

УДК 539.3

## АНАЛІЗ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ШАРУ З ДВОМА ЦИЛІНДРИЧНИМИ ШАРНІРАМИ Й ЦИЛІНДРИЧНОЮ ПОРОЖНИНОЮ

**В. Ю. Мірошніков**, д-р техн. наук

[v.miroshnikov@khai.edu](mailto:v.miroshnikov@khai.edu)

ORCID: 0000-0002-9491-0181

**В. П. Пелих**

[venator.verba@gmail.com](mailto:venator.verba@gmail.com)

ORCID: 0009-0007-5301-6697

**О. Ю. Деньщикова**, канд. техн. наук

[Alex\\_day@ukr.net](mailto:Alex_day@ukr.net)

ORCID: 0009-0008-2385-5841

Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут», 61070, Україна, м. Харків, вул. Вадима Манька, 17

*На практиці часто зустрічаються з'єднання у вигляді циліндричних шарнірів. Проте точні методи для розрахунку подібних моделей відсутні. З огляду на це створення алгоритмів розв'язання таких задач є актуальним. У поданій роботі розв'язана просторова задача теорії пружності для нескінченного шару з двома циліндричними шарнірами й циліндричною порожниною, розташованими паралельно одна одній та паралельно поверхням шару. Циліндричні врізні шарніри подані у вигляді порожнин із заданими на них умовами контактного типу (нормальні переміщення й дотичні напруження). На поверхнях шару і на поверхні порожнини задані напруження. Шар розглядається у декартовій системі координат, циліндричні порожнини – у локальних циліндричних. Просторова задача теорії пружності розв'язується за допомогою узагальненого методу Фур'є, які застосовуються до рівнянь Ламе. Задовольняючи граничним умовам, створюється система нескінчених лінійних алгебраїчних рівнянь, до яких застосовується метод редукції. У числовому дослідженні точність виконання граничних умов складала  $10^{-3}$  для значень напружень від 0 до 1 при порядку системи рівнянь (членів ряду Фур'є)  $m=4$ . При збільшенні порядку системи рівнянь точність розрахунків збільшується. Аналіз напруженого стану проведений при різній відстані між опорами. Отримані результати свідчать, що зі збільшенням цієї відстані напруження на опорних циліндричних поверхнях шару і на циліндричній поверхні порожнини зменшуються. Перерозподіл цих напружень відбувається на верхню й нижню поверхні шару, де напруження збільшуються і перевищують задані. Отримані числові результати можуть бути використані при прогнозуванні геометричних параметрів під час проектування.*

**Ключові слова:** шар з циліндричними порожнинами, узагальнений метод Фур'є, умови контактного типу.

### Вступ

При проектуванні деталей машин і механізмів в галузях машино- й авіабудування необхідно мати максимально точний розподіл напруженого стану в тілі. Задля цього важно обрати найбільш точний метод отримання результатів розрахунку.

Під час такого проектування часто зустрічаються моделі зі з'єднанням у вигляді циліндричного шарніру.

На цей час подібні задачі розв'язуються методами будівельної механіки або числовими методами, такими як метод скінчених елементів [1, 2]. Так, у дослідженні [3] використовується метод скінчених елементів для аналізу напружено-деформованого стану півпростору, підкріпленого плитою, з вертикальною циліндричною порожниною, армованою оболонкою. Проте припущення методів будівельної механіки допускають суттєві змінення моделі, а числові методи є наближеними і не враховують нескінчені границі тіла. Це не дає високої точності і впевненості у кінцевому результаті [4].

Застосування аналітичних методів [5, 6] дає точні результати, але вони не можуть враховувати більше трьох просторових граничних поверхонь.

Багато робіт присвячено шару з циліндричною порожниною або включенням, перпендикулярним до їх поверхні [7–11]. Один із підходів до вирішення цієї проблеми полягає в розв'язанні задачі для шару з циліндричною порожниною за припущення ідеальних умов контакту на верхній і нижній межах шару [7]. Подібна ситуація також розглядалася в роботі [8], коли нижня поверхня шару була жорстко закріплена. У цих дослідженнях [7, 8] використовувалися інтегральні перетворення Лапласа й інтегральні синус- і косинус-перетворення Фур'є. Ці методи застосовано до граничних умов і осесиметричних рівнянь руху, які створюють одновимірну векторну неоднорідну крайову задачу. Однак

вони не можуть допомогти ефективно вирішити проблеми з декількома граничними поверхнями і обмежуються розв'язанням лише задач дифракції хвиль.

У дослідженні [9] проведено аналіз напружень перфорованих пластин за допомогою генетичного алгоритму (GA), алгоритму гравітаційного пошуку (GSA) і алгоритму Vat (VA). Однак застосовані методи також є наближеними й не гарантують точності кінцевого результату.

У роботі [10] розглядалося кручення пружного півпростору з вертикальною циліндричною порожниною, коаксіальним штампом. Задача була зведена до інтегральних рівнянь другого роду, що дозволило отримати високоточні значення напруженого стану тіла.

У дослідженні [11] для композитних ламінованих пластин із круглими поперечними вирізами розроблено аналітичний розв'язок на основі методу шарового збивання. Однак методи, застосовані в цих задачах при поперечному розташуванні порожнини або включення [5, 6], не можуть бути використані для розв'язання задачі для шару з поздовжніми циліндричними порожнинами.

Означений тип задач також може бути розв'язаний методами, що використовуються для розрахунку композитних матеріалів. Ці методи дозволяють врахувати нелінійність заданої моделі. При цьому циліндричні шарнірні опори можна розглядати як абсолютно жорсткі елементи. Подібні методи використовуються в роботах [12–15]. Так, у роботі [12] розглядається задача визначення динамічного напруженого стану у двох з'єднаних внахлест стрижнях різної довжини. Навантаження промодельовано поздовжньою силою, прикладеною до одного зі стрижнів. Під час розв'язку використовувалася модель клейового з'єднання Голанда-Рейснера. У роботі [13] вивчено поведінку багатошарових конструкцій під час дії на них динамічного навантаження при поперечному ударі. Для розв'язку використана теорія двовимірної дискретної структури. При цьому розв'язок базується на розкладанні вектора переміщень кожного шару у степеневий ряд. Теоретично отримані результати корелюють з експериментальними даними, отриманими при проведенні досліджень. Роботи [14] і [15] присвячені вивченню напруженого стану в авіаційних багатошарових склопакетах. При цьому в [14] склопакет розглядається як незамкнута циліндрична багатошарова оболонка постійної товщини, а термонапружений стан виникає від дії міжшарових плівкових джерел тепла. Для описаної задачі отримано аналітичне рішення. Робота [15] присвячена створенню методу оцінки міцності багатошарового склопакету при зіткненні з птахом і методики оцінки надлишкового тиску при означеному зіткненні. Для розв'язку застосовується уточнена теорія врахування першого порядку поперечних зсувних деформацій, зменшення товщини й інерції обертання елемента кожного шару.

Загальним недоліком методів, застосованих у роботах [12–15], є неможливість врахування нульових переміщень у зонах контакту з циліндричними шарнірами.

Для врахування поздовжніх неоднорідностей у шарі найбільш ефективним є аналітико-числовий узагальнений метод Фур'є [16], який дозволяє за допомогою функцій переходу між базисними розв'язками рівняння Ламе поєднувати розв'язання задачі в різних системах координат.

Так, за допомогою узагальненого методу Фур'є розв'язані задачі для пружного циліндра з циліндричними порожнинами [17, 18] або циліндричними включеннями [19], а також для півпростору зі сферіdaleю порожниною [20]. Проте для розрахунку шару з циліндричною порожниною необхідно застосовувати формули переходу базисних розв'язків між циліндричною й декартовою системами координат.

Такі формули переходу враховуються для півпростору з циліндричною порожниною в роботі [21], для шару з циліндричною порожниною – у роботах [22, 23], для шару з суцільним циліндричним включенням – у роботі [24] та шару з циліндричною товстостінною трубою – у роботі [25]. Проте в цих роботах [21–25] не застосовуються формули переходу між локальними циліндричними системами координат, що не дозволяє розв'язувати задачу з декількома циліндричними неоднорідностями.

У роботі [26] розв'язана задача для шару з двома циліндричними вирізами в нього опорами, а в роботі [27] – задача для шару з двома суцільними циліндричними включеннями й мішаними граничними умовами. Однак у цих роботах не застосовуються формули переходу між зсунутими циліндрами, що дозволяє розглядати тільки дві циліндричні неоднорідності.

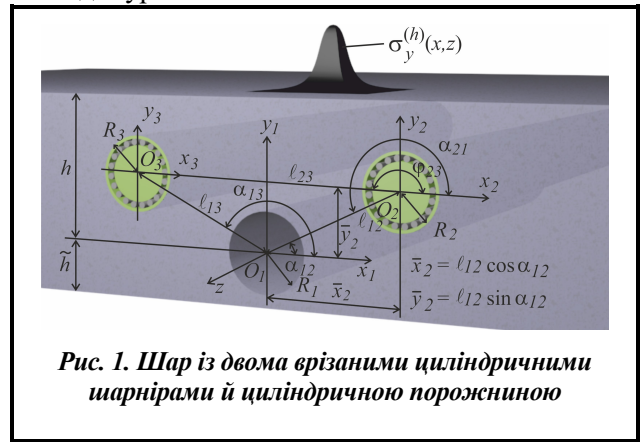
У роботі [28] розв'язана задача теорії пружності для шару жорстко поєднаним із трьома вирізаними опорами, у ній також враховані формули переходу між зсунутими циліндрами, але на поверхнях порожнин застосовується інший вид граничних умов (переміщення). Проте для розрахунку задачі, що містить циліндричний шарнір, необхідно застосувати умови контактного типу.

Зважаючи на наявність розрахункових схем у вигляді шару з циліндричними шарнірами й циліндричною порожниною, створення методу розрахунку таких задач є актуальною. Тож для високо-точного розрахунку буде застосований узагальнений метод Фур'є.

**Постановка задачі**

Пружний однорідний шар розташований на двох циліндричних врізаних у нього шарнірах і має поздовжню циліндричну порожнину, яка паралельна його межах (рис. 1).

Циліндричні врізані шарніри представимо у вигляді порожнин із заданими на них умовами контактного типу. Позначимо радіуси порожнин  $R_p$ , де  $p$  – номер порожнини. Шар представлений у декартовій системі координат  $(x, y, z)$ , порожнини в локальних циліндричних системах координат  $(\rho_p, \varphi_p, z)$ . Відстань до меж шару  $y = h$  та  $y = -\tilde{h}$ .



**Рис. 1. Шар із двома врізаними циліндричними шарнірами й циліндричною порожниною**

Необхідно знайти розв'язок рівняння Ламе  $\Delta \vec{u} + (1 - 2\sigma)^{-1} \nabla \text{div} \vec{u} = 0$ .

На верхній і нижній межах шару, а також на поверхні першої порожнини задані напруження  $F\vec{U}(x, z)|_{y=h} = \vec{F}_h^0(x, z)$ ,  $F\vec{U}(x, z)|_{y=-\tilde{h}} = \vec{F}_{\tilde{h}}^0(x, z)$ ,  $F\vec{U}(\varphi_1, z)|_{\rho_1=R_1} = \vec{U}_0^{(1)}(\varphi_1, z)$  відповідно, де  $\vec{U}$  – переміщення в шарі;

$F\vec{U} = 2 \cdot G \cdot \left[ \frac{\sigma}{1 - 2 \cdot \sigma} \vec{n} \cdot \text{div} \vec{U} + \frac{\partial}{\partial n} \vec{U} + \frac{1}{2} (\vec{n} \times \text{rot} \vec{U}) \right]$  – оператор напруження;

$$\vec{F}_h^0(x, z) = \tau_{yx}^{(h)} \vec{e}_x + \sigma_y^{(h)} \vec{e}_y + \tau_{yz}^{(h)} \vec{e}_z,$$

$$\vec{F}_{\tilde{h}}^0(x, z) = \tau_{yx}^{(\tilde{h})} \vec{e}_x + \sigma_y^{(\tilde{h})} \vec{e}_y + \tau_{yz}^{(\tilde{h})} \vec{e}_z, \quad \text{– відомі функції.} \tag{1}$$

$$\vec{U}_0^{(1)}(\varphi_1, z) = \sigma_\rho^{(1)} \vec{e}_\rho + \tau_{\rho\varphi}^{(1)} \vec{e}_\varphi + \tau_{\rho z}^{(1)} \vec{e}_z$$

На поверхнях порожнин  $p=2, p=3$  задані нормальні переміщення й дотичні напруження

$$\left. \begin{aligned} U_\rho(\varphi_p, z)|_{\rho_p=R_p} &= U_0^{(p)}(\varphi_p, z) \\ \tau_{\rho\varphi}|_{\rho_p=R_p} &= \tau_1^{(p)}(\varphi_p, z) \\ \tau_{\rho z}|_{\rho_p=R_p} &= \tau_2^{(p)}(\varphi_p, z) \end{aligned} \right\} \tag{2}$$

Усі задані функції вважатимемо швидко спадаючими від початку координат по осі  $z$  і осі  $x$ .

**Метод розв'язання**

Оберемо базисні розв'язки рівняння Ламе для декартових і циліндричних систем координат у вигляді [16]

$$\begin{aligned} \vec{u}_k^\pm(x, y, z; \lambda, \mu) &= N_k^{(d)} e^{i(\lambda z + \mu x) \pm \gamma y}; \\ \vec{R}_{k,m}(\rho, \varphi, z; \lambda) &= N_k^{(p)} I_m(\lambda \rho) e^{i(\lambda z + m\varphi)}; \\ \vec{S}_{k,m}(\rho, \varphi, z; \lambda) &= N_k^{(p)} \left[ (\text{sign } \lambda)^m K_m(|\lambda| \rho) \cdot e^{i(\lambda z + m\varphi)} \right]; \quad k = 1, 2, 3; \end{aligned} \tag{3}$$

$$N_1^{(d)} = \frac{1}{\lambda} \nabla; \quad N_2^{(d)} = \frac{4}{\lambda} (\sigma - 1) \vec{e}_2^{(1)} + \frac{1}{\lambda} \nabla(y \cdot); \quad N_3^{(d)} = \frac{i}{\lambda} \text{rot}(\vec{e}_3^{(1)} \cdot); \quad N_1^{(p)} = \frac{1}{\lambda} \nabla;$$

$$N_2^{(p)} = \frac{1}{\lambda} \left[ \nabla \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + 4(\sigma - 1) \left( \nabla - \vec{e}_3^{(2)} \frac{\partial}{\partial z} \right) \right]; \quad N_3^{(p)} = \frac{i}{\lambda} \text{rot}(\vec{e}_3^{(2)} \cdot); \quad \gamma = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}, \quad -\infty < \lambda, \mu < \infty,$$

де  $I_m(x)$ ,  $K_m(x)$  – модифіковані функції Бесселя;  $\vec{R}_{k,m}$ ,  $\vec{S}_{k,m}$  – внутрішні й зовнішні розв'язки рівняння Ламе для циліндру відповідно;  $\vec{u}_k^{(-)}$ ,  $\vec{u}_k^{(+)}$  – розв'язки рівняння Ламе для шару;  $\sigma$  – коефіцієнт Пуассона.

Розв'язання задачі представимо у вигляді [28]

$$\begin{aligned} \bar{U} = & \sum_{p=1}^3 \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_{k,m}^{(p)}(\lambda) \cdot \bar{S}_{k,m}(\rho_p, \varphi_p, z; \lambda) d\lambda + \\ & + \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (H_k(\lambda, \mu) \cdot \bar{u}_k^{(+)}(x, y, z; \lambda, \mu) + \tilde{H}_k(\lambda, \mu) \cdot \bar{u}_k^{(-)}(x, y, z; \lambda, \mu)) d\mu d\lambda \end{aligned} \quad (4)$$

де  $\bar{S}_{k,m}(\rho_p, \varphi_p, z; \lambda)$ ,  $\bar{u}_k^{(+)}(x, y, z; \lambda, \mu)$  і  $\bar{u}_k^{(-)}(x, y, z; \lambda, \mu)$  – базисні розв'язки, задані формулами (3), а невідомі функції  $H_k(\lambda, \mu)$ ,  $\tilde{H}_k(\lambda, \mu)$ ,  $B_{k,m}^{(p)}(\lambda)$  необхідно знайти з граничних умов (1) і (2).

Перехід між базисними розв'язками в різних системах координат здійснюватиметься за допомогою формул [16]:

– для переходу від базисних розв'язків  $\bar{S}_{k,m}$  циліндричної системи координат до розв'язків шару  $\bar{u}_k^{(-)}$  (при  $y > 0$ ) і  $\bar{u}_k^{(+)}$  (при  $y < 0$ )

$$\begin{aligned} \bar{S}_{k,m}(\rho_p, \varphi_p, z; \lambda) = & \frac{(-i)^m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega_{\mp}^m \cdot e^{-i\mu\bar{x}_p \pm \gamma\bar{y}_p} \cdot \bar{u}_k^{(\mp)} \cdot \frac{d\mu}{\gamma}, \quad k = 1, 3; \\ \bar{S}_{2,m}(\rho_p, \varphi_p, z; \lambda) = & \frac{(-i)^m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega_{\mp}^m \cdot \left( \left( \pm m \cdot \mu - \frac{\lambda^2}{\gamma} \pm \lambda^2 \bar{y}_p \right) \bar{u}_1^{(\mp)} \mp \lambda^2 \bar{u}_2^{(\mp)} \pm 4\mu(1-\sigma)\bar{u}_3^{(\mp)} \right) \cdot \frac{e^{-i\mu\bar{x}_p \pm \gamma\bar{y}_p} d\mu}{\gamma^2}, \end{aligned} \quad (5)$$

де  $\gamma = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$ ,  $\omega_{\mp}(\lambda, \mu) = \frac{\mu \mp \gamma}{\lambda}$ ,  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ;

– для переходу від базисних розв'язків  $\bar{u}_k^{(+)}$  і  $\bar{u}_k^{(-)}$  шару до розв'язків  $\bar{R}_{k,m}$  циліндричної системи координат

$$\begin{aligned} \bar{u}_k^{(\pm)}(x, y, z) = & e^{i\mu\bar{x}_p \pm \gamma\bar{y}_p} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} (i \cdot \omega_{\mp})^m \bar{R}_{k,m}, \quad (k = 1, 3); \\ \bar{u}_2^{(\pm)}(x, y, z) = & e^{i\mu\bar{x}_p \pm \gamma\bar{y}_p} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[ (i \cdot \omega_{\mp})^m \cdot \lambda^{-2} \left( (m \cdot \mu + \bar{y}_p \cdot \lambda^2) \cdot \bar{R}_{1,m} \pm \gamma \cdot \bar{R}_{2,m} + 4\mu(1-\sigma)\bar{R}_{3,m} \right) \right], \end{aligned} \quad (6)$$

де  $\bar{R}_{k,m} = \tilde{b}_{k,m}(\rho_p, \lambda) \cdot e^{i(m\varphi_p + \lambda z)}$ ;  $\tilde{b}_{1,n}(\rho, \lambda) = \bar{e}_{\rho} \cdot I'_n(\lambda\rho) + i \cdot I_n(\lambda\rho) \cdot \left( \bar{e}_{\varphi} \frac{n}{\lambda\rho} + \bar{e}_z \right)$ ;

$$\tilde{b}_{2,n}(\rho, \lambda) = \bar{e}_{\rho} \cdot \left[ (4\sigma - 3) \cdot I'_n(\lambda\rho) + \lambda\rho I''_n(\lambda\rho) \right] + \bar{e}_{\varphi} i \cdot m \left( I'_n(\lambda\rho) + \frac{4(\sigma - 1)}{\lambda\rho} I_n(\lambda\rho) \right) + \bar{e}_z i \lambda\rho I'_n(\lambda\rho);$$

$\tilde{b}_{3,n}(\rho, \lambda) = - \left[ \bar{e}_{\rho} \cdot I_n(\lambda\rho) \frac{n}{\lambda\rho} + \bar{e}_{\varphi} \cdot i \cdot I'_n(\lambda\rho) \right]$ ;  $\bar{e}_{\rho}$ ,  $\bar{e}_{\varphi}$ ,  $\bar{e}_z$  – орти в циліндричній системі координат;

– для переходу від базисних розв'язків циліндру з номером  $p$  до розв'язків циліндру з номером  $q$

$$\begin{aligned} \bar{S}_{k,m}(\rho_p, \varphi_p, z; \lambda) = & \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{b}_{k,pq}^{mn}(\rho_q) \cdot e^{i(n\varphi_q + \lambda z)}, \quad k = 1, 2, 3; \\ \bar{b}_{1,pq}^{mn}(\rho_q) = & (-1)^n \tilde{K}_{m-n}(\lambda\ell_{pq}) \cdot e^{i(m-n)\alpha_{pq}} \cdot \tilde{b}_{1,n}(\rho_q, \lambda); \\ \bar{b}_{3,pq}^{mn}(\rho_q) = & (-1)^n \tilde{K}_{m-n}(\lambda\ell_{pq}) \cdot e^{i(m-n)\alpha_{pq}} \cdot \tilde{b}_{3,n}(\rho_q, \lambda); \end{aligned} \quad (7)$$

$$\bar{b}_{2,pq}^{mn}(\rho_q) = (-1)^n \left\{ \tilde{K}_{m-n}(\lambda\ell_{pq}) \cdot \tilde{b}_{2,n}(\rho_q, \lambda) - \frac{\lambda}{2} \ell_{pq} \cdot \left[ \tilde{K}_{m-n+1}(\lambda\ell_{pq}) + \tilde{K}_{m-n-1}(\lambda\ell_{pq}) \right] \cdot \tilde{b}_{1,n}(\rho_q, \lambda) \right\} \cdot e^{i(m-n)\alpha_{pq}},$$

де  $\alpha_{pq}$  – кут між віссю  $x_p$  та відрізком  $\ell_{pq}$ ,  $\tilde{K}_m(x) = (\text{sign}(x))^m \cdot K_m(|x|)$ .

Відстань і кут повороту між паралельно зсунутими порожнинами розраховується за формулами

$$L_{pq} = \begin{cases} \sqrt{L_{1p}^2 + L_{1q}^2 - 2 \cdot L_{1p} \cdot L_{1q} \cdot \cos(\alpha_{1q} - \alpha_{1p})}, & \text{при } \alpha_{1q} \geq \alpha_{1p} \\ \sqrt{L_{1p}^2 + L_{1q}^2 - 2 \cdot L_{1p} \cdot L_{1q} \cdot \cos(\alpha_{1p} - \alpha_{1q})}, & \text{при } \alpha_{1q} < \alpha_{1p} \end{cases};$$

$$\alpha_{pq} = \begin{cases} \alpha_{1p} - \arccos\left(\frac{L_{1p}^2 + L_{pq}^2 - L_{1q}^2}{2 \cdot L_{1p} \cdot L_{pq}}\right) + \pi, & \text{при } \alpha_{1q} \geq \alpha_{1p} \\ \alpha_{1p} - \arccos\left(\frac{L_{1p}^2 + L_{pq}^2 - L_{1q}^2}{2 \cdot L_{1p} \cdot L_{pq}}\right) - \pi, & \text{при } \alpha_{1q} < \alpha_{1p} \end{cases}.$$

Для врахування граничних умов на верхній і нижній межах шару до функції (4) застосуємо формули переходу (5), переписавши базисні розв'язки  $\vec{S}_{k,m}(\rho_p, \varphi_p, z; \lambda)$  у декартовій системі координат через  $\vec{u}_k^{(-)}(x, y, z; \lambda, \mu)$  при  $y=h$  і  $\vec{u}_k^{(+)}(x, y, z; \lambda, \mu)$  при  $y=-\tilde{h}$ . Після цього до правої частини застосуємо оператор напруження. Отриманий вектор прирівнюємо при  $y=h$  заданому  $\vec{F}_h^0(x, z)$ , а при  $y=-\tilde{h}$  – заданому  $\vec{F}_{\tilde{h}}^0(x, z)$ , які попередньо представимо через подвійний інтеграл Фур'є. Звільнившись від інтегралів у правій та лівій частинах, отримаємо шість рівнянь (по одному на кожну проекцію) з 15-ма невідомими  $H_k(\lambda, \mu)$ ,  $\tilde{H}_k(\lambda, \mu)$ ,  $B_{k,m}^{(p)}(\lambda)$ .

Із цієї системи рівнянь знайдемо  $H_k(\lambda, \mu)$  і  $\tilde{H}_k(\lambda, \mu)$  через  $B_{k,m}^{(p)}(\lambda)$ .

Для врахування граничних умов у напруженнях на порожнині  $p=1$  перепишемо базисні розв'язки другого  $\vec{S}_{k,m}(\rho_2, \varphi_2, z; \lambda)$  і третього  $\vec{S}_{k,m}(\rho_3, \varphi_3, z; \lambda)$  циліндрів через базисні розв'язки  $\vec{R}_{k,m}(\rho_1, \varphi_1, z; \lambda)$  першого циліндра, застосувавши формули переходу (7). Також перепишемо базисні розв'язки  $\vec{u}_k^{(-)}(x, y, z; \lambda, \mu)$  і  $\vec{u}_k^{(+)}(x, y, z; \lambda, \mu)$  шару через базисні розв'язки  $\vec{R}_{k,m}(\rho_1, \varphi_1, z; \lambda)$  першого циліндра, застосувавши формули переходу (6). Після цього застосуємо оператор напруження до цієї правої частини. Отриманий вектор при  $\rho_1=R_1$ , прирівнюємо заданому  $\vec{U}_0^{(1)}(\varphi_1, z)$ , представленому через ряд та інтеграл Фур'є. Так отримаємо три рівняння для першого циліндра.

Для врахування граничних умов контактного типу на порожнинах  $p=2, p=3$  перепишемо праву частину (4), за допомогою формул переходу (5) і (6), в локальній циліндричній системі координат кожної порожнини  $p \neq 1$  через базисні розв'язки  $\vec{R}_{k,m}, \vec{S}_{k,m}$ . Після цього ці базисні розв'язки, при  $k=2$  та  $k=3$  перепишемо в напруженнях. Отриманий вектор, при  $\rho_p=R_p$ , прирівнюємо заданим (2), представленим через ряд та інтеграл Фур'є. Так отримаємо шість рівнянь для другого та третього циліндрів.

У результаті для кожного циліндра з номером  $p$  отримаємо по три нескінченні системи лінійних алгебраїчних рівняння відносно  $B_{k,m}^{(p)}(\lambda)$ , які містять  $H_k(\lambda, \mu)$  і  $\tilde{H}_k(\lambda, \mu)$ . Таким чином, ми отримаємо 9 інтегро-алгебраїчних рівнянь із  $H_k(\lambda, \mu)$ ,  $\tilde{H}_k(\lambda, \mu)$ ,  $B_{k,m}^{(p)}(\lambda)$ . Виключивши з цих рівнянь знайдені раніше  $H_k(\lambda, \mu)$  і  $\tilde{H}_k(\lambda, \mu)$  через  $B_{k,m}^{(p)}(\lambda)$  і звільнившись від рядів по  $m$  і інтегралів по  $\lambda$ , отримаємо 9 нескінченних лінійних алгебраїчних рівнянь другого роду для визначення невідомих  $B_{k,m}^{(p)}(\lambda)$ .

Знайдені невідомі  $B_{k,m}^{(p)}(\lambda)$  підставимо у вираз для  $H_k(\lambda, \mu)$  і  $\tilde{H}_k(\lambda, \mu)$ . Так будуть знайдені всі невідомі виразу (4).

До отриманих нескінченних систем рівнянь застосований метод редукції. Точність виконання граничних умов при числовому дослідженні показали високу збіжність розв'язання цієї системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

**Числові дослідження напруженого стану**

Пружний ізотропний шар містить два циліндричних шарніри і циліндричну порожнину (рис. 1). Фізичні характеристики матеріалу (ABS пластик): коефіцієнт Пуассона  $\sigma=0,38$ , модуль пружності  $E=1700 \text{ Н/мм}^2$ . Геометричні параметри моделі:  $R_1=R_2=R_3=5 \text{ мм}$ ,  $h=15 \text{ мм}$ ,  $\tilde{h}=15 \text{ мм}$ ,  $\alpha_{12}=0$ ,  $\alpha_{13}=\pi$ . Відстань між порожнинами обрана у двох варіантах  $L_{12}=L_{13}=30 \text{ мм}$  та  $L_{12}=L_{13}=40 \text{ мм}$ .

На верхній межі шару задані нормальні напруження у вигляді одиничної хвилі  $\sigma_y^{(h)}(x,z) = -10^8 \cdot (z^2 + 10^2)^{-2} \cdot (x^2 + 10^2)^{-2}$  і нульові дотичні напруження  $\tau_{yx}^{(h)} = \tau_{yz}^{(h)} = 0$ , на нижній межі шару – нульові напруження  $\sigma_y^{(\tilde{h})}(x,z) = \tau_{yx}^{(\tilde{h})}(x,z) = \tau_{yz}^{(\tilde{h})}(x,z) = 0$ . На порожнині  $p=1$  задані нульові напруження  $\sigma_\rho^{(1)} = \tau_{\rho\phi}^{(1)} = \tau_{\rho z}^{(1)} = 0$ , на порожнинах  $p=2$ ,  $p=3$  задані умови контактного типу  $U_0^{(p)}(\phi,z) = \tau_1^{(p)}(\phi,z) = \tau_2^{(p)}(\phi,z) = 0$ .

Нескінчена система була зрізана по параметру  $m=4$  (кількість членів ряду Фур'є і порядок системи рівнянь).

Точність виконання граничних умов при вказаних  $m$  і заданих геометричних параметрах становить не менше ніж  $10^{-3}$  при значеннях від 0 до 1. Це відповідає роботі [22], де проведений ґрунтовний аналіз збіжності результатів при різних значеннях  $m$  і відстані між шаром і порожнинами.

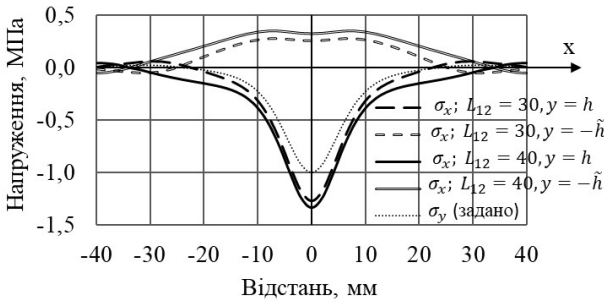
На рис. 2 надано графік заданих напружень  $\sigma_y$  і відповідних їм напружень  $\sigma_x$  на верхній та нижній поверхнях шару при  $z=0$ .

Напружений стан (рис. 2) свідчить про те, що верхня частина шару стиснута, нижня розтягнута. Це є фізично коректним у порівнянні з балкою на двох опорах.

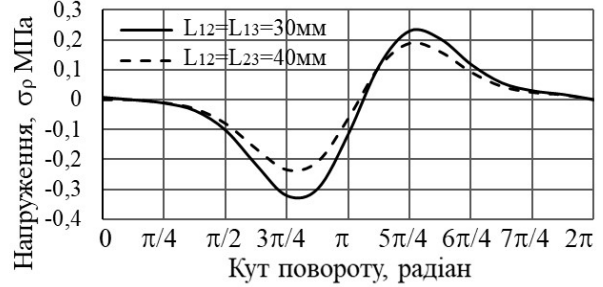
При збільшенні відстані між опорами напруження  $\sigma_x$  на верхній і нижній поверхнях шару зростають і перевищують задані. Максимальні значення напруження виникають на верхній поверхні шару і при  $L_{12}=L_{13}=30 \text{ мм}$  дорівнюють  $\sigma_x = -1,269 \text{ МПа}$ , а при  $L_{12}=L_{13}=40 \text{ мм}$  –  $\sigma_x = -1,332 \text{ МПа}$ .

На рис. 3 зображено напруження  $\sigma_\rho$  вздовж циліндричної порожнини, що торкається правої опори ( $p=2$ ) при  $z=0$ .

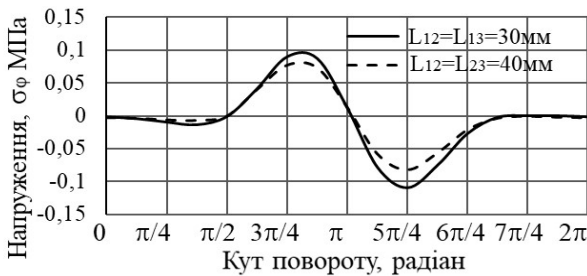
Максимальні напруження  $\sigma_\rho$  виникають на лівій бічній стороні циліндра (рис. 3). Це відбувається за рахунок бокового тиску заданим навантаженням на опори.



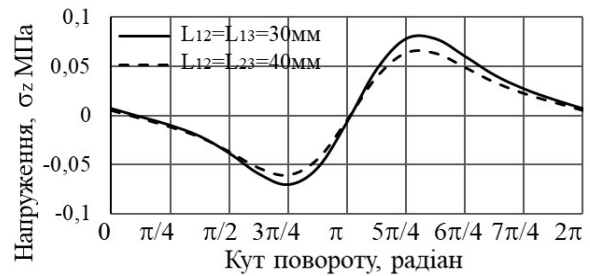
**Рис. 2. Напруження на верхній і нижній поверхнях шару**



**Рис. 3. Напруження  $\sigma_\rho$  на поверхні порожнини  $p=2$**



**Рис. 4. Напруження  $\sigma_\phi$  на поверхні порожнини  $p=2$**



**Рис. 5. Напруження  $\sigma_z$  на поверхні порожнини  $p=2$**

Максимальними напруженнями є від'ємні  $\sigma_p = -0,3336$  МПа при  $L_{12}=L_{13}=30$  мм і  $\varphi=2,5$  у верхній частині циліндра. При збільшенні відстані між опорами максимальні напруження  $\sigma_p$  зменшуються, зміщуючись до горизонтальної осі в бік навантаження.

Графік напружень  $\sigma_p$  вздовж циліндричної порожнини, що торкається лівої опори ( $p=3$ ), симетричний рис. 3 відносно вертикальної осі.

На рис. 4. надано графік напружень  $\sigma_\varphi$  вздовж правої опорної циліндричної порожнини ( $p=2$ ) при  $z=0$ .

У порівнянні з роботою [27], де опори жорстко поєднані з шаром, графік напружень  $\sigma_\varphi$  при умовах контактного типу на опорах має зворотній знак. Максимальні додатні напруження виникають при  $L_{12}=L_{13}=30$  мм,  $\varphi=2,356$  і досягають  $\sigma_\varphi=0,08975$  МПа. Максимальні від'ємні напруження виникають при  $L_{12}=L_{13}=30$  мм,  $\varphi=3,927$  і досягають  $\sigma_\varphi = -0,1094$  МПа.

На рис. 5 надано графік напружень  $\sigma_z$  вздовж правої опорної циліндричної порожнини ( $p=2$ ) при  $z=0$ .

Графік напруження  $\sigma_z$  має такий саме вигляд, як у роботі [27], тільки значення пропорційно куту менші. Максимальні значення напружень: при  $L_{12}=L_{13}=30$  мм і  $\varphi=2,5$  від'ємні  $\sigma_z = -0,068$  МПа, при  $L_{12}=L_{13}=30$  мм і  $\varphi=3,927$  додатні  $\sigma_z=0,0785$  МПа.

На рис. 6. надано графік напружень  $\sigma_\varphi$  вздовж циліндричної порожнини  $p=1$  при  $z=0$ .

На поверхні вільної порожнини напруження  $\sigma_\varphi$  мають переважно від'ємні значення (рис. 6) за рахунок стискання навантаженням цієї порожнини між опорами. Розривні (додатні) напруження  $\sigma_\varphi$  виникають тільки на невеликих ділянках у верхній та нижній частині порожнини.

При збільшенні відстані між опорами максимальні напруження незначно зменшуються (рис. 6). Так, максимальні значення напруження на вільній порожнині досягають при  $L_{12}=L_{13}=30$  мм: додатні  $\sigma_\varphi=0,32476$  МПа, від'ємні  $\sigma_\varphi = -0,7715$  МПа.

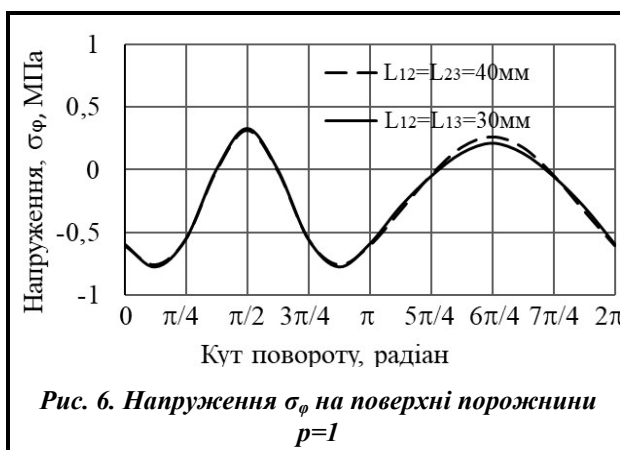


Рис. 6. Напруження  $\sigma_\varphi$  на поверхні порожнини  $p=1$

## Висновки

Розв'язана нова задача для шару, розташованого на двох врізаних у нього циліндричних шарнірах і який має одну додаткову циліндричну поздовжню порожнину.

Шарніри представлені як повздовжні циліндричні порожнини із заданими на них умовами контактного типу (нормальні переміщення й дотичні напруження). Це дозволило звести задачу до класичної моделі просторової теорії пружності. Для розв'язання задачі застосований аналітико-числовий узагальнений метод Фур'є, який дозволив отримати розв'язок із заданою точністю.

Проведено числовий аналіз напруженого стану, який показує розподіл нормальних напружень залежно від відстані між опорами. Отримані результати свідчать про те, що із збільшенням цієї відстані максимальні напруження на поверхні циліндричної порожнини й опорних поверхнях зменшуються. При цьому збільшуються напруження на верхній та нижній поверхнях шару.

Запропонований метод розв'язання може бути застосований для більшої кількості циліндричних порожнин або циліндричних шарнірів. Отриманий напружений стан дає змогу оцінити геометричні параметри для моделей, що проєктуються на практиці.

Подальші дослідження за темою мають проводитися у напрямку додавання захисних шарів і товстостінних циліндрів.

## Література

1. Tekkaya A. E., Soyarslan C. Finite Element Method. In: Laperrière L., Reinhart G. (eds) *CIRP Encyclopedia of Production Engineering*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2014. P. 508–514. [https://doi.org/10.1007/978-3-642-20617-7\\_16699](https://doi.org/10.1007/978-3-642-20617-7_16699).
2. Карвацький А. Я. Метод скінченних елементів у задачах механіки суцільних середовищ. Лабораторний практикум з навчальної дисципліни: навч. посібник. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. 391 с.

3. Засовенко А. В., Фасоляк А. В. Математичне моделювання динаміки пружного півпростору з циліндричною порожниною, яка підкріплена оболонкою, при осесиметричних навантаженнях. *Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні*. № 2. С. 67–73. <https://doi.org/10.15588/1607-6885-2023-2-10>.
4. Азаров А. Д., Журавлев Г. А., Пискунов А. С. Сравнительный анализ аналитического и численного методов решения плоской задачи о контакте упругих цилиндров. *Инновационная наука*. 2015. № 1–2. С. 5–13.
5. Гузь А. Н., Кубенко В. Д., Черевко М. А. Дифракция упругих волн. Киев: Наукова думка, 1978. 307 с.
6. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наукова думка, 1981. 284 с.
7. Fesenko A., Vaysfel'd N. The wave field of a layer with a cylindrical cavity. In: Gdoutos, E. (eds) *Proceedings of the Second International Conference on Theoretical, Applied and Experimental Mechanics. ICTAEM 2019. Structural Integrity*. Cham: Springer, 2019. Vol. 8. P. 277–282. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-21894-2\\_51](https://doi.org/10.1007/978-3-030-21894-2_51).
8. Fesenko A., Vaysfel'd N. The dynamical problem for the infinite elastic layer with a cylindrical cavity. *Procedia Structural Integrity*. 2021. Vol. 33. P. 509–527. <https://doi.org/10.1016/j.prostr.2021.10.058>.
9. Jafari M., Chaleshtari M. H. B., Khoramishad H., Altenbach H. Minimization of thermal stress in perforated composite plate using metaheuristic algorithms WOA, SCA and GA. *Composite Structures*. 2022. Vol. 304. Part 2. Article 116403. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2022.116403>.
10. Malits P. Torsion of an elastic half-space with a cylindrical cavity by a punch. *European Journal of Mechanics – A/Solids*. 2021. Vol. 89. Article 104308. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2021.104308>.
11. Khechai A., Belarbi M.-O., Bouaziz A., Rekbi F. M. L. A general analytical solution of stresses around circular holes in functionally graded plates under various in-plane loading conditions. *Acta Mechanica*. 2023. Vol. 234. P. 671–691. <https://doi.org/10.1007/s00707-022-03413-1>.
12. Smetankina N., Kurennov S., Barakhov K. Dynamic stresses in the adhesive joint. The Goland-Reissner model. In: Cioboată D. D. (eds) *International Conference on Reliable Systems Engineering (ICoRSE) – 2023. ICoRSE 2023. Lecture Notes in Networks and Systems*. Cham: Springer, 2023. Vol. 762. P. 456–468. [https://doi.org/10.1007/978-3-031-40628-7\\_38](https://doi.org/10.1007/978-3-031-40628-7_38).
13. Ugrimov S., Smetankina N., Kravchenko O., Yareshchenko V., Kruszka L. A study of the dynamic response of materials and multilayer structures to shock loads. In: Altenbach H., et al. *Advances in Mechanical and Power Engineering. CAMPE 2021. Lecture Notes in Mechanical Engineering*. Cham: Springer, 2023. P. 304–313. [https://doi.org/10.1007/978-3-031-18487-1\\_31](https://doi.org/10.1007/978-3-031-18487-1_31).
14. Smetankina N., Merkulova A., Merkulov D., Misura S., Misiura Ie. Modelling thermal stresses in laminated aircraft elements of a complex form with account of heat sources. In: Cioboată D. D. (eds) *International Conference on Reliable Systems Engineering (ICoRSE) – 2022. ICoRSE 2022. Lecture Notes in Networks and Systems*. Cham: Springer, 2023. Vol. 534. P. 233–246. [https://doi.org/10.1007/978-3-031-15944-2\\_22](https://doi.org/10.1007/978-3-031-15944-2_22).
15. Smetankina N., Kravchenko I., Merkulov V., Ivchenko D., Malykhina A. Modelling of bird strike on an aircraft glazing. In book: Nechyporuk M., Pavlikov V., Kritskiy D. (eds) *Integrated Computer Technologies in Mechanical Engineering. Advances in Intelligent Systems and Computing*. Cham: Springer, 2020. Vol. 1113. P. 289–297. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-37618-5\\_25](https://doi.org/10.1007/978-3-030-37618-5_25).
16. Николаев А. Г., Проценко В. С. Обобщенный метод Фурье в пространственных задачах теории упругости. Харьков: Нац. аэрокосм. ун-т им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», 2011. 344 с.
17. Nikolaev A. G., Tanchik E. A. The first boundary-value problem of the elasticity theory for a cylinder with N cylindrical cavities. *Numerical Analysis and Applications*. 2015. Vol. 8. P. 148–158. <https://doi.org/10.1134/S1995423915020068>.
18. Nikolaev A. G., Tanchik E. A. Stresses in an elastic cylinder with cylindrical cavities forming a hexagonal structure. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2016. Vol. 57. P. 1141–1149. <https://doi.org/10.1134/S0021894416060237>.
19. Nikolaev A. G., Tanchik E. A. Model of the stress state of a unidirectional composite with cylindrical fibers forming a tetragonal structure. *Mechanics of Composite Materials*. 2016. Vol. 52. P. 177–188. <https://doi.org/10.1007/s11029-016-9571-6>.
20. Николаев А. Г., Орлов Е. М. Решение первой осесимметричной термоупругой краевой задачи для трансверсально-изотропного полупространства со сфероидальной полостью. *Проблемы вычислительной механики и прочности конструкций*. 2012. Вып. 20. С. 253–259.
21. Ukrayinets N., Murahovska O., Prokhorova O. Solving a one mixed problem in elasticity theory for half-space with a cylindrical cavity by the generalized Fourier method. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2021. Vol. 2. No. 7 (110). P. 48–57. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2021.229428>.
22. Miroshnikov V. Yu. Stress state of an elastic layer with a cylindrical cavity on a rigid foundation. *International Applied Mechanics*. 2020. Vol. 56. Iss. 3. P. 372–381. <https://doi.org/10.1007/s10778-020-01021-x>.



23. Miroshnikov V. Rotation of the layer with the cylindrical pipe around the rigid cylinder. In: Altenbach H., et al. *Advances in Mechanical and Power Engineering. CAMPE 2021. Lecture Notes in Mechanical Engineering*. Cham: Springer, 2023. P. 314–322. [https://doi.org/10.1007/978-3-031-18487-1\\_32](https://doi.org/10.1007/978-3-031-18487-1_32).
24. Miroshnikov V. Yu., Medvedeva A. V., Oleshkevich S. V. Determination of the stress state of the layer with a cylindrical elastic inclusion. *Materials Science Forum*. 2019. Vol. 968. P. 413–420. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/MSF.968.413>.
25. Miroshnikov V. Yu. Investigation of the stress strain state of the layer with a longitudinal cylindrical thick-walled tube and the displacements given at the boundaries of the layer. *Journal of Mechanical Engineering – Problemy Mashynobuduvannia*. 2019. Vol. 22. No. 2. P. 44–52. <https://doi.org/10.15407/pmach2019.02.044>.
26. Miroshnikov V. Yu., Savin O. B., Hrebennikov M. M., Pohrebniak O. A. Analysis of the stress state of a layer with two cylindrical elastic inclusions and mixed boundary conditions. *Journal of Mechanical Engineering – Problemy Mashynobuduvannia*. 2022. Vol. 25. No. 2. P. 22–29. <https://doi.org/10.15407/pmach2022.02.022>.
27. Miroshnikov V. Yu., Savin O. B., Hrebennikov M. M., Demenko V. F. Analysis of the stress state for a layer with two incut cylindrical supports. *Journal of Mechanical Engineering – Problemy Mashynobuduvannia*. 2023. Vol. 26. No. 1. P. 15–22. <https://doi.org/10.15407/pmach2023.01.015>.
28. Miroshnikov V., Savin O., Sobol V., Nikichanov V. Solving the problem of elasticity for a layer with N cylindrical embedded supports. *Computation*. 2023. Vol. 11. Article 172. 11 p. <https://doi.org/10.3390/computation11090172>.

Надійшла до редакції 23.12.2023