

УДК 539.3

ІТЕРАЦІЙНИЙ МЕТОД ВИЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ ІНТЕНСИВНОСТІ НАПРУЖЕНЬ ПРИ ДИНАМІЧНОМУ НАВАНТАЖЕННІ СИСТЕМИ ТРІЩИН

О. І. Кирилова,

канд. фіз.-мат. наук

olga.i.kyrylova@gmail.com

ORCID: 0000-0002-9221-182X

В. Г. Попов,

д-р фіз.-мат. наук

dr.vg.popov@gmail.com

ORCID: 0000-0003-2416-642X

Національний університет

«Одеська морська академія»

65052, Україна, м. Одеса,

вул. Дідріхсона, 8

Розглянуто пружне ізотропне тіло у стані плоскої деформації, яке містить систему довільно розміщених тріщин під дією динамічного (гармонічного) навантаження. Автори поставили задачу – визначити поле напружень в околі тріщин в умовах їх хвильової взаємодії. Метод розв'язання ґрунтується на поданні переміщень у тілі у вигляді суперпозиції розривних розв'язків рівнянь руху, побудованих для кожної тріщини. З огляду на це вихідна задача приводиться до системи сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь відносно невідомих стрибків переміщень на поверхнях тріщин. Для розв'язання цієї системи запропоновано новий ітераційний метод, який передбачає розв'язання на кожній ітерації сукупності незалежних інтегро-диференціальних рівнянь, що відрізняються тільки правими частинами. За нульове наближення обираються розв'язки, які відповідають окремим поодиноким тріщинам під дією динамічного навантаження. Такий новий підхід дозволяє уникнути труднощів, пов'язаних з необхідністю розв'язання систем інтегро-диференціальних рівнянь великої розмірності, що виникають при застосуванні традиційних методів. За результатами ітерацій отримані формули для розрахунку коефіцієнтів інтенсивності напружень для кожної тріщини. У частинному випадку чотирьох тріщин встановлено добре узгодження результатів, отриманих при безпосередньому розв'язанні системи восьми інтегро-диференціальних рівнянь методом механічних квадратур, і результатів, отриманих ітераційним методом. У цілому числові приклади демонструють збіжність і стійкість запропонованого методу у випадку систем досить великої кількості щільно розташованих тріщин. Досліджено вплив взаємодії між тріщинами на значення коефіцієнта інтенсивності напружень (KIH) в умовах динамічного навантаження. Важливим для механіки руйнування і новим результатом є виявлення абсолютного максимуму KIH нормальних напружень при деяких частотах осцилюючого нормального навантаження. На значення частот, за яких KIH сягають максимуму, і на максимальні значення впливають кількість взаємодіючих тріщин і конфігурація самої системи тріщин. Ці максимальні значення суттєво (у кілька разів) перевищують значення KIH поодиноких тріщин при аналогічному навантаженні. У той саме час в умовах статичного або низькочастотного навантаження можливе зменшення значень KIH порівняно з KIH для окремих тріщин. При зсувному навантаженні тріщин значення KIH дотичних напружень мають тенденцію до спадання при зростанні частоти, а їх значення несуттєво відрізняються від KIH для окремої тріщини.

Ключові слова: динамічне навантаження, тріщини, коефіцієнти інтенсивності напружень, метод ітерацій.

Вступ

У механіці руйнування важливою характеристикою сингулярності поля напружень в околі тріщин, яка також визначає початок руйнування, є коефіцієнти інтенсивності напружень [1]. Їх значення вимагає розв'язання відповідних крайових задач для рівнянь теорії пружності, особливо складних при наявності систем тріщин в умовах динамічного навантаження їх поверхонь. Актуальність розв'язання динамічних задач теорії пружності для тіл з тріщинами пояснюється ефектами, викликаними відбиттям хвиль, згенерованих динамічним навантаженням, від поверхонь тріщин. Відбиті хвилі впливають на розподіл напружень в околі тріщин, що, у свою чергу, часто приводить до того, що динамічні коефіцієнти інтенсивності напружень (KIH) можуть значно перевищувати свої статичні аналоги. Таке перевищення спостерігається навіть у випадку однієї тріщини [2–5]. Ситуація ще більше ускладнюється при наявності в тілі системи взаємодіючих тріщин.

Статтю ліцензовано на умовах Ліцензії Creative Commons «Attribution» («Атрибуція») 4.0 Міжнародна.

© О. І. Кирилова, В. Г. Попов, 2024

На сьогодні наявність потужної обчислювальної техніки і спеціальних програмних продуктів, таких як ANSYS, ABAQUS, NASGROW, AFCROSS, сприяє широкому застосуванню прямих числових методів розв'язання динамічних і статичних проблем механіки тріщин [6–9]. Перевагою цих методів є їх універсальність, що дозволяє розглядати без спрощень тіла і тріщини довільної форми. Проте, як можна побачити з наведених робіт, використання цих методів вимагає суттєвого згущення сітки або розбиття на скінченні елементи. Особливо це стосується вершин тріщин, де спостерігається сингулярність напружень. У випадку системи досить щільно розміщених тріщин таке згущення має здійснюватися для кожної тріщини й охоплювати досить значну область. Це, безумовно, створює суттєві труднощі при застосуванні методів скінченних елементів і скінченних різниць, на які вказують автори робіт [6–9]. Тому числові результати, як правило, у них наведено для однієї або двох тріщин.

Ефективним і поширеним методом визначення полів напружень у тілах з тріщинами є метод граничних інтегральних рівнянь і його дискретний аналог – метод граничних елементів [3, 10–15]. Проте застосування цього методу при наявності у тілі системи тріщин приводить до розв'язання систем сингулярних інтегральних або інтегро-диференціальних рівнянь, кількість яких пропорційна кількості тріщин. У зв'язку з цим у перших роботах досліджувалась взаємодія динамічно навантажених паралельних тріщин [16–20]. Уникнути труднощів, пов'язаних із числовим розв'язанням систем сингулярних інтегральних або інтегро-диференціальних рівнянь великого розміру вдається при розгляданні періодичних систем тріщин [21–23]. Визначення КІН у випадку довільно розміщених двох тріщин в умовах динамічного навантаження здійснено у [24–26]. Що стосується розв'язку двовимірних задач для тіл з довільними системами динамічно навантажених тріщин, то слід вказати роботи [2, 11, 27–29]. В усіх цих статтях вихідні задачі зведено до систем інтегральних або інтегро-диференціальних рівнянь. Проте при тому, що розв'язання здійснено за загальної постановки, числові результати наведено у випадку декількох, частіше всього двох, тріщин. З огляду на це набуває актуальності розроблення методу визначення динамічних КІН у випадку систем з великою кількістю тріщин, який не вимагав би розв'язання систем інтегральних рівнянь великого розміру. У [30] для визначення КІН при дії зсувними SH-хвилями на довільну систему тріщин до розв'язання системи відповідних інтегро-диференціальних рівнянь запропоновано ітераційний метод. При використанні такого методу на кожній ітерації розв'язуються сукупності рівнянь для окремих тріщин. У даній роботі вказаний метод поширюється на випадок системи тріщин, поверхні яких знаходяться під дією гармонічних нормальних або зсувних навантажень.

Постановка задачі

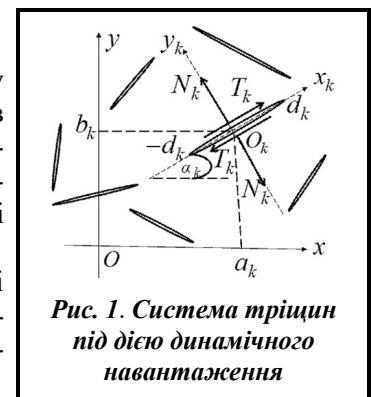
Розглядається ізотропний пружний простір, що знаходиться у стані плоскої деформації й містить N наскрізних тріщин. Ці тріщини в площині xOy (рис. 1) розміщуються на відрізках $(-d_k, d_k)$, які не перетинаються і мають центри в точках $O_k(a_k, b_k)$, $k=1, 2, \dots, N$. До поверхонь тріщин прикладаються нормальні $N_k e^{-i\omega t}$ або зсувні $T_k e^{-i\omega t}$ самозрівноважені навантаження.

Далі множник $e^{-i\omega t}$, що визначає залежність від часу, відкидається і розглядаються тільки амплітудні значення. Нехай $u(x, y)$, $v(x, y)$ – переміщення хвильового поля, створеного навантаженням тріщин. Тоді вони задовольняють рівняння руху, які в умовах плоскої деформації мають вигляд

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \mu \Delta u &= -\rho \omega^2 u; \\ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \mu \Delta v &= -\rho \omega^2 v, \end{aligned} \quad (1)$$

де Δ – двовимірний оператор Лапласа; ρ – густина пружного середовища; λ, μ – коефіцієнти Ламе.

Для формулювання граничних умов на поверхнях тріщин із кожною пов'язується локальна система координат $x_k O_k y_k$, $k=1, N$ (рис. 1) так, що кут між осями Ox_k і Ox дорівнює α_k .



Позначимо $u^k(x_k, y_k)$, $v^k(x_k, y_k)$, $\sigma_y^k(x_k, y_k)$, $\sigma_x^k(x_k, y_k)$, $\tau_{yx}^k(x_k, y_k)$ переміщення і напруження в системі координат, пов'язаної з k -ю тріщиною. Тоді за умови завантаження поверхонь тріщин мають виконуватися рівності

$$\begin{aligned} \sigma_y^k(x_k, 0) &= N_k; \quad \tau_{yx}^k(x_k, 0) = T_k; \\ x_k &\in [-d_k, d_k]; \quad k=1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (2)$$

Крім того, на поверхнях тріщин переміщення мають розриви, невідомі стрибки яких позначено

$$\begin{aligned} v^k(x_k, +0) - v^k(x_k, -0) &= \chi_{3k}(x_k); \quad u^k(x_k, +0) - u^k(x_k, -0) = \chi_{4k}(x_k); \\ x_k &\in [-d_k, d_k]; \quad k=1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (3)$$

За таких умов необхідно визначити переміщення й напруження в тілі з тріщинами й отримати формули для обчислення КІН.

Приведення до системи інтегро-диференціальних рівнянь й ітераційний метод розв'язання

Як і у [27], розв'язання ґрунтується на використанні розривних розв'язків рівнянь (1) зі стрибками (3), побудованих для кожної тріщини в пов'язаній з нею системі координат $x_l O_l y_l$, $l=1, 2, \dots, N$

$$\begin{aligned} v^{dl}(x_l, y_l) &= \int_{-d_l}^{d_l} \chi_{3l}(\eta) G_{33}(\eta - x_l, y_l) d\eta + \int_{-d_l}^{d_l} \chi_{4l}(\eta) G_{34}(\eta - x_l, y_l) d\eta; \\ u^{dl}(x_l, y_l) &= \int_{-d_l}^{d_l} \chi_{3l}(\eta) G_{43}(\eta - x_l, y_l) d\eta + \int_{-d_l}^{d_l} \chi_{4l}(\eta) G_{44}(\eta - x_l, y_l) d\eta, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\text{де } G_{33} = \frac{1}{\kappa_2^2} \frac{\partial}{\partial y_l} \left(\left(\kappa_2^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial x_l^2} \right) r_1 - 2 \frac{\partial^2 r_2}{\partial x_l^2} \right); \quad G_{34} = \frac{1}{\kappa_2^2} \frac{\partial}{\partial x_l} \left(2 \left(\kappa_1^2 + \frac{\partial^2}{\partial x_l^2} \right) r_1 - \left(\kappa_2^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial x_l^2} \right) r_2 \right);$$

$$G_{43} = \frac{1}{\kappa_2^2} \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\left(\kappa_2^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial x_l^2} \right) r_1 - 2 \left(\kappa_2^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial x_l^2} \right) r_2 \right); \quad G_{44} = \frac{1}{\kappa_2^2} \frac{\partial}{\partial y_l} \left(-2 \frac{\partial^2 r_1}{\partial x_l^2} + \left(\kappa_2^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial x_l^2} \right) r_2 \right);$$

$$r_j(\eta - x_l, y_l) = -\frac{i}{4} H_0^{(1)} \left(\kappa_j \sqrt{(\eta - x_l)^2 + y_l^2} \right), \quad j=1, 2; \quad \kappa_1^2 = \frac{\omega^2 \rho^2}{\lambda + 2\mu}; \quad \kappa_2^2 = \frac{\omega^2 \rho^2}{\mu};$$

$H_0^{(1)}(z)$ – функція Ганкеля.

Переміщенням (4) в системі координат $x_l O_l y_l$ відповідають напруження

$$\begin{aligned} \sigma_x^{dl}(x_l, y_l) &= \mu \int_{-d_l}^{d_l} \chi'_{3l}(\eta) E_{03}(\eta - x_l, y_l) d\eta + \mu \int_{-d_l}^{d_l} \chi'_{4l}(\eta) E_{04}(\eta - x_l, y_l) d\eta + \mu(\kappa_2^2 - 2\kappa_1^2) \int_{-d_l}^{d_l} \chi_{3l}(\eta) r_1(\eta - x_l, y_l) d\eta; \\ \sigma_y^{dl}(x_l, y_l) &= \mu \int_{-d_l}^{d_l} \chi'_{3l}(\eta) E_{13}(\eta - x_l, y_l) d\eta + \mu \int_{-d_l}^{d_l} \chi'_{4l}(\eta) E_{14}(\eta - x_l, y_l) d\eta + \mu \kappa_2^2 \int_{-d_l}^{d_l} \chi_{3l}(\eta) r_1(\eta - x_l, y_l) d\eta; \\ \tau_{yx}^{dl}(x_l, y_l) &= \mu \int_{-d_l}^{d_l} \chi'_{3l}(\eta) E_{23}(\eta - x_l, y_l) d\eta + \mu \int_{-d_l}^{d_l} \chi'_{4l}(\eta) E_{24}(\eta - x_l, y_l) d\eta + \mu \kappa_2^2 \int_{-d_l}^{d_l} \chi_{4l}(\eta) r_2(\eta - x_l, y_l) d\eta. \end{aligned} \quad (5)$$

При отриманні формул (5) з метою зниження порядку сингулярності підінтегральних функцій здійснено інтегрування частинами з врахуванням $\chi(\pm d_l)=0$ і прийнято позначення

$$E_{03} = E_{24} = -\frac{4}{\kappa_2^2} \left[\left(\kappa_1^2 + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \frac{\partial r_1}{\partial \eta} - \left(\kappa_2^2 + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \frac{\partial r_2}{\partial \eta} \right];$$

$$E_{04} = -\frac{2}{\kappa_2^2} \left[\left(2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + 2\kappa_1^2 - \kappa_2^2 \right) \frac{\partial r_1}{\partial y_l} - \left(2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \kappa_2^2 \right) \frac{\partial r_2}{\partial y_l} \right];$$

$$E_{13} = \frac{4}{\kappa_2^2} \left[\left(\kappa_2^2 + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \frac{\partial r_1}{\partial \eta} - \left(\kappa_2^2 + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \frac{\partial r_2}{\partial \eta} \right];$$

$$E_{14} = E_{23} = \frac{2}{\kappa_2^2} \left[\left(\kappa_2^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \frac{\partial r_1}{\partial y_l} - \left(\kappa_2^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \frac{\partial r_2}{\partial y_l} \right].$$

Розривним розв'язкам (4), (5) у системі Oxy відповідають наступні переміщення й напруження:

$$u^{gl} = u^{dl} \cos \alpha_l - v^{dl} \sin \alpha_l; \quad v^{gl} = u^{dl} \sin \alpha_l - v^{dl} \cos \alpha_l;$$

$$\sigma_x^{gl} = \sigma_x^{dl} \cos^2 \alpha_l + \sigma_y^{dl} \sin^2 \alpha_l - \tau_{xy}^{dl} \sin 2\alpha_l;$$

$$\sigma_y^{gl} = \sigma_x^{dl} \sin^2 \alpha_l + \sigma_y^{dl} \cos^2 \alpha_l - \tau_{xy}^{dl} \sin 2\alpha_l;$$

$$2\tau_{xy}^{gl} = \sigma_x^{dl} \sin 2\alpha_l + \sigma_y^{dl} \sin 2\alpha_l + 2\tau_{xy}^{dl} \cos 2\alpha_l.$$

Загальне поле переміщень подається у вигляді

$$u(x, y) = \sum_{l=1}^N u^{gl}(x, y); \quad v(x, y) = \sum_{l=1}^N v^{gl}(x, y). \quad (6)$$

За аналогічними формулами визначають і напруження $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{yx}$. Таким чином, за формулами (6) визначатимуться переміщення й напруження в тілі за умови визначення невідомих стрибків (3). Для цього слід використати умови (2). Напруження, що до них входять, подаються через напруження (4), що відповідають розривним розв'язкам за наступними формулами:

$$\sigma_y^k(x_k, y_k) = \sum_{l=1}^N \sigma_y^{kl}(x_k, y_k); \quad \tau_{yx}^k(x_k, y_k) = \sum_{l=1}^N \tau_{yx}^{kl}(x_k, y_k), \quad (7)$$

де

$$\sigma_y^{kl} = \sigma_x^{dl} \sin^2 \alpha_{kl} + \sigma_y^{dl} \cos^2 \alpha_{kl} - \tau_{yx}^{dl} \sin 2\alpha_{kl};$$

$$2\tau_{xy}^{kl} = -\sigma_x^{dl} \sin 2\alpha_{kl} + \sigma_y^{dl} \sin 2\alpha_{kl} + 2\tau_{yx}^{dl} \cos 2\alpha_{kl}; \quad \alpha_{kl} = \alpha_k - \alpha_l.$$

Підстановка (7) у (2) приводить до системи $2N$ сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь відносно невідомих стрибків переміщень. У результаті видалення сингулярної складової та ряду перетворень дана система має вигляд

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi'_{3k}(\tau) \left[-\frac{2(1-\xi^2)}{\tau-\zeta} + R_{13}^k(\tau-\zeta) \right] d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_{3k}(\tau) \left[\kappa_0^2 \gamma_k^2 \ln|\tau-\zeta| + V_{13}^k(\tau-\zeta) \right] d\tau +$$

$$+ \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi'_{3l}(\tau) F_{kl}^{13}(\tau, \zeta) d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi'_{4l}(\tau) F_{kl}^{14}(\tau, \zeta) d\tau \right] +$$

$$+ \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_{3l}(\tau) U_{kl}^{13}(\tau, \zeta) d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_{4l}(\tau) U_{kl}^{14}(\tau, \zeta) d\tau \right] = N_{0k};$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi'_{4k}(\tau) \left[\frac{2(1-\xi^2)}{\tau-\zeta} + R_{24}^k(\tau-\zeta) \right] d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_{4k}(\tau) \left[\kappa_0^2 \gamma_k^2 \ln|\tau-\zeta| + V_{24}^k(\tau-\zeta) \right] d\tau + \\ & + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi'_{3l}(\tau) F_{kl}^{23}(\tau, \zeta) d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi'_{4l}(\tau) F_{kl}^{24}(\tau, \zeta) d\tau \right] + \\ & + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_{3l}(\tau) U_{kl}^{23}(\tau, \zeta) d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_{4l}(\tau) U_{kl}^{24}(\tau, \zeta) d\tau \right] = T_{0k}. \end{aligned} \quad (8)$$

У системі (8) прийнято наступні позначення: $\varphi_{sk}(\tau) = d_k^{-1} \chi_{sk}(d_k \tau)$; $s=3, 4$; $k=1, 2, \dots, N$; $\gamma_k = d^{-1} d_k$; $d = \max(d_1, d_2, \dots, d_N)$; $N_{0k} = \mu^{-1} N_k$; $T_{0k} = \mu^{-1} T_k$; $k=1, 2, \dots, N$; $\xi^2 = \frac{\kappa_2^2}{\kappa_1^2} = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}$; ν – коефіцієнт Пуассона пружного матеріалу. Функції R_{js}^k , V_{js}^k , F_{kl}^{js} , U_{kl}^{js} ; $j=1, 2$; $s=3, 4$; $l, k=1, 2, \dots, N$ неперервні при $-1 \leq \zeta, \tau \leq 1$.

До системи (8) слід приєднати рівності, які є умовою змикання тріщин і забезпечують єдність розв'язку системи (8)

$$\int_{-1}^1 \varphi'_{sk}(\tau) d\tau = 0; \quad s=3, 4; \quad k=1, 2, \dots, N. \quad (9)$$

Система інтегро-диференціальних рівнянь (8) вимагає числового розв'язання. Для запобігання розв'язання системи великої розмірності пропонується застосувати ітераційний метод аналогічно тому, як це зроблено в [30]. Він полягає у тому, що на i -му кроці ітерації, $i \geq 1$, розв'язується N пар незалежних інтегро-диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 (\varphi_{3k}^i(\tau))' \left[-\frac{2(1-\xi^2)}{\tau-\zeta} + R_{13}^k(\tau-\zeta) \right] d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_{3k}^i(\tau) \left[\kappa_0^2 \gamma_k^2 \ln|\tau-\zeta| + V_{13}^k(\tau-\zeta) \right] d\tau = \\ & = N_{0k} - \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N \sum_{s=3}^4 \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 (\varphi_{sl}^{i-1}(\tau))' F_{kl}^{1s}(\tau, \zeta) d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_{sl}^{i-1}(\tau) U_{kl}^{1s}(\tau, \zeta) d\tau \right]; \\ & \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 (\varphi_{4k}^i(\tau))' \left[\frac{2(1-\xi^2)}{\tau-\zeta} + R_{24}^k(\tau-\zeta) \right] d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_{4k}^i(\tau) \left[\kappa_0^2 \gamma_k^2 \ln|\tau-\zeta| + V_{24}^k(\tau-\zeta) \right] d\tau = \\ & = T_{0k} - \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N \sum_{s=3}^4 \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 (\varphi_{sl}^{i-1}(\tau))' F_{kl}^{2s}(\tau, \zeta) d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_{sl}^{i-1}(\tau) U_{kl}^{2s}(\tau, \zeta) d\tau \right]; \\ & \int_{-1}^1 (\varphi_{sk}^i(\tau))' d\tau = 0; \quad s=3, 4; \quad k=1, 2, \dots, N; \quad i=1, 2, 3. \end{aligned} \quad (10)$$

За нульове наближення $\varphi_{3k}^0(\tau)$, $\varphi_{4k}^0(\tau)$ обираються розв'язки рівнянь (10) з правими частинами, де відсутні суми, тобто рівними N_{0k} , T_{0k} . Отже, за нульове наближення обираються розв'язки, що відповідають окремим поодиноким тріщинам, які знаходяться під дією динамічного навантаження.

Числове розв'язання рівнянь (10) здійснюється так само, як у [27, 30]. Похідні невідомих функцій з врахуванням кореневої особливості подаються у вигляді

$$(\varphi_{sk}^i(\tau))' = \frac{\Psi_{sk}^i(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}.$$

Далі невідомі функції $\psi_{sk}^i(\tau)$ апроксимуються інтерполяційними многочленами

$$\psi_{sk}^i(\tau) = \sum_{m=1}^n \Psi_{skm}^i \frac{T_n(\tau)}{(\tau - \tau_m) T_n'(\tau)}; \Psi_{skm}^i = \psi_{sk}^i(\tau_m),$$

де $T_n(\tau)$ – многочлен Чебишева другого роду; $\tau_m, m=1, 2, \dots, n$ – його корені.

Для визначення ψ_{skm}^i , як і в [27, 30], методом механічних квадратур з (10) отримана система лінійних алгебраїчних рівнянь. Після її розв’язання наближені значення КІН за результатами i -ї ітерації знаходяться за формулами

$$\begin{aligned} K_{pl}^{\pm i} &= \mu \sqrt{d_l} k_{pl}^{\pm i}; l=1, 2, \dots, N; p=1, 2; \\ k_{pl}^{+i} &= -(1 - \xi^2) n^{-1} \sum_{m=1}^n (-1)^m \psi_{2+plm}^i \operatorname{ctg}(0,5\beta_m); \\ k_{pl}^{-i} &= -(1 - \xi^2) n^{-1} (-1)^{p+n} \sum_{m=1}^n (-1)^m \psi_{2+plm}^i \operatorname{tg}(0,5\beta_m); \\ \beta_m &= \frac{\pi(2m-1)}{2n}; m=1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (11)$$

У формулах (11) верхній індекс плюс відповідає КІН в околі вершини l -ої тріщини $(+d_l, 0)$, індекс мінус – в околі вершини $(-d_l, 0)$.

Аналіз результатів числових досліджень

Числова реалізація запропонованого ітераційного методу проводилася з метою дослідження його практичної збіжності, стійкості ітераційного процесу, спроможності дослідити вплив хвильової взаємодії тріщин на значення КІН. Задля підтвердження достовірності результатів, отриманих ітераційним методом, як і в [17], розглянуто систему з чотирьох тріщин однакової довжини $2d$ (рис. 2), конфігурація якої визначається параметрами θ, h, β . Порівнювалися результати, отримані при безпосередньому розв’язанні системи (8), як в [12, 16–18, 25, 26] методом механічних квадратур та ітераційним методом.

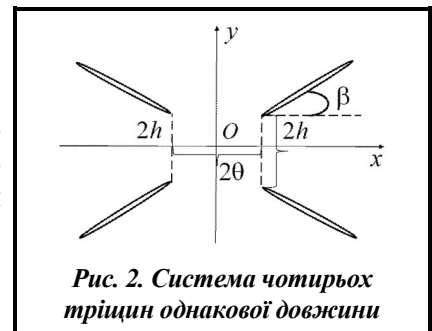


Рис. 2. Система чотирьох тріщин однакової довжини

Усі тріщини знаходяться під дією однакового нормального $N_{0k}=1$ або зсувного $T_{0k}=1$ навантажень, $k=1, 2, 3, 4$. При таких умовах КІН біля вершин усіх тріщин співпадають. Розрахунки проводилися при $\theta=h=0,75d, \beta=30^\circ$, а результати наведені на рис. 3. Вони показують зміну $|k_1^+|$ абсолютного значення КІН нормальних напружень залежно від безрозмірного хвильового числа $\kappa_0=\kappa_2d$.

При застосуванні ітераційного методу число ітерацій змінювалося від 2 до 16. Штрихова крива відповідає значенням КІН для окремої тріщини. Крива за номером 0 показує значення КІН, знайдені в результаті безпосереднього розв’язання системи інтегро-диференціальних рівнянь (8). Інші криві побудовані при вказаній кількості ітерацій. При $\kappa_0 \rightarrow 0$ значення КІН прямують до свого статичного аналогу. Можна побачити, що результати, отримані різними методами, практично співпадають вже після четвертої ітерації, крім першого самого суттєвого максимуму, де збіг спостерігається після 16 ітерацій. Це підтверджує достовірність результатів, отриманих ітераційним методом, і збіжність ітераційного процесу. Екстремальні значення КІН суттєво перевищують як свій статичний аналог, так і значення КІН для окремої тріщини. Збіжність ітераційного методу погіршується при $\beta \rightarrow 0$, тобто коли до системи входять близько розміщені паралельні тріщини. У цілому при $\beta=0$ збіжність спостерігається при $h > 0,5d$. Результати порівняння різних методів і досліджень збіжності при $\beta=0, \theta=h=0,75d$ показано на рис. 4.

Вони доводять, що розрахунки за різними методами, крім частоти $\kappa_0 \approx 0,9$, при якій має місце резонанс, добре узгоджуються. Вплив кута β на частотну залежність КІН зображено на рис. 5. Криві на рис. 5, а показують почастотну залежність КІН нормальних напружень $|k_1|$ при нормальному навантаженні тріщин, а на рис. 5, б частотну залежність КІН дотичних напружень $|k_2|$ при зсувному навантаженні при вказаних значеннях кута β .

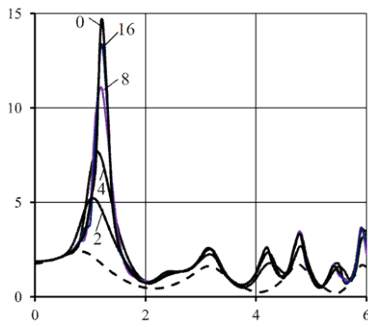


Рис. 3. Збіжність ітераційного методу

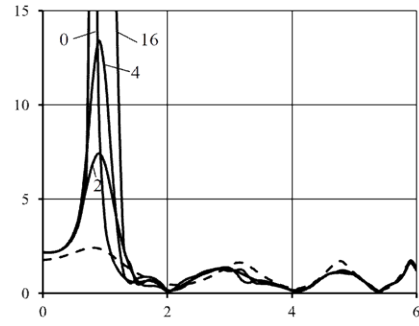
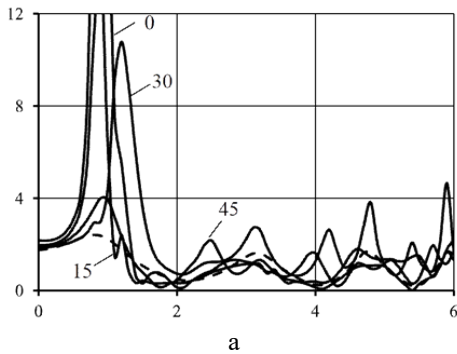
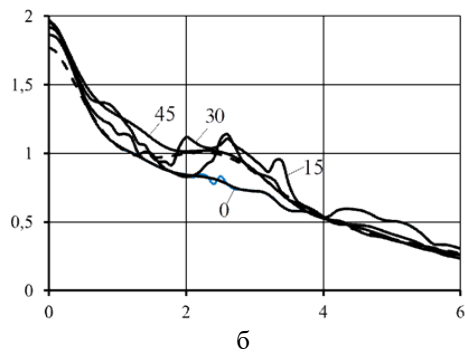


Рис. 4. Збіжність для системи чотирьох паралельних тріщин



а



б

Рис. 5. Вплив на значення КІН кута між тріщинами
а – при нормальному навантаженні; б – при зсувному навантаженні

У випадку нормального навантаження при всіх значеннях кута спостерігається наявність глобального максимуму КІН, частота досягнення якого залежить від кута β . Найбільше екстремальне значення КІН набуває при $\beta=0$, але при коливаннях із високою частотою $\kappa_0 > 1,8$ найбільших значень КІН сягає при $\beta=30^\circ$. При зсувному навантаженні тріщин значення КІН дотичних напружень мають тенденцію до спадання при зростанні частоти, а їх значення несуттєво відрізняються від КІН для однієї тріщини. Для більш детального вивчення впливу взаємодії динамічного навантаження тріщин на значення КІН розглянута наступна система 9 тріщин (рис. 6).

Конфігурація системи визначається параметрами θ, h, β , яким при розрахунках надавалися дані $\theta=h=d_1/3; d_k=d_1/3, k=2, \dots, 9$, а тріщини знаходилися під дією нормального навантаження. Результати наведено на рис. 7 у вигляді графіків залежності КІН нормальних напружень першої тріщини $|k_1^+|$ за вказаних значень кута β .

Як можна побачити, конфігурація системи тріщин суттєво впливає на поведінку КІН у частотній області. Зокрема, має місце глобальний максимум значення КІН, найбільший з яких досягається при $\beta=0$, коли всі тріщини паралельні. Також у випадку статичного навантаження і при низьких частотах ($\kappa_0 < 1,2$) наявність біля вершини тріщини інших тріщин приведе до зменшення значень КІН.

На рис. 8 наведено результати впливу на значення КІН кількості тріщин, що взаємодіють з однією тріщиною (у даному випадку, з першою).

Розглядалися випадки двох тріщин (першої та другої), трьох (з першої по третю), п'яти (з першої по п'яту), семи та дев'яти (рис. 6). Якщо порівняти значення КІН у точці глобального максимуму, то при збільшенні кількості тріщин до п'яти спочатку спостерігається їх зростання, а потім максимальні значення КІН практично не змінюються. В усіх випадках в області низьких частот ($\kappa_0 < 1,2$) наявність поруч інших тріщин приводить до зменшення значень КІН.

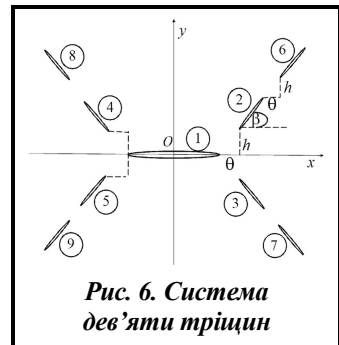


Рис. 6. Система дев'яти тріщин

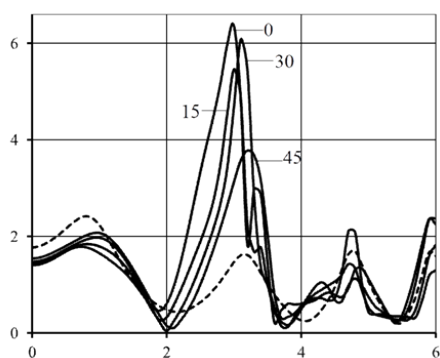


Рис. 7. Вплив конфігурації системи тріщин на значення КІН

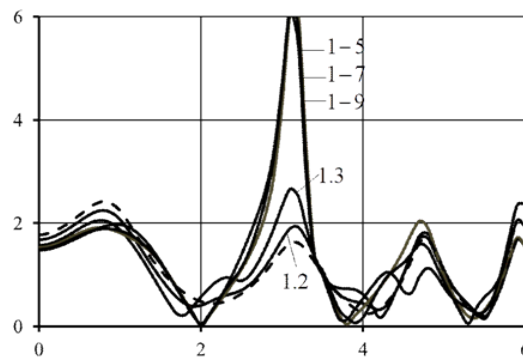


Рис. 8. Вплив кількості тріщин на значення КІН

Загальні висновки

Запропоновано ітераційний метод визначення КІН в умовах взаємодії системи динамічно навантажених тріщин, який дозволяє уникнути необхідності числового розв'язання систем інтегро-диференціальних рівнянь великого розміру. На кожному кроці ітерації розв'язується сукупність незалежних рівнянь, що відповідають випадкам окремих тріщин. Числові дослідження показали, що результати, отримані ітераційним методом, добре узгоджуються з результатами при безпосередньому розв'язанні системи інтегро-диференціальних рівнянь іншими методами. Продемонстровано стійкість і збіжність методу для систем досить щільно розміщених тріщин складної конфігурації. Важливим для оцінки працездатності і прогнозування руйнування деталей машин, що знаходяться під дією динамічного, зокрема вібраційного, навантаження, є існування частот, при яких спостерігаються абсолютні максимуми значень КІН. Ці максимальні значення суттєво (у кілька разів) перевищують значення КІН поодиноких тріщин при аналогічному навантаженні, тобто при наявності в деталі системи тріщин при цих частотах може перевищитись критичне значення КІН і відбутися руйнування деталі. У той сам час в умовах статичного або низькочастотного навантаження можливе зменшення значень КІН у порівнянні з КІН для окремих тріщин. Запропонований метод може бути поширений на системи інших дефектів, зокрема, тонких жорстких включень.

Література

1. Механіка руйнування та міцність матеріалів: за ред. Панасюка В. В. в 4-х томах. Т. 2. Коефіцієнти інтенсивності в тілах з тріщинами. Київ: Наукова думка, 1988. 620 с.
2. Sih G. C. Some elastodynamic problems of cracks. *International Journal of Fracture Mechanics*. 1968. Vol. 4. Iss. 1. P. 51–68. <https://doi.org/10.1007/BF00189147>.
3. Zozulya V. V. Solution of the elastodynamic contact problem for a cracked body using the boundary integral equation method. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2019. Vol. 26. Iss. 11. P. 924–937. <https://doi.org/10.1080/15376494.2018.1430279>.
4. Yongtao Y., Dongdong X., Hong Z. Evaluation on stress intensity factor of crack under dynamic load using numerical manifold method. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*. 2014. Vol. 46. Iss. 5. P. 730–738. <https://doi.org/10.6052/0459-1879-14-024>.
5. Phan A. V. Dynamic stress intensity factor analysis of the interaction between multiple impact-loaded cracks in infinite domains. *AIMS Materials Science*. 2016. Vol. 3. Iss. 4. P. 1683–1695. <https://doi.org/10.3934/mat.2016.4.1683>.
6. Wen L.-F., Tian R., Wang L.-X., Feng C. Improved XFEM for multiple crack analysis: Accurate and efficient implementations for stress intensity factors. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2023. Vol. 411. Article 116045. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2023.116045>.
7. Alshoabi A. M., Fageehi Y. A. 2D finite element simulation of mixed mode fatigue crack propagation for CTS specimen. *Journal of Materials Research and Technology*. 2020. Vol. 9. Iss. 4. P. 7850–7861. <https://doi.org/10.1016/j.jmrt.2020.04.083>.
8. Fageehi Y. A., Alshoabi A. M. Nonplanar crack growth simulation of multiple cracks using finite element method. *Advances in Materials Science and Engineering*. 2020. Article ID 8379695. 12 p. <https://doi.org/10.1155/2020/8379695>.

9. Fageehi Y. A. Prediction of fatigue crack growth rate and stress intensity factors using the finite element method. *Advances in Materials Science and Engineering*. 2022. Article ID 2705240. 17 p. <https://doi.org/10.1155/2022/2705240>.
10. Bouchon M., Sanchez-Sesma F. J. Boundary integral equations and boundary elements method in elastodynamics. *Advances in Geophysics*. 2007. Vol. 48. P. 157–189. [https://doi.org/10.1016/S0065-2687\(06\)48003-1](https://doi.org/10.1016/S0065-2687(06)48003-1).
11. Chirino F., Dominguez J. Dynamic analysis of cracks using boundary element method. *Engineering Fracture Mechanics*. 1989. Vol. 34. Iss. 5–6. P. 1051–1061. [https://doi.org/10.1016/0013-7944\(89\)90266-X](https://doi.org/10.1016/0013-7944(89)90266-X).
12. Gross D., Zhang Ch. Diffraction of SH waves by a system of cracks: Solution by an integral equation method. *International Journal of Solids and Structures*. 1988. Vol. 24. Iss. 1. P. 41–49. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(88\)90097-2](https://doi.org/10.1016/0020-7683(88)90097-2).
13. Liu E., Zhang Z. Numerical study of elastic wave scattering by cracks or inclusions using the boundary integral equation method. *Journal of Computational Acoustics*. 2001. Vol. 09. No. 03. P. 1039–1054. [https://doi.org/10.1016/S0218-396X\(01\)00131-5](https://doi.org/10.1016/S0218-396X(01)00131-5).
14. Sladek J., Sladek V. A boundary integral equation method for dynamic cracks problems. *Engineering Fracture Mechanics*. 1987. Vol. 27. Iss. 3. P. 269–277. [https://doi.org/10.1016/0013-7944\(87\)90145-7](https://doi.org/10.1016/0013-7944(87)90145-7).
15. Ang W. T., Clements D. L., Dehghan M. Scattering and diffraction of sh waves by multiple planar cracks in an anisotropic half-space: A hypersingular integral formulation. *International Journal of Solids and Structures*. 1993. Vol. 30. Iss. 10. P. 1301–1312. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(93\)90213-Q](https://doi.org/10.1016/0020-7683(93)90213-Q).
16. Sarkar J., Mandal S. C., Ghosh M. L. Diffraction of elastic waves by three coplanar Griffith cracks in an orthotropic medium. *International Journal of Engineering Science*. 1995. Vol. 33. Iss. 2. P. 163–177. [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(94\)00059-S](https://doi.org/10.1016/0020-7225(94)00059-S).
17. Sarkar J., Mandal S. C., Ghosh M. L. Four coplanar Griffith cracks moving in an infinitely long elastic strip under antiplane shear stress. *Proceedings of the Indian Academy of Sciences (Mathematical Sciences)*. 1996. Vol. 106. Iss. 1. P. 91–103. <https://doi.org/10.1007/BF02837190>.
18. Sarkar J., Mandal S. C., Ghosh M. L. Interaction of elastic waves with two coplanar Griffith cracks in an orthotropic medium. *Engineering Fracture Mechanics*. 1994. Vol. 49. Iss. 3. P. 411–423. [https://doi.org/10.1016/0013-7944\(94\)90269-0](https://doi.org/10.1016/0013-7944(94)90269-0).
19. Trivedi N., Das S., Altenbach H. Study of collinear cracks in a composite medium subjected to time harmonic wave disturbance. *ZAMM Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2021. Vol. 101. Iss. 6. Article e202000307. <https://doi.org/10.1002/zamm.202000307>.
20. Jain D. L., Kanval R. P. Diffraction of elastic waves by two coplanar Griffith cracks in an infinity elastic medium. *International Journal of Solids and Structures*. 1972. Vol. 8. Iss. 7. P. 961–975. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(72\)90009-1](https://doi.org/10.1016/0020-7683(72)90009-1).
21. Angel Y. C., Achenbach J. D. Reflection and transmission of elastic waves by a periodic array of cracks: Oblique incidence. *Wave Motion*. 1985. Vol. 7. Iss. 4. P. 375–397. [https://doi.org/10.1016/0165-2125\(85\)90006-X](https://doi.org/10.1016/0165-2125(85)90006-X).
22. Scarpetta E. In-plane problem for wave propagation through elastic solids with a periodic array of cracks. *Acta Mechanica*. 2002. Vol. 154. Iss. 1–4. P. 179–187. <https://doi.org/10.1007/BF01170706>.
23. Zhang C. Dynamic stress intensity factor of collinear periodic antiplane cracks. *Journal of Tongji University*. 1990. Vol. 18. P. 445–451.
24. Wang Y.-B., Sun Y.-Z. A new boundary integral equation method for cracked 2-D anisotropic bodies. *Engineering Fracture Mechanics*. 2005. Vol. 72. Iss. 13. P. 2128–2143. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2005.01.007>.
25. Huang J. Y., So H. Diffraction of P waves by two cracks at arbitrary position in an elastic medium. *Engineering Fracture Mechanics*. 1988. Vol. 29. Iss. 3. P. 335–347. [https://doi.org/10.1016/0013-7944\(88\)90021-5](https://doi.org/10.1016/0013-7944(88)90021-5).
26. Tsai C.-H., Ma C.-C. The interaction of two inclined cracks with dynamic stress wave loading. *International Journal of Fracture*. 1992. Vol. 58. Iss. 1. P. 77–91. <https://doi.org/10.1007/BF00019752>.
27. Popov V. G. System of cracks under the impact of plane elastic waves. *Journal of Physics: Conference Series*. 2022. Vol. 2231. Article 012004. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2231/1/012004>.
28. Takakuda K. Diffraction of plane harmonic waves by cracks. *Bulletin of JSME*. 1983. Vol. 26. Iss. 214. P. 487–493. <https://doi.org/10.1299/jsme1958.26.487>.
29. Zhang Ch., Gross D. The solution of plane problem of wave loaded cracks by an integral equation method. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1988. Vol. 68. Iss. 7. P. 299–305. <https://doi.org/10.1002/zamm.19880680705>.
30. Попов В. Г. Ітераційний метод визначення дифракційного поля при взаємодії хвилі повздожнього зсуву з системою тріщин. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2011. Т. 54. № 1. С. 204–211.

Надійшла до редакції 10.04.2024