

УДК 629.735.33.023.4.001.24

ДИСКРЕТИЗАЦІЯ ТОНКОСТІННИХ ПЕРЕРІЗІВ ЗІ ЗМІННОЮ ТОВЩИНОЮ СТІНКИ

М. М. Гребенніков

m.grebennikov@khai.edu

ORCID: 0000-0001-7648-3027

О. Г. Дібір,

канд. техн. наук

ag.dibir@gmail.com

ORCID: 0000-0002-2366-6353

А. О. Кирпикін,

канд. техн. наук

anatolkirpikin@gmail.com

ORCID: 0000-0001-8883-0663

Національний
аерокосмічний університет
ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний
інститут»,
61070, Україна, м Харків,
вул. Вадима Манька, 17

На етапі проєктування тонкостінних авіаційних конструкцій для спрощення розрахунків їх поперечні перерізи піддають ідеалізації. Для цього переріз з обшивкою і поздовжніми елементами, що підкріплюють її, замінюють дискретним, що складається із зосереджених площ у характерних точках. При цьому зберігається рівність моментів інерції вихідного й дискретного перерізів. Така ідеалізація використовується при розрахунку тонкостінних стрижнів на нормальні й дотичні напруження (модель Вагнера). Для перерізів, що складаються з системи прямокутних смужок постійної товщини, дискретизація дозволяє встановлювати наближені значення нормальних і дотичних напружень і точно визначати місцезнаходження особливих точок центру згинання (у відкритому контурі) і центру жорсткості (у закритому). Дискретна модель смужки складається з трьох зосереджених площ: двох на краях і однієї в центрі. У роботі запропоновано розширити дискретну модель на перерізи, в яких товщина обшивки за контуром змінюється за лінійним законом. Зауважено, що на додаток до прямокутної смужки можна використовувати витягнуті трикутники і трапеції, які замінюються трьома й чотирма зосередженими площами відповідно. Розглянуто можливість застосування дискретної моделі для розрахунку деяких тонкостінних перерізів відкритого й закритого контурів. Досліджено переріз відкритого контуру – задача про поперечне згинання без кручення швелера, що має полиці з лінійно змінюваною товщиною. Показані відмінності в потоках дотичних сил, підрахованих за точною й дискретною моделями. Встановлено збіг результатів щодо положення центру згинання за двома моделями. При вивченні застосування дискретної моделі до замкнутого контуру запропоновано спрощений варіант. Розглядалася задача про поперечне згинання без кручення і пошуку центру жорсткості в перерізі з контурною лінією у вигляді трапеції з передньою й задньою стінками постійної товщини та верхньою й нижньою обшивками змінної товщини за контуром, а також в аналогічному перерізі з контурною лінією у вигляді прямокутника. Встановлено відмінності в потоках дотичних сил, підрахованих за точними й дискретними моделями. Для замкнутого перерізу у вигляді прямокутника окремо досліджено зниження моменту інерції на кручення від перерозподілу матеріалу у поперечному перерізі. З'ясовано, що при знаходженні положення центру жорсткості розходження в результатах точної і дискретної моделей складо в перерізах з геометричними параметрами, близькими до реальних, для прямокутного контуру менше 1%, а для трапецієподібного – 4%. Результати свідчать про можливість розширення застосування дискретної моделі тонкостінного поперечного перерізу на проєктувальні розрахунки тонкостінних стрижнів зі змінною товщиною обшивки, що представляють практичні конструкції.

Ключові слова: дискретизація тонкостінних перерізів, змінна товщина стінки поперечного перерізу, модель Вагнера, центр жорсткості, центр згинання.

Вступ

Для спрощення розрахунків тонкостінних стрижнів їх поперечні перерізи піддають ідеалізації [1]. Для чого дійсний переріз з обшивкою і поздовжніми елементами, що підкріплюють її, замінюють при визначенні нормальних напружень дискретним, яке містить тільки зосереджені в його характерних точках площі. При цьому необхідно забезпечити точну або дуже близьку рівність осьових та відцентрових моментів інерції поперечного перерізу. При цьому необхідно забезпечити точну або дуже близьку рівність осьових і відцентрового моментів інерції поперечного перерізу.

Подібна ідеалізація застосовується при розрахунку тонкостінних стрижнів на нормальні й дотичні напруження. При цьому використовується модель Г. Вагнера з непрацюючою на нормальні напруження обшивкою [1, 2]. Якщо тонкостінний переріз складається тільки з прямолінійних смужок

постійної товщини, застосовують прийом, який називається дискретизацією [3, 4], при якому кожна смужка замінюється трьома зосередженими площами (по краях і в середині) зі збереженням точної відповідності осевих і відцентрового моменту інерції у вихідному поперечному перерізі. Наявність підкріплюючих елементів на стінках перерізу враховується окремо.

Застосування дискретизації при розрахунку дотичних напружень природно призводить до похибок у їх визначенні, але забезпечує точне встановлення найважливіших параметрів поперечного перерізу: положення центру вигину (відкритий поперечний переріз) і центру жорсткості (замкнений переріз), спрощуючи пошук їх розташування [4–6].

Пропонується розширити використання прийому дискретизації тонко-стінного поперечного перерізу, що складається з прямолінійних смужок, шляхом розгляду смужок у вигляді не тільки витягнутих прямокутників, а й витягнутих трапецій і трикутників.

Дискретизація смужок

Витягнуту трикутну смужку як і прямокутну, виконуючи вимогу за еквівалентністю трьох зазначених моментів інерції, представимо трьома зосередженими площами: двома на краях (f_b в основі трикутника і f_a у його вершині) і однієї в центрі тяжкості трикутника f_c .

Поєднуючи трикутну смужку з прямокутною, отримуємо дискретну модель для смужки у вигляді витягнутої трапеції (рис. 1).

У практичних розрахунках дискретна модель прямокутної смужки для перерізів тонкостінного стрижня, що складається з таких смужок, знаходить достатнє застосування [4–6].

Пропоновані дискретні моделі смужок, у котрих ширина лінійно змінюється за довжиною, можуть бути корисні при розробці нових типів перерізів профілів для підкріплення панелей в авіаційних конструкціях. Це перерізи з відкритим контуром. Для поперечних перерізів тонкостінного стрижня із замкнутим профілем ці моделі видаються затребуваними при розробці нових конструктивно-технологічних рішень для лонжерона несучого гвинта вертольоту, носку крила легкого літака, кесонних частин конструкції літальних апаратів.

Розглянемо застосування запропонованих дискретних моделей смужок з шириною, що лінійно змінюється по довжині. Оцінимо похибку, яку вносить дискретизація в розрахунки тонкостінних перерізів.

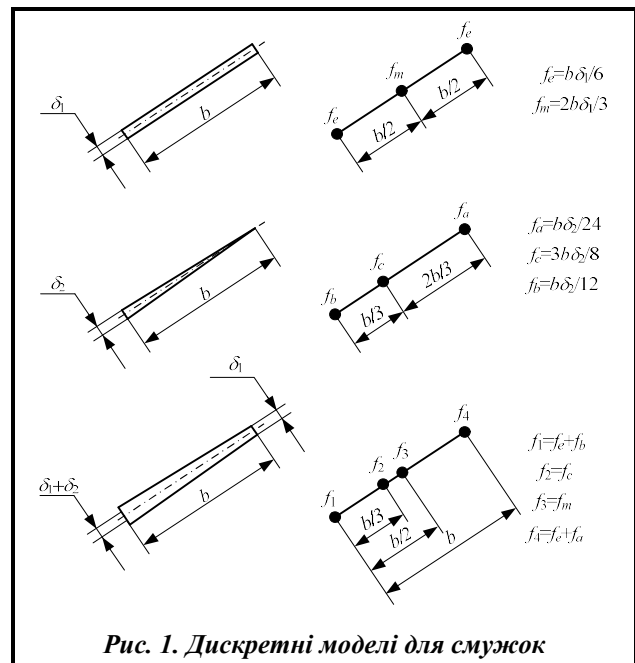


Рис. 1. Дискретні моделі для смужок

Дослідження відкритого контуру

При дослідженні тонкостінного перерізу відкритого контуру розглянемо задачу про поперечний згин (без кручення) швелера, товщина полиць якого змінюється лінійно. На рис. 2 показані три варіанти перерізу швелера: лівий і середній переріз з полицями змінної товщини, а третій, наведено для порівняння, має постійну товщину полиць. Переріз є симетричним відносно осі x і має загальні дані $h=40$ см, $b=20$ см і $\delta=1$ см. Метою розрахунків було визначення потоків дотичних сил q_p в полицях і знаходження положення центру згинання. Момент інерції щодо осі x для всіх перерізів становив $I_x=29333,3$ см⁴.

Для точного аналітичного рішення були отримані вирази для поточного статичного моменту при початковій точці обходу контурної координати t , розташованої у верхній вільній точці швелера: для лівого перерізу $S_x(t) = \frac{h}{2} \left(\delta t + \frac{\delta}{2b} t^2 \right)$; для середнього – $S_x(t) = \frac{h}{2} \left(2\delta t - \frac{\delta}{2b} t^2 \right)$ і для правого $S_x(t) = \frac{h\delta}{2} t$.

Епюри показані над зображеннями перерізів і визначають вид епюр потоків дотичних сил q_p у полицях.

Зверху на рис. 2 відповідно для трьох перерізів показані частини дискретної моделі перерізу, що включають верхню полицю. Позначені там зосереджені площі становитимуть відповідно:

$$F_{11} = \frac{b\delta}{6} + \frac{b\delta}{24} = 4,167 \text{ см}^2;$$

$$F_{12} = \frac{2b\delta}{3} = 13,33 \text{ см}^2;$$

$$F_{13} = \frac{3b\delta}{8} = 7,5 \text{ см}^2;$$

$$F_{14} = \frac{b\delta}{6} + \frac{b\delta}{12} + \frac{h\delta}{6} = 11,67 \text{ см}^2;$$

$$F_{21} = \frac{b\delta}{6} + \frac{b\delta}{12} = 5,0 \text{ см}^2;$$

$$F_{22} = \frac{3b\delta}{8} = 7,5 \text{ см}^2;$$

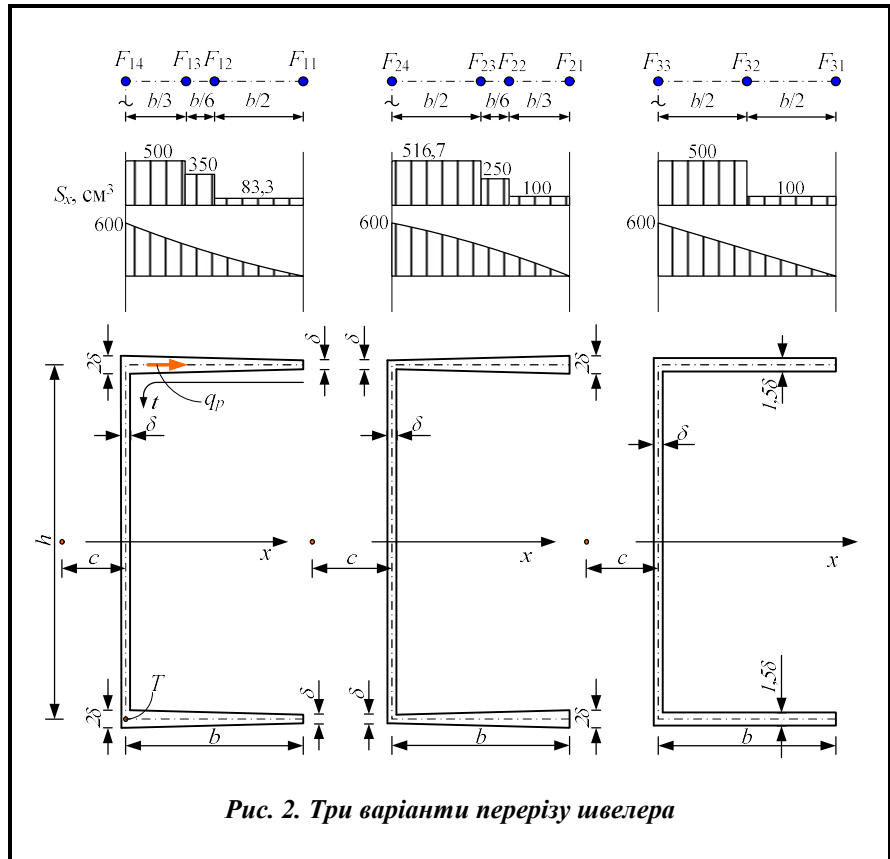
$$F_{23} = \frac{2b\delta}{3} = 13,33 \text{ см}^2;$$

$$F_{24} = \frac{b\delta}{6} + \frac{b\delta}{24} + \frac{h\delta}{6} = 10,83 \text{ см}^2;$$

$$F_{31} = \frac{b\delta}{6} = 3,667 \text{ см}^2;$$

$$F_{32} = \frac{2b\delta}{3} = 13,33 \text{ см}^2;$$

$$F_{33} = \frac{b\delta}{6} + \frac{h\delta}{6} = 10,0 \text{ см}^2.$$



Виходячи з отриманих зосереджених площ для трьох моделей, одержані величини поточного статичного моменту $S_x(t)$ на ділянках верхньої полиці. Епюри $S_x(t)$ показані на рис. 2 над відповідними епюрами точного рішення. Як можна помітити, розбіжності результатів в епюрах для точної та дискретних моделей суттєві, але припустимі для проєктувального розрахунку. Така сама розбіжність буде й у величинах потоків дотичних сил q_p . Очевидно, що дискретизація для смужок із лінійно змінюваною товщиною не вплинула на різницю в результатах для q_p . Далі, зрозуміло, дискретизація для смужок з лінійно змінюваною товщиною мало впливає на епюри $S_x(t)$ і на різницю в результатах q_p .

Однак дискретизація виявляється корисною при пошуку положення центру згинання перерізу тонкостінного стрижня відкритого профілю. Тут, як було показано [4–6], розрахунки точного й дискретного перерізу збігаються для поперечних перерізів, складених зі смужок постійної товщини. Для перерізів, показаних на рис. 2, при використанні методу фіктивної сили (при цьому як моментна була взята нижня точка стінки швелера) встановлено положення центру згинання, яке вказано на тому ж рисунку (на осі x і на відстані c від контурної лінії стінки). Результати за двома способами рішення збіглися і склали для лівого перерізу $c=7,273$ см, для середнього – $c=9,091$ см і для правого – $c=8,182$ см.

Отже, запропонована дискретизація може бути корисною при розрахунках поперечних перерізів тонкостінного стрижня відкритого контуру, особливо вигідно її застосування при пошуку положення центру згинання відкритого контуру.

Дослідження замкнутого контуру

Переходячи до використання запропонованої моделі дискретизації смужок з лінійно змінною шириною в поперечних перерізах тонкостінного стрижня з замкнутим контуром, вкажемо деякі складності, що виникають при цьому.

Передусім наголосимо, що при обчисленні потоків дотичних сил проблем із використанням даної дискретної моделі не виникало. Результати розрахунків за точною і наближеною дискретною моделлю досить подібні (це буде показано нижче), а наближений розрахунок може бути використаний для оцінки величини потоків дотичних зусиль q .

Труднощі пов'язані з пошуком положення центру жорсткості в замкнутому тонкостінному перерізі. Проблема полягає в тому, що необхідно підрахувати крутильну жорсткість перерізу і ряд інтегралів по ділянках [3, 4]. Це може позначитися на похибці при розрахунку з використанням дискретної моделі.

Крутильна жорсткість однозамкнутого перерізу тонкостінного стрижня підраховується так:

$$GI_T = \frac{\Omega^2}{\oint \frac{dt}{G\delta}}, \quad (1)$$

де Ω – подвоєна площа замкнутого контуру; t – контурна координата; G – модуль зсуву матеріалу; $\delta = \delta(t)$ – товщина обшивки, у розглянутій моделі лінійна функція.

Інтеграли, що використовуються в розрахунках, мають вигляд

$$\oint \frac{q(t)dt}{G\delta}. \quad (2)$$

Було прийнято, що $G = \text{const}$ (це справедливо для більшості задач). Тоді підрахунок крутильної жорсткості GI_T можна здійснити при використанні дискретної моделі за наведеною формулою, що при лінійній зміні товщини не становить труднощів.

Однак при отриманні представлених інтегралів із використанням точної методики розрахунку виникають певні обчислювальні незручності ($q(t)$ – ступенева функція), особливо при проведенні параметричних досліджень на початкових етапах проектування конструкцій.

Для подолання цих незручностей корисна дискретна модель.

Із метою вивчення питання про можливість застосування дискретної моделі була розглянута задача щодо визначення положення центру жорсткості замкнутого поперечного перерізу тонкостінного стрижня.

На рис. 3 показано переріз, контурна лінія якого має вигляд прямокутника і має передню і задню стінки з постійною товщиною, а також верхню і нижню обшивки зі змінною товщиною, що лінійно змінюється, а в крайніх точках збігається з товщиною стінок.

Розрахунок перерізу (рис. 3) проводився з використанням точної методики і базового (рис. 4) й спрощеного (рис. 5) варіантів дискретної моделі.

В обох представлених моделях (рис. 4 і 5) однакові значення зосереджених площ

$$F_{p1} = \frac{H\delta_2}{6} + \frac{B\delta_2}{6} + \frac{B(\delta_1 - \delta_2)}{24}; \quad F_{p2} = \frac{2B\delta_2}{3};$$

$$F_{p3} = \frac{3B\delta_2}{8}; \quad F_{p4} = \frac{H\delta_1}{6} + \frac{B\delta_2}{6} + \frac{B(\delta_1 - \delta_2)}{12}. \quad (3)$$

У моделі (рис. 4) товщина верхньої та нижньої обшивок лінійно змінюється по довжині контурної лінії і у розрахунках підраховуються інтеграли типу $\oint \frac{dt}{\delta(t)}$.

Спрощена модель (рис. 5) включає додатково постійність товщини на ділянках контуру для виключення необхідності підрахунку зазначених інтегралів. Наприклад, товщини δ_{p1} , δ_{p2} , δ_{p3} представляють середню товщину відповідної ділянки контуру, величини яких використовуються при «підрахунку» зазначених інтегралів.

Проведені розрахунки показали, що використання двох дискретних моделей призводить до приблизно однакових результатів.

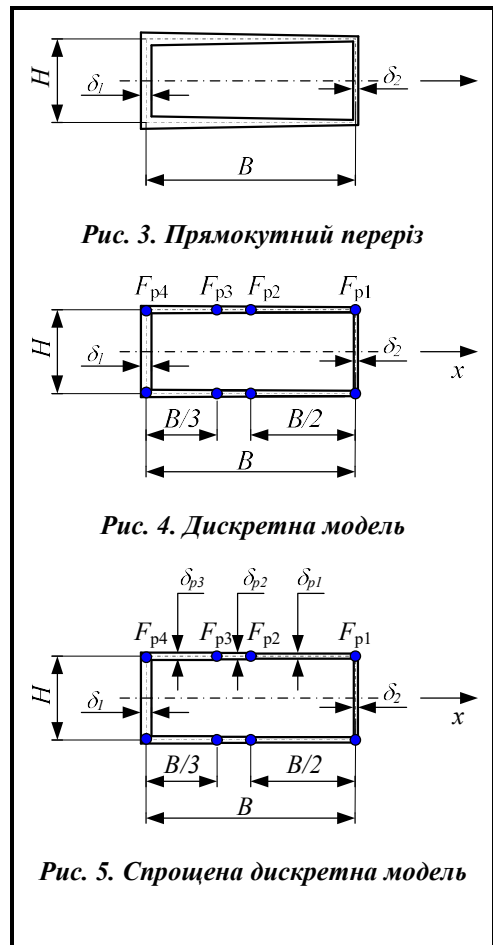


Рис. 3. Прямокутний переріз

Рис. 4. Дискретна модель

Рис. 5. Спрощена дискретна модель

На рис. 6 наведені епюри потоків дотичних сил у перерізі (рис. 3 при наступних параметрах $B/H=2,5$ і $\delta_1/\delta_2=2$) при поперечному згині тонкостінного стрижня без кручення, коли поперечна сила Q_y прикладена в центрі жорсткості. При цьому виявилося, що співвідношення максимальних величин потоків дотичних сил q на передній і задній стінках перерізу склало при точному рішенні 1,74, а з використанням дискретної моделі – 1,71.

Зіставлялася також похибка дискретної моделі у визначенні положення центру жорсткості для прямокутного перерізу (рис. 3) $\bar{x}_{c.s} = \frac{x_{c.s}}{B}$, де $x_{c.s}$ – відстань від передньої стінки до центру жорсткості. Величина $x_{c.s}$ обчислювалася за допомогою двох методів фіктивної сили і фіктивного моменту (виділення кручення), при цьому спостерігався збіг результатів. Розглядалися перерізи з різними подовженням $\lambda=B/H$ і співвідношенням товщин задньої та передньої стінок δ_2/δ_1 . Похибка зростає із зменшенням співвідношення. Результати розрахунків із зазначенням кордону, де похибка в обчисленні $\bar{x}_{c.s}$ (відносної відстані до центру жорсткості) вбирається у 1%, показані рис. 7.

Результати (рис. 7) демонструють можливість застосування дискретної моделі щодо положення центру жорсткості прямокутного перерізу (рис. 3) з параметрами, характерними для геометрії перерізів реальних тонкостінних конструкцій.

Певний інтерес викликає можливість зниження моменту інерції при крученні I_T для перерізів зі змінною товщиною верхньої та нижньої обшивок (рис. 3). Для перерізу постійної площі змінювалося співвідношення δ_1/δ_2 і встановлювалося відносне зниження величини I_T стосовно значення, отриманого при однаковій товщині обшивки по всьому контуру $\delta_1/\delta_2=1$. Розглядалися два перерізи з різним подовженням $\lambda=B/H$, рівним 2 і 5. Результати наведені на рис. 8.

Як можна помітити (рис. 8), перерозподіл матеріалу по контуру перерізу в практично цікавому діапазоні зміни λ і δ_1/δ_2 не призводить до істотного падіння I_T , а отже, крутильної жорсткості поперечного перерізу.

Досліджувалося також застосування дискретної моделі щодо положення центру жорсткості в поперечному перерізі, контурна лінія якого є трапецію. На рис. 9 показано переріз, контурна лінія якого має вигляд трапеції (симетричної щодо осі x) з передньою і задньою стінками постійної товщини, верхньою і нижньою обшивками зі лінійно змінною товщиною, що збігається в крайніх точках із товщиною стінок.

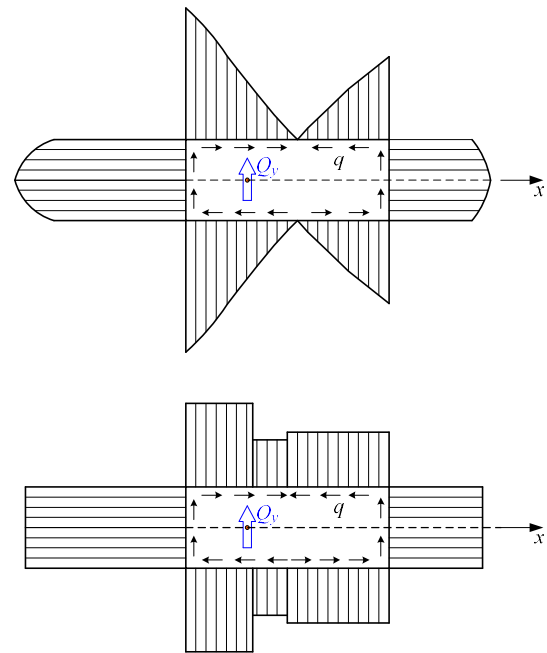


Рис. 6. Розподіл величин потоків дотичних сил q

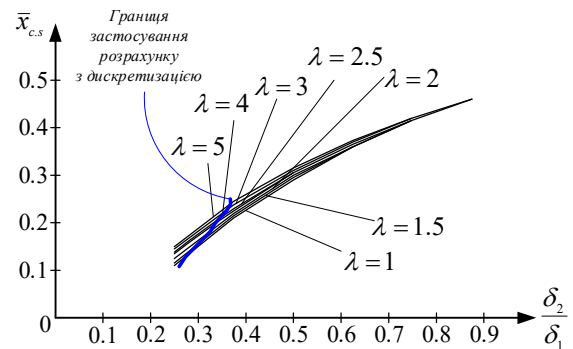


Рис. 7. Положення центру жорсткості у прямокутному перерізі

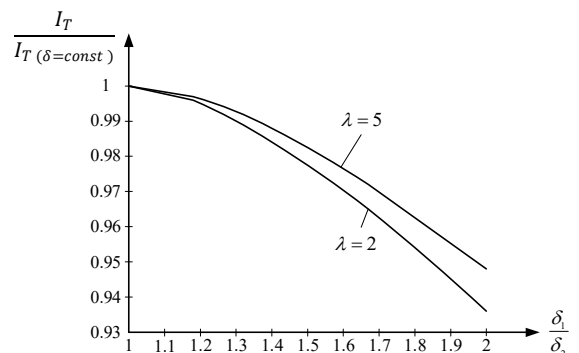


Рис. 8. Момент інерції під час кручення

У дискретній моделі (рис. 10) розраховувалися величини зосереджених площ:

$$F_{ptr1} = \frac{H_2\delta_2}{6} + \frac{L\delta_2}{6} + \frac{L(\delta_1 - \delta_2)}{24}; F_{ptr2} = \frac{2L\delta_2}{3}; F_{ptr3} = \frac{3L\delta_2}{8}; F_{ptr4} = \frac{H_1\delta_1}{6} + \frac{L\delta_2}{6} + \frac{L(\delta_1 - \delta_2)}{12}, \quad (4)$$

де L – довжина контурної лінії верхньої та нижньої обшивок.

Спрощена дискретна модель також застосовувалася під час розрахунків і давала приблизно однакові результати.

На рис. 11 наведені епюри потоків дотичних сил у перерізі (при наступних параметрах $B/H_1=2,5$; $H_1/H_2=2$ і $\delta_1/\delta_2=2$) при поперечному згині тонкостінного стрижня без кручення, коли поперечна сила Q_y прикладена в центрі жорсткості.

При цьому виявилось, що співвідношення максимальних величин дотичних потоків сил q на передній та задній стінках перерізу склало при точному рішенні 2,10, а з використанням дискретної моделі – 1,80. Вказана різниця знижується при зменшенні співвідношення H_1/H_2 .

У розрахунках, проведених для симетричних перерізів у формі трапеції з передньою і задньою стінками постійної товщини, верхніми й нижніми обшивками із лінійно змінною товщиною, що збігається в крайніх точках із товщиною стінок, досліджувалася похибка Δ у визначенні положення центру жорсткості дискретної моделі. Розглядалися поперечні перерізи з різними геометричними параметрами, близькими до параметрів реальних тонкостінних перерізів авіаційних конструкцій. Результати розрахунків при параметричних дослідженнях показані на рис. 12.

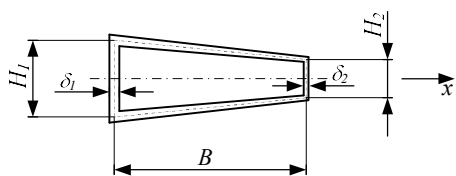


Рис. 9. Поперечний переріз

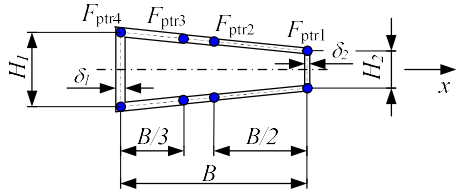


Рис. 10. Дискретна модель

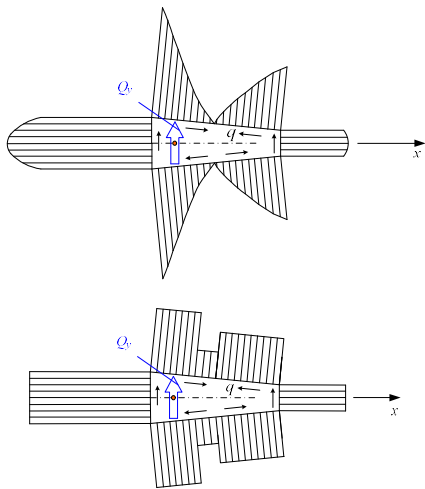


Рис. 11. Розподіл величин потоків дотичних сил

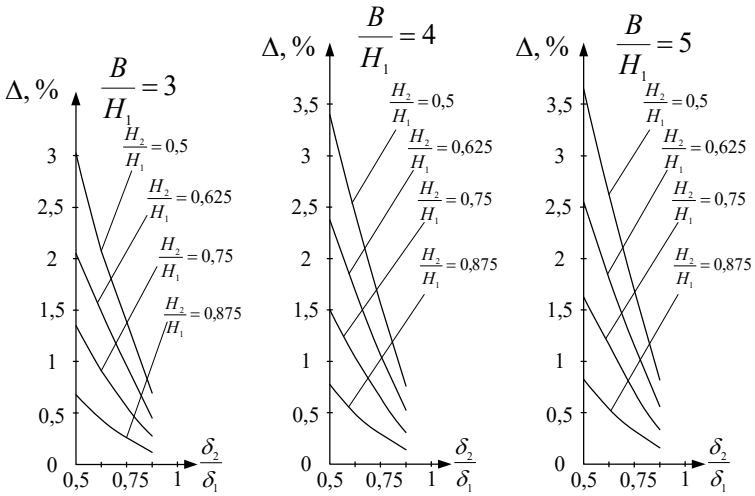
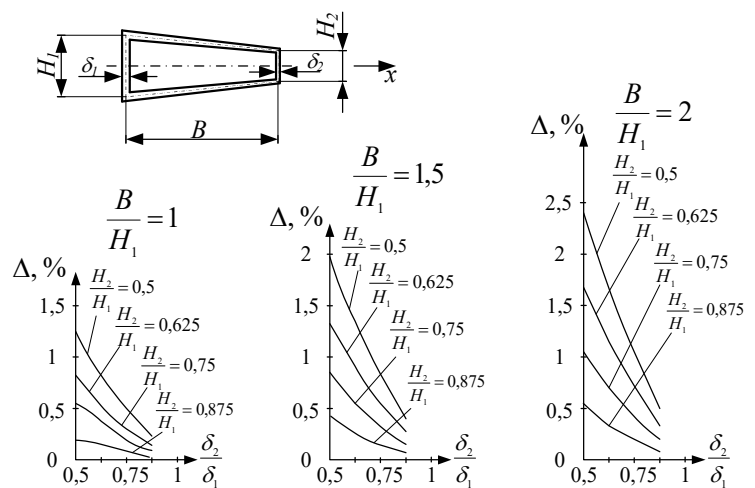


Рис. 12. Похибка Δ дискретної моделі у визначенні положення центру жорсткості

Похибка Δ у визначенні положення центру жорсткості при використанні дискретної моделі у всіх розглянутих завданнях не перевищувала 4%. Зростання похибки спостерігається зі збільшенням відношення B/H_1 . Для перерізів із зафіксованим B/H_1 похибка зростала зі зменшенням відношень H_2/H_1 та δ_2/δ_1 .

Висновок

Як показано в наведених даних, запропонована дискретизація дозволяє без істотної похибки використовувати спрощену методику розрахунку дотичних напружень для аналізу тонкостінних стрижнів відкритого контуру, включаючи розгалуження, складного поперечного перерізу зі змінною товщиною стінки. Завдяки цьому знижується трудомісткість на етапах проектування.

Це справедливо і для перерізів тонкостінних стрижнів із замкнутим контуром поперечного перерізу, включаючи ті, які мають замкнуті області і відгалуження. Врахування змінності товщини стінки дозволить розширити можливості отримання раціональних форм поперечного перерізу тонкостінних стрижнів.

Представлена дискретна модель може бути дуже вигідною для застосування на етапі проектування перерізів тонкостінних конструкції для оцінки розташування в них центру згинання або жорсткості (залежно від типу перерізу) із метою розміщення його у найбільш зручному положенні для сприйняття статичних і динамічних навантажень.

Література

1. Megson T. H. G. Introduction to aircraft structural analysis. UK, Oxford: Butterworth-Heinemann, 2017. 758 p.
2. Wagner H., Pletscher W. Verdrehung und Knickung von offenen Profilen. *Luftfahrtforschung*. 1934. No. 6. P. 174–180.
3. Львов М. П., Дибир А. Г. Строительная механика авиационных конструкций: учеб. пособие в 2-х ч. Ч. 2: Расчет тонкостенных стержней. Харьков: Нац. аэрокосм. ун-т «Харьк. авиац. ин-т», 2010. 84 с.
4. Дібір Г. О. Будівельна механіка авіаційних конструкцій: навч. посіб. в 2-х ч. Ч. 2: Розрахунок тонкостінних конструкцій. Харків. Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «Харк. авиац. ін-т», 2020. 280 с.
5. Дибир А. Г., Кирпикин А. А., Пекельный Н. И. Исследование положения центра жесткости в однозамкнутом прямоугольном сечении тонкостенного стержня. Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии: сб. науч. тр. Вып. 76. Харьков: Нац. аэрокосм. ун-т им. Н. Е. Жуковского «Харьков. авиац. ин-т», 2017. С. 135–140.
6. Дибир А. Г., Кирпикин А. А., Пекельный Н. И. Исследование положения центра жесткости в однозамкнутом треугольном сечении тонкостенного стержня. Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии: сб. науч. тр. Вып. 80. Харьков: Нац. аэрокосм. ун-т им. Н. Е. Жуковского «Харьков. авиац. ин-т», 2018. С. 134–138.

Надійшла до редакції 06.05.2024