис. 4 – графіки розподілу осьових напружень $\sigma_{zz}=\sigma_{zz}(r_1, z)$ на внутрішній поверхні циліндра. Суцільними лініями показано результати, отримані на основі визначальних співвідношень (4), а штриховими – на основі спрощеної моделі, побудованої тільки на експериментальних даних, отриманих при одновісному розтягу [12].

Для навантаження у формулі (15) приймали: P_1=1,0 МПа, P_2=0,1 МПа, а початковий крок і задана похибка обчислень у методі Рунґе-Кутта-Мерсона дорівнювали: $\Delta t_0=10^{-2}$, $\varepsilon=10^{-5}$.

Із наведених на рис. 3, 4 графіків видно, що неврахування різної поведінки матеріалу за розтягу і стиску призводить до значних похибок при визначенні компонентів напружено-деформованого стану.

Системи сплайнів в обох розв'язаних задачах будувалися на регулярній сітці розмірності $N_r \times N_z$=5×10. При цьому загальна кількість координатних функцій дорівнювала 208.

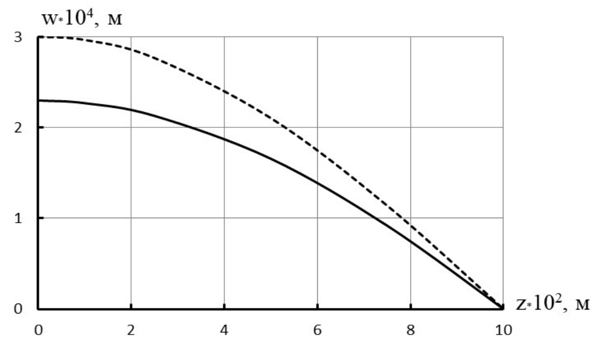

Рис. 3. Радіальні переміщення вздовж осі циліндра

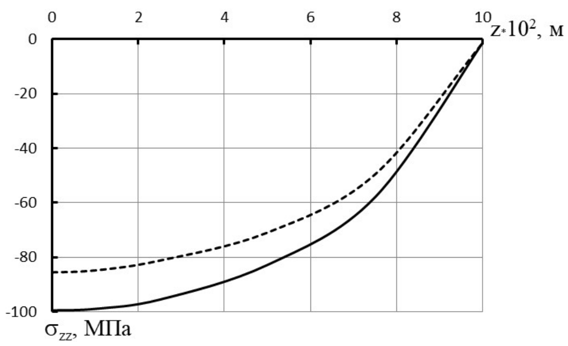

Рис. 4. Осьові напруження вздовж осі циліндра

Висновки

Розроблено чисельно-аналітичний метод розв'язування задач фізично нелінійного деформування циліндрів із матеріалів, що неоднаково опираються розтягу і стиску. Метод базується на спільному використанні методів неперервного продовження за параметром, Рітца та Рунге-Кутта-Мерсона. Розв'язано тестову задачу деформування циліндричної оболонки, отримано збіг з оболонковим розв'язком. Виконано розрахунок нелінійно-пружного деформування товстостінного порожнистого циліндра під дією внутрішнього тиску. Показано, що неврахування різної поведінки матеріалу за розтягу і стиску призводить до значних похибок у результатах розрахунку параметрів НДС.

Література

1. Жуков А. М. Сопротивление некоторых материалов чистому растяжению и сжатию. *Известия АН СССР. Механика твердого тела*. 1986. № 4. С. 197–202.
2. Микляев П. Г., Фридман Я. Б. Анизотропия механических свойств металлов. М.: Металлургия, 1986. 224 с.
3. Саррак В. И., Филиппов Г. А. Эффект разного сопротивления деформации при растяжении и сжатии мартенсита закаленной стали. *Физика металлов и металловедение*. 1977. Т. 44. № 4. С. 858–863.
4. Шевченко Ю. Н., Бабешко М. Е., Пискун В. В., Савченко В. Г. Пространственные задачи термопластичности. Киев: Наукова думка, 1980. 264 с.
5. Подгорный А. Н., Бортовой В. В., Гонтаровский П. П. Коломак В. Д., Львов Г. И., Матюхин Ю. И., Морачковский О. К. Ползучесть элементов машиностроительных конструкций. Киев: Наукова думка, 1984. 264 с.
6. Шевченко Ю. Н., Пискун В. В., Коваленко В. А. Упругопластическое состояние осесимметрично нагруженных слоистых тел вращения из изотропных и ортотропных материалов. *Прикладная механика*. 1992. Т. 28. № 1. С. 31–39.
7. Рвачев В. Л., Синкоп Н. С. Метод R-функций в задачах теории упругости и пластичности. Киев: Наукова думка, 1990. 216 с.
8. Бреславський Д. В., Коритко Ю. М., Морачковський О. К. Модель циклічної термоповзучості для тіл обертання. *Проблеми міцності*. 2011. № 2. С. 33–46.
9. Braam H., Haverkate B. R. W. Creep lifetime prediction of pressurized tubes with continuum damage mechanics. *Structural Integrity: Experiments – Models – Applications*: Proceedings of the 10th Biennial European Conference on Fracture – ECF 10 (20–23 September 1994, Berlin, Federal Republic of Germany). Auspices of the European Structural Integrity Society, 1994. P. 279–284.
10. Галішин О. З., Золочевський О. О., Склепус С. М. Дослідження повзучості та пошкоджуваності порожнистого циліндра на основі просторової та уточненої оболонкової моделей. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2016. Т. 59. № 2. С. 116–124.
11. Золочевский А. А., Дамасевич С. В. Методика расчета нелинейно-упругого деформирования оболочек из материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию. *Известия вузов. Машиностроение*. 1990. № 5. С. 30–34.
12. Золочевский А. А., Склепус А. Н., Склепус С. Н. Нелинейная механика деформируемого твердого тела. Харьков: «Бизнес Инвестор Групп», 2011. 720 с.

13. Zolochevsky A., Sklepus S., Galishin A., Kühhorn A., Kober M. A comparison between the 3D and the Kirchhoff-Love solutions for cylinders under creep-damage conditions. *Technische Mechanik*. 2014. Vol. 34. No. 2. P. 104–113. https://doi.org/10.24352/UB.OVGU-2017-056.
14. Подгорный А. Н., Гонтаровский П. П., Киркач Б. Н., Матюхин Ю. И., Хавин Г. Л. Задачи контактного взаимодействия элементов конструкцій. Киев: Наукова думка, 1989. 232 с.
15. Воронин В. Е., Ширшов А. А. Неустановившаяся ползучесть толстостенной трубы из материала с различными характеристиками при растяжении и сжатии. *Известия вузов. Машиностроение*. 1989. № 8. С. 7–9.
16. Горев Б. В., Цвелодуб И. Ю. Применение энергетических уравнений ползучести к расчету толстостенной цилиндрической трубы. *Динамика сплошной среды*. 1974. Вып. 17. С. 99–105.
17. Gao J., Huang P., Yao W. Analytical and numerical study of temperature stress in the bi-modulus thick cylinder. *Structural Engineering and Mechanics*. 2017. Vol. 64. No. 1. P. 81–92. https://doi.org/10.12989/sem.2017.64.1.081.
18. He X.-T., Wang X.-G., Sun J.-Y. Application of the variational method to the large deformation problem of thin cylindrical shells with different moduli in tension and compression. *Materials.* 2023. Vol. 16 (4). Article 1686. https://doi.org/10.3390/ma16041686.
19. He X.-T., Chang H., Sun J.-Y. Axisymmetric large deformation of thin shallow shells with different moduli in tension and compression. *Thin-Walled Structures.* 2023. Vol. 182. Part B. Article 120297. https://doi.org/10.1016/j.tws.2022.110297.
20. Григолюк Э. И., Шалашилин В. И. Проблемы нелинейного деформирования: метод продолжения решения по параметру в нелинейных задачах механики твердого деформируемого тела. М.: Наука, 1988. 232 с.
21. Демидов С. П. Теория упругости. М.: Высшая школа, 1979. 432 с.
22. Золочевский А. А. Определяющие уравнения нелинейного деформирования с тремя инвариантами напряженного состояния. *Прикладная механика.* 1990. Т. 26. № 3. С. 74–80.
23. Крылов В. И, Бобков В. В., Монастырный П. И. Вычислительные методы. М.: Наука, 1977. 399 с.

Надійшла до редакції 05.10.2023