

¹ Ю. С. Литвинова^{1,2} К. В. Максименко-Шейко,
д-р техн. наук¹ Т. И. Шейко, д-р. техн. наук¹ Институт проблем машиностроения
им. А. Н. Подгорного
НАН Украины,
г. Харьков, e-mail:
sheyko@ipmach.kharkov.ua² Харьковский национальный
университет имени В. Н. Каразина**Ключові слова:** 3D-друк, задання інформації,
R-функції, будівельні конструкції, аналітична
ідентифікація

УДК 517.95+518.517+519.6

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕР-
НОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СТРОИ-
ТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ НА
ОСНОВЕ R-ФУНКЦИЙ**

В Амстердамі команда архітекторів (DUS Architects) працює над проектом, який має опанувати один з найважливіших напрямів розвитку тривимірного друку – будівництво будинків. В Kumai (Yingchuan New Materials) з'явився принтер, який може друкувати невеликі одно- та двоповерхові будівлі. В університеті Південної Каліфорнії професор Behrokh Khoshnevis розробив проект тривимірного принтера, який може "надрукувати" двоповерховий будинок протягом усього 24 годин. Одним з методів розв'язання проблеми задання інформації для друку є застосування теорії R-функцій, за допомогою якої в роботі побудовано математичну і комп'ютерну моделі будинку для подальшої їх реалізації на 3D-принтері.

Введение

В настоящее время для создания трёхмерных физических объектов весьма перспективным является использование 3D-принтеров. В основе технологии 3D-печати лежит принцип послойного создания твердой модели. Преимуществами подобных устройств перед обычными способами создания моделей являются высокая скорость, простота и низкая стоимость. В Амстердаме команда архитекторов работает над проектом, призванным освоить одно из самых важных направлений развития 3D-печати – строительство зданий. Над проектом работает команда архитекторов из разных стран, нанятая нидерландской студией DUS Architects. Ее руководители намерены возвести здание в северной части Амстердама на канале Buiksloter (рис. 1), и оно будет функционировать в качестве образца и исследовательского центра для технологий 3D-печати (рис. 1, а) [1]. Если проект будет иметь успех, то трёхмерная печать может стать основным методом производства стройматериалов любых размеров и состава. Это может не только перевернуть строительный бизнес, но и существенно улучшить экологию, уверены специалисты. Очередным шагом к реализации будущего трехмерной печати является проект Бехроха Хошневиса (Behrokh Khoshnevis), профессора из университета Южной Калифорнии (Uni-

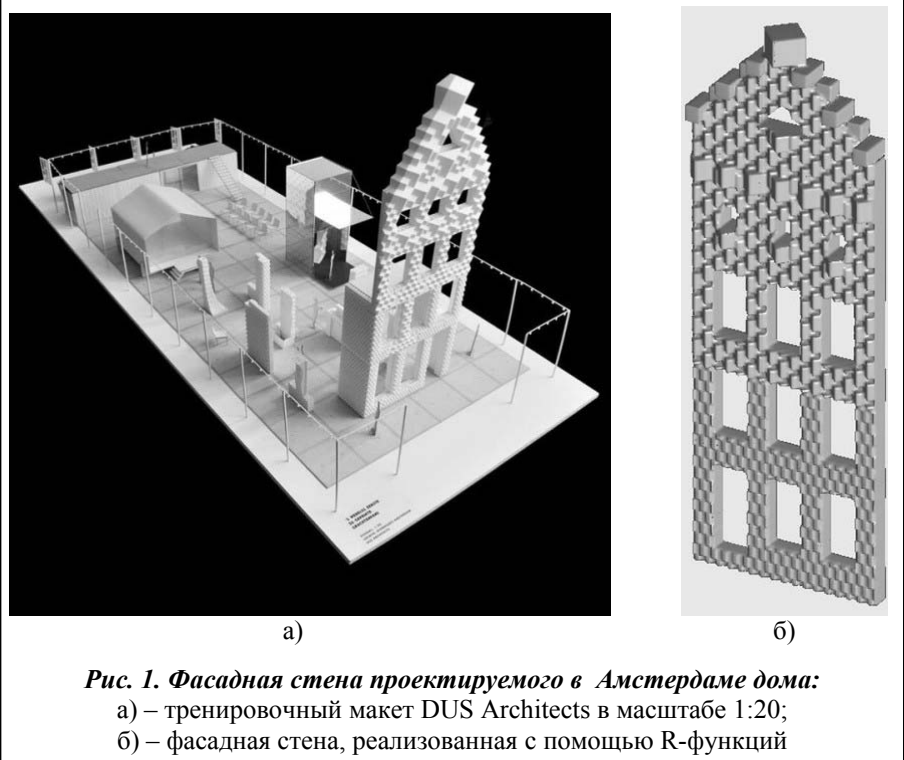


Рис. 1. Фасадная стена проектируемого в Амстердаме дома:
а) – тренировочный макет DUS Architects в масштабе 1:20;
б) – фасадная стена, реализованная с помощью R-функций

versity of Southern California), который представляет собой проект самого большого трехмерного принтера, способного «напечатать» двухэтажный дом в течение всего 24 часов.

Кроме этого, благодаря возможностям технологий трехмерной печати, люди смогут избавиться от навевающих скуку пейзажей кварталов, застроенных домами типовых проектов. Ведь с помощью компьютера каждый более-менее грамотный человек сможет составить проект своего будущего дома из набора готовых компонентов подобно тому, как дизайнеры-мебельщики составляют проекты при помощи специализированного программного обеспечения. Однако возникает проблема задания информации для печати, т.е. создания математической и компьютерной модели проектируемого объекта. Одним из методов решения этой проблемы является применение теории R-функций [2–5], которая позволяет описывать геометрические объекты сложной формы единым аналитическим выражением (рис. 1, б).

Целью данной работы является создание на основе теории R-функций математической и компьютерной модели дачного домика в целом.

Построение уравнений и компьютерная реализация

Для построения искомым уравнений геометрических объектов используем следующие конструктивные средства теории R-функций: наиболее простую и поэтому наиболее часто применяемую систему R_0 [2, 4]:

$$\begin{cases} x \wedge_0 y \equiv x + y - \sqrt{x^2 + y^2} \\ x \vee_0 y \equiv x + y + \sqrt{x^2 + y^2} \\ \bar{x} \equiv -x \end{cases},$$

где $\wedge_0, \vee_0, \bar{}$ — символы R-конъюнкции, R-дизъюнкции и R-отрицания соответственно. Кроме того, для построения уравнений, соответствующих геометрическим объектам с симметрией трансляции вдоль прямой, воспользуемся следующей теоремой [4].

Теорема. Пусть трансляционная область $\Sigma_0 = [\sigma_0(x, y, z) \geq 0]$ симметрична относительно оси Oy и может быть заключена в вертикальную полосу $-a < x < a$, а области $\Sigma_i = [\sigma_0(x - hi, y, z) \geq 0]$ получены в результате преобразования переноса области Σ_0 вдоль оси абсцисс на величины, кратные $h > 2a$. Тогда уравнение границы $\partial\Omega$ области $\Omega = \bigcup_{i \in Z} \Sigma_i$ имеет вид $\omega(x, y, z) \equiv \sigma_0(\mu(x, h), y, z) = 0$, где

$$\mu(x, h) = \frac{4h}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{(2i-1)^2} \sin \frac{(2i-1)x\pi}{h}.$$

Для построения уравнений, соответствующих геометрическим объектам с точечной симметрией циклического типа, воспользуемся следующей теоремой [4].

Теорема. Пусть трансляционная область $\Sigma_0 = [\sigma_0(x, y, z) \geq 0]$ симметрична относительно оси абсцисс, а область $\Sigma_1 = [\sigma_0(x - r_0, y, z) \geq 0]$ может быть размещена внутри сектора $-\alpha \leq \theta \leq \alpha$, $-0 < \alpha < \pi/n$. Области $\Sigma_k = [\sigma_0(r \cos(\theta - 2\pi k/n) - r_0, r \sin(\theta - 2\pi k/n), z) \geq 0]$ получены в результате поворота области $\Sigma_1 = [\sigma_0(x - r_0, y, z) \geq 0]$ в плоскости xOy вокруг начала координат на углы $2\pi k/n$. Тогда уравнение границы $\partial\Omega$ области $\Omega = \bigcup_{k=0}^{n-1} \Sigma_k$ имеет вид $\omega(x, y) \equiv \sigma_0(r \cos \mu(\theta, n) - r_0, r \sin \mu(\theta, n), z)$,

$$\left(r = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \arctg \frac{y}{x} \right), \text{ где } \mu(n\theta) = \frac{8}{n\pi} \sum_k (-1)^{k+1} \frac{\sin \left[(2k-1) \frac{n\theta}{2} \right]}{(2k-1)^2}.$$

Построим уравнение типового дачного домика (рис. 2).

Уравнение фундамента имеет вид

$$f_{\text{фун}} = ((0,4+x)(9,4-x) \wedge_0 (0,4+y)(8,4-y)) \wedge_0 ((0,6+z)(-z)) \geq 0.$$

Уравнение внешних стен
 $f_c = f_{11} \wedge_0 ((0,4 + z)(H - z)) \geq 0$,
 где $f_{11} = \delta_1 - |f_1| \geq 0$; $2\delta_1 = 1,6$ –
 толщина внешних стен; $H = 7$ –
 высота стен;

$$f_1 = \left(\frac{x(9-x)}{9} \right) \wedge_0 \left(\frac{y(8-y)}{8} \right) \geq 0.$$

На рис. 3 представлен процесс соединения стен с фундаментом и добавления внутренних перегородок.

Соединяем стены с фундаментом (рис. 3, а):

$$f_d = f_c \vee_0 f_{fun} \geq 0.$$

Строим уравнения внутренних перегородок (рис. 3, б):

$$f_{b1} = 0,05 - |a - y| \geq 0,$$

$$f_{b2} = \delta_2 - |b - x| \geq 0,$$

$$f_{b3} = (\delta_2 - |c - x|) \wedge_0 (3 - y) \geq 0,$$

$a = 2, b = 5, c = 8, 2\delta_1 = 0,1$ —
 толщина внутренних перегородок,

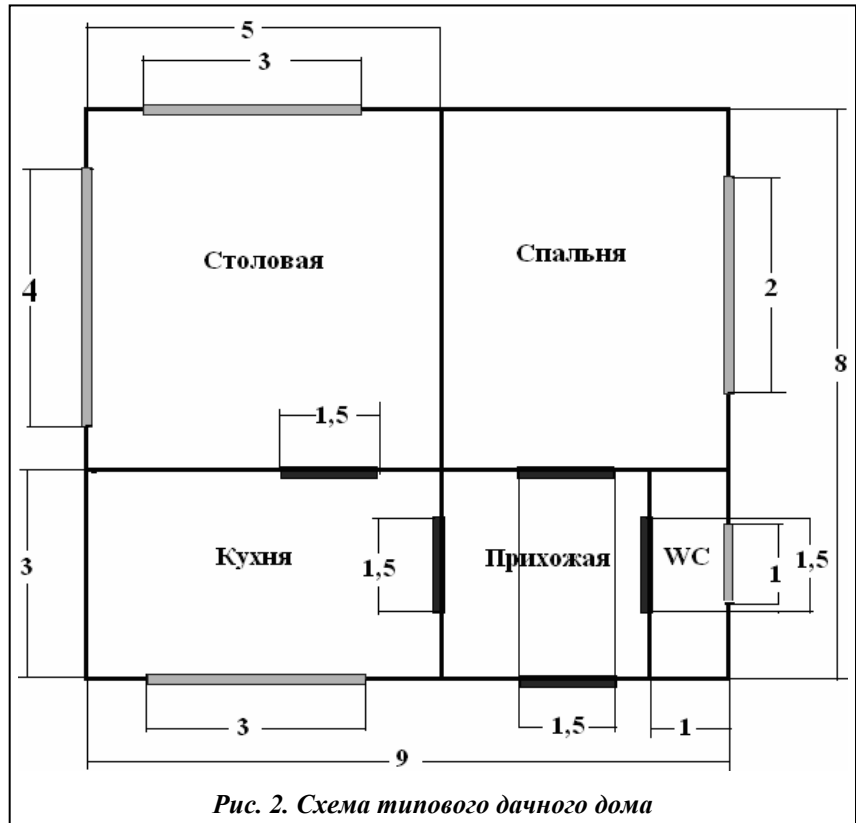


Рис. 2. Схема типового дачного дома

$$f_{fb} = ((f_{b1} \vee_0 f_{b2} \vee_0 f_{b3}) \wedge_0 ((0,4 + z)(7 - z))) \wedge_0 f_1 \geq 0, kor = f_d \vee_0 f_{fb} \geq 0.$$

На рис. 4 представлен процесс добавления дверных и оконных проемов.

Уравнения дверных проемов (рис. 4, а):

$$dv_1 = ((8,5 - x)(x - 4,5) \wedge_0 (2,5 - y)(y - 1)) \wedge_0 z(h_1 - z) \geq 0;$$

$$dv_2 = ((4,5 - x)(x - 3) \wedge_0 (4 - y)(y - 2)) \wedge_0 z(h_1 - z) \geq 0;$$

$$dv_3 = ((7,5 - x)(x - 6) \wedge_0 (7 - y)(y + 1)) \wedge_0 z(h_1 - z) \geq 0;$$

$$dv_{123} = (dv_1 \vee_0 dv_2) \vee_0 dv_3 \geq 0; dom = kor \wedge_0 (-dv_{123} \geq 0) dv_3 \geq 0.$$

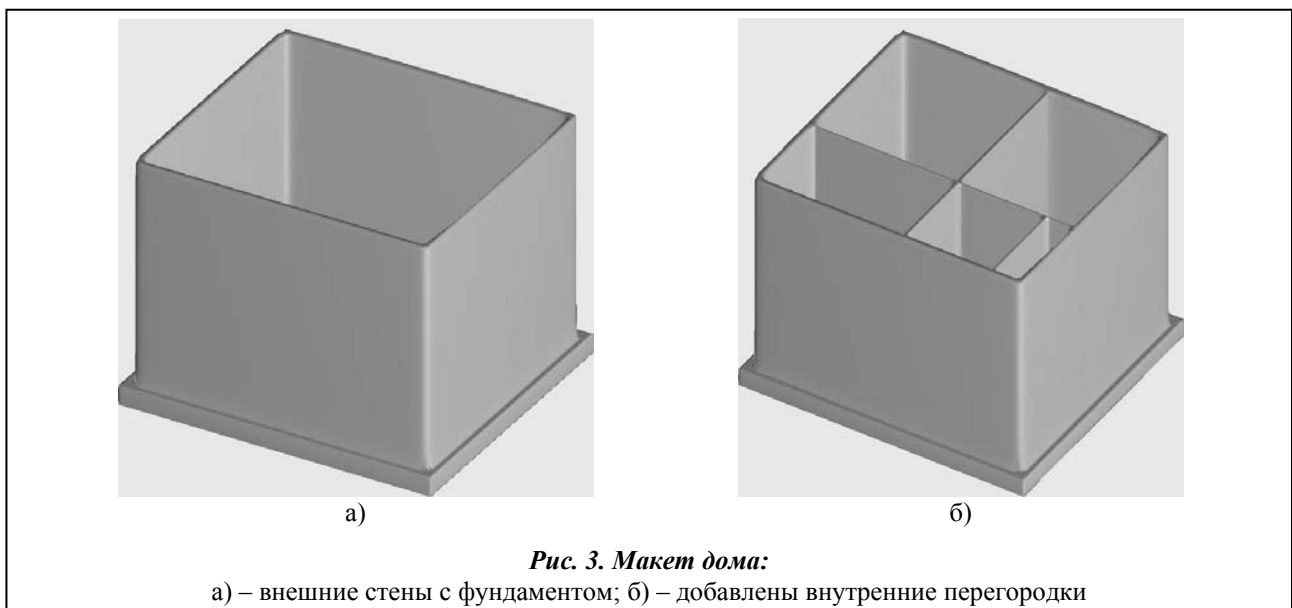


Рис. 3. Макет дома:

а) – внешние стены с фундаментом; б) – добавлены внутренние перегородки

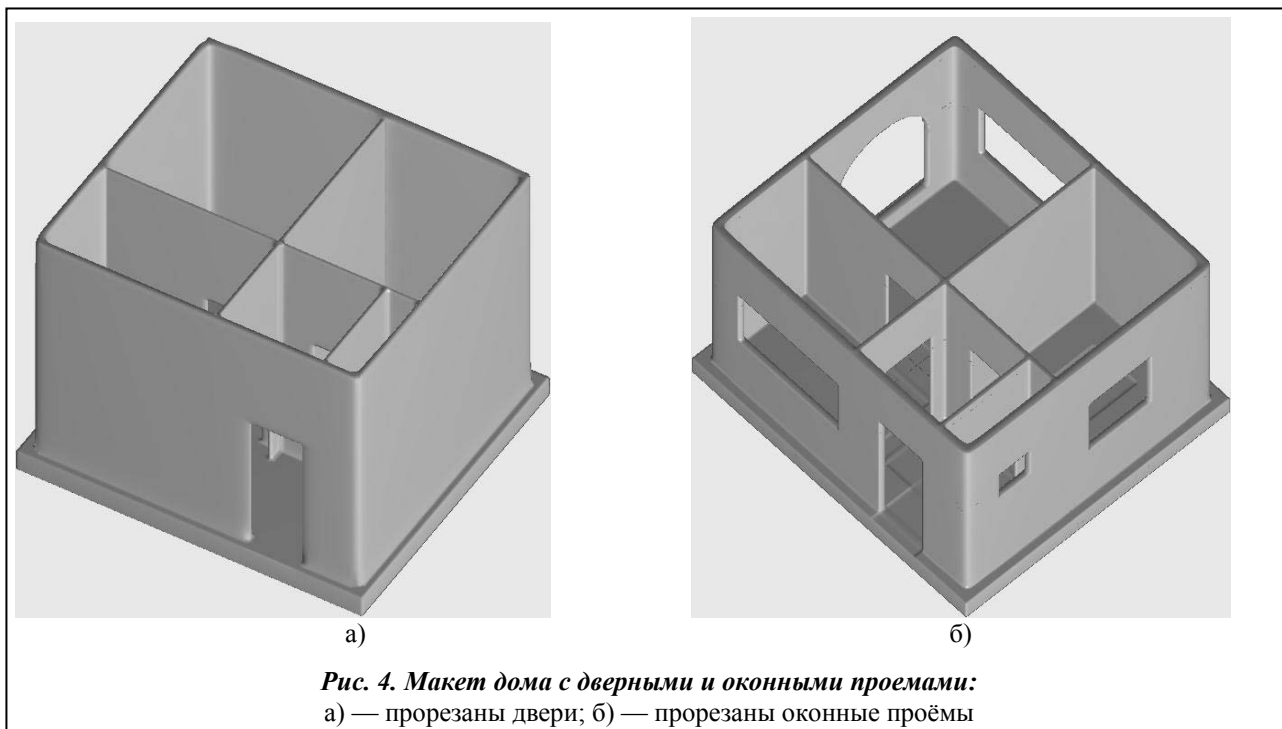


Рис. 4. Макет дома с дверными и оконными проемами:
а) — прорезаны двери; б) — прорезаны оконные проёмы

Уравнения оконных проемов (рис. 4, б):

$$\begin{aligned}
 ok_1 &= ((4-x)(x-1) \wedge_0 (2-y)(7-y)) \wedge_0 (z-h_2)(h_1-z) \geq 0; \\
 ok_2 &= ((6-y)(y-4) \wedge_0 (x-8)) \wedge_0 (z-h_2)(h_1-z) \geq 0; \\
 ok_3 &= ((2-y)(y-1) \wedge_0 (x-8,5)) \wedge_0 (z-h_3)(h_1-z) \geq 0; \quad h_1 = 5, \quad h_2 = 2, \quad h_3 = 4, \\
 ok_4 &= (((7-y)(y-4) \wedge_0 (z-0,5)(3-z)) \vee_0 (2,25 - (y-5,5)^2 - (z-3)^2)) \wedge_0 (1-x) \geq 0; \\
 ok_{1234} &= ((ok_1 \vee_0 ok_2) \vee_0 ok_3) \vee_0 ok_4 \geq 0; \quad dom_3 = dom \wedge_0 (-ok_{1234}) \geq 0.
 \end{aligned}$$

На рис. 5 представлен процесс добавления крыши с перекрытием и трубой, а также общий вид дома после этой операции.

Крыша $z_0 = 4; z_1 = z - H; x_1 = 4,5 - z_0 \frac{x-4,5}{z_1-z_0}; y_1 = 4 - z_0 \frac{y-4}{z_1-z_0}; z_2 = z - (H + \delta_{kr});$ — толщина крыши, $y_2 = 4 - z_0 \frac{y-4}{z_2-z_0}; f_{kr2} = (x_2(9-x_2) \wedge_0 y_2(8-y_2)) \wedge_0 (z_0-z_2)(z_1+0,5) \geq 0;$

$$f_{kr} = f_{kr2} \wedge_0 (-f_{kr1}) \geq 0.$$

Перекрытие $f_{per} = f_1 \wedge_0 (7,15-z)(z-7) \geq 0; f_{krper} = f_{kr} \vee_0 f_{per} \geq 0.$

Труба-воздуховод $f_{tr1} = (2-x)(x-1) \wedge_0 (2-y)(y-1) \geq 0; f_{krpertr1} = f_{krper} \wedge_0 (-f_{tr1}) \geq 0;$
 $f_{tr} = (0,05 - |f_{tr1}|) \wedge_0 (10-z)(z-6,9) \geq 0.$

Уравнение крыши, перекрытия и воздуховода (рис. 5, а) $f_{krpertr} = f_{krpertr1} \vee_0 f_{tr} \geq 0.$

Уравнение дома в общей сборке (рис. 5, б) $f_{fin} = f_{krpertr} \vee_0 dom_3 \geq 0.$

Фасад дома может быть украшен орнаментом по выбору заказчика (рис. 6, 7).

Оформление французского окна (рис. 6, 7) выполнено с использованием уравнения $W = wt \vee_0 fk \geq 0,$ где уравнение скрученного тора $wt = wt_1 \vee_0 wt_2 \geq 0, (wt = wt_1 \geq 0);$

$$\begin{aligned}
 wt_1 &= \left(1 - \frac{yy^2}{0,25} - \frac{zz^2}{0,09}\right) \wedge_0 z-3 \geq 0; \quad \begin{cases} yy = ro \cos alt + x \sin alt \\ zz = -ro \sin alt + x \cos alt \end{cases}; \quad ro = \sqrt{zt^2 + y^2} - r, \quad alt = n \arctg \frac{y}{zt}; \\
 r &= 1,5; \quad n = 4; \quad zt = z - 3; \quad wt_2 = wt_1(-alt),
 \end{aligned}$$

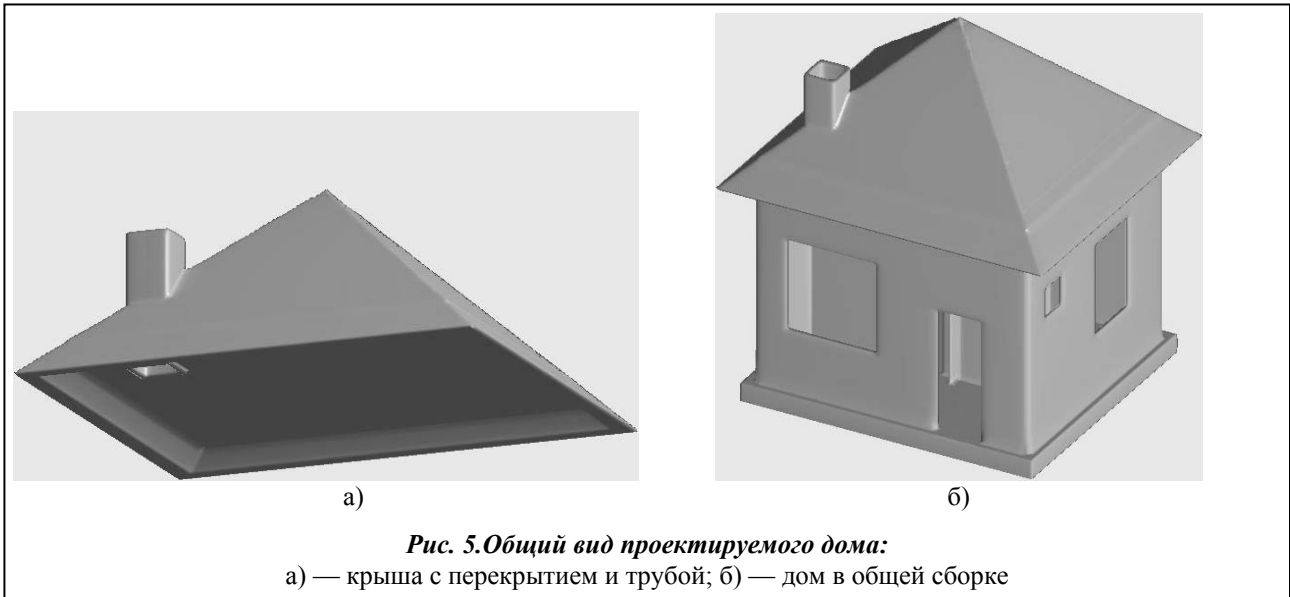


Рис. 5.Общий вид проектируемого дома:
 а) — крыша с перекрытием и трубой; б) — дом в общей сборке

Уравнение боковых колонн имеет вид $fk = fk_1 \vee_0 fk_{22} \geq 0, (fk = fk_1 \geq 0);$

$$fk_1 = (f_1 \vee_0 f_2) \wedge_0 z(3-z) \geq 0; f_1 = 1 - \frac{xk_1^2}{0,25} - \frac{yk_1^2}{0,09} \geq 0; f_2 = 1 - \frac{xk_2^2}{0,25} - \frac{yk_2^2}{0,09} \geq 0;$$

$$\begin{cases} xk_1 = x \cos al - (y - 1,5) \sin al \\ yk_1 = -x \sin al + (y - 1,5) \cos al \end{cases}; \begin{cases} xk_2 = x \cos al - (y + 1,5) \sin al \\ yk_2 = -x \sin al + (y + 1,5) \cos al \end{cases}; al = \frac{2\pi z}{2,42}; fk_2 = fk_1(-al) \geq 0.$$

Построим уравнение многопрофильной крыши (рис. 8)

$$f_{kr} = (((f_{kr1} \vee_0 f_{kr2}) \vee_0 f_{kr3}) \vee_0 f_{kr4}) \vee_0 f_{kr5} \geq 0, f_{kr1} = (x_{11}(9 - x_{11}) \wedge_0 y_{11}(8 - y_{11})) \wedge_0 (z_{01} - z_1)(z_1 + 0,5) \geq 0,$$

$$x_{11} = x_{01} - \frac{z_0(x - x_{01})}{z_1 - z_{01}}; y_{11} = y_{01} - \frac{z_0(y - y_{01})}{z_1 - z_{01}}; x_{01} = 4,5, y_{01} = 4, z_{01} = 8, z_1 = z - hc.$$

$$f_{kri} = (x_{1i}(9 - x_{1i}) \wedge_0 y_{1i}(8 - y_{1i})) \wedge_0 (z_0 - z_1)(z_1 + 0,5) \geq 0, x_{1i} = x_{0i} - \frac{z_0(x - x_{0i})}{z_1 - z_0}; y_{1i} = y_{0i} - \frac{z_0(y - y_{0i})}{z_1 - z_0},$$

$$i = 2,3,4,5. x_{02} = 1, (x_{02} = 4,5), y_{02} = 1, z_0 = 4. x_{03} = 8, (x_{03} = 1), y_{03} = 1, (y_{03} = 4).$$

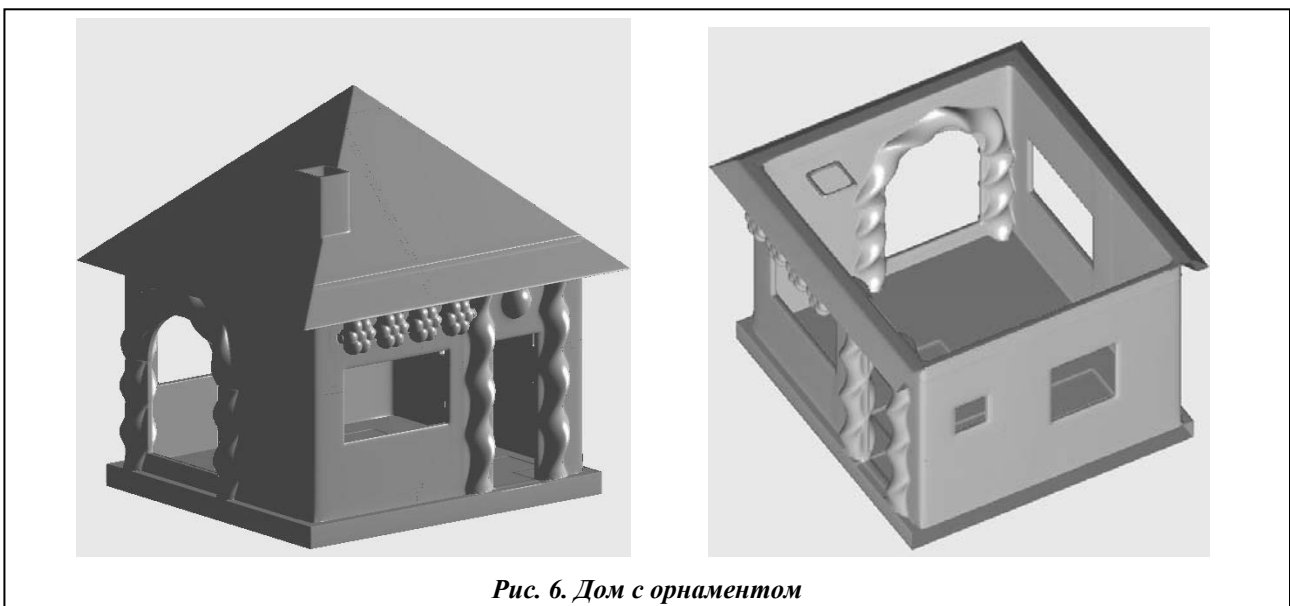


Рис. 6. Дом с орнаментом

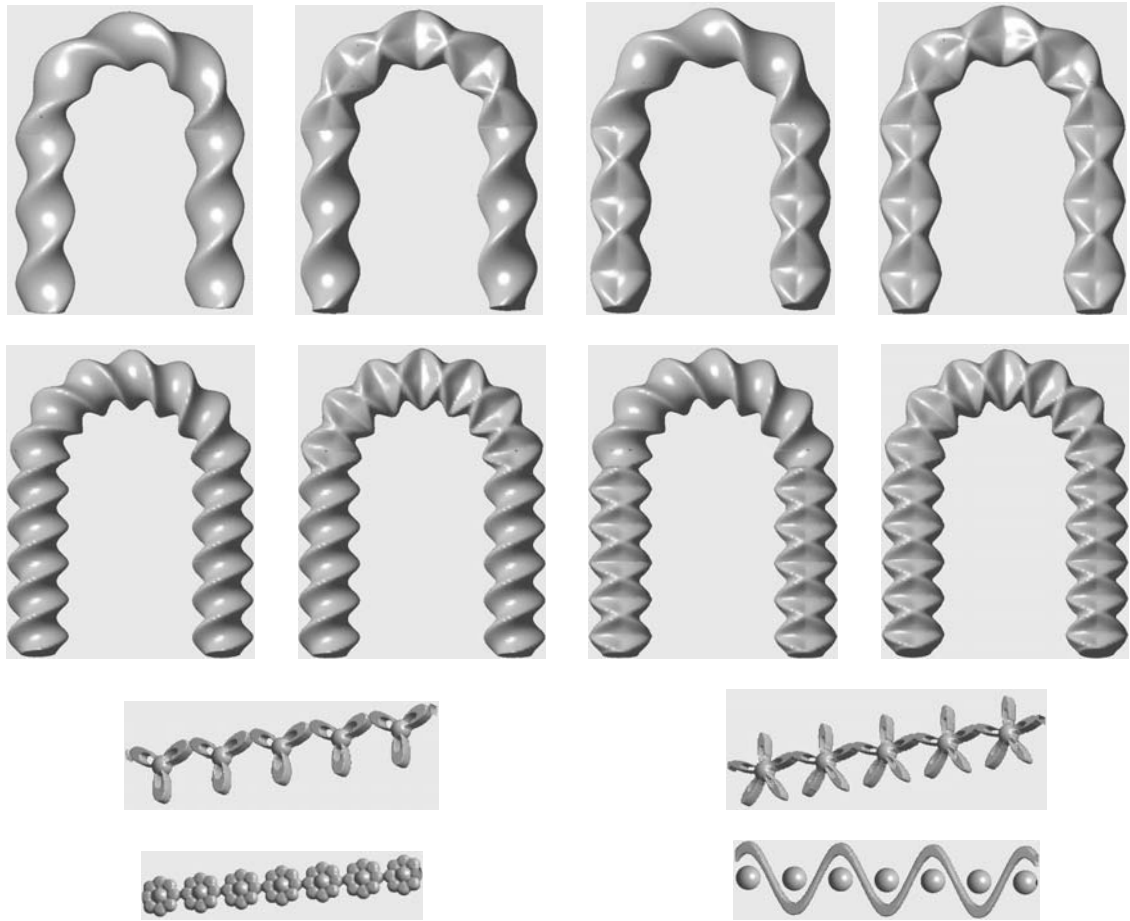


Рис. 7. Виды орнаментов

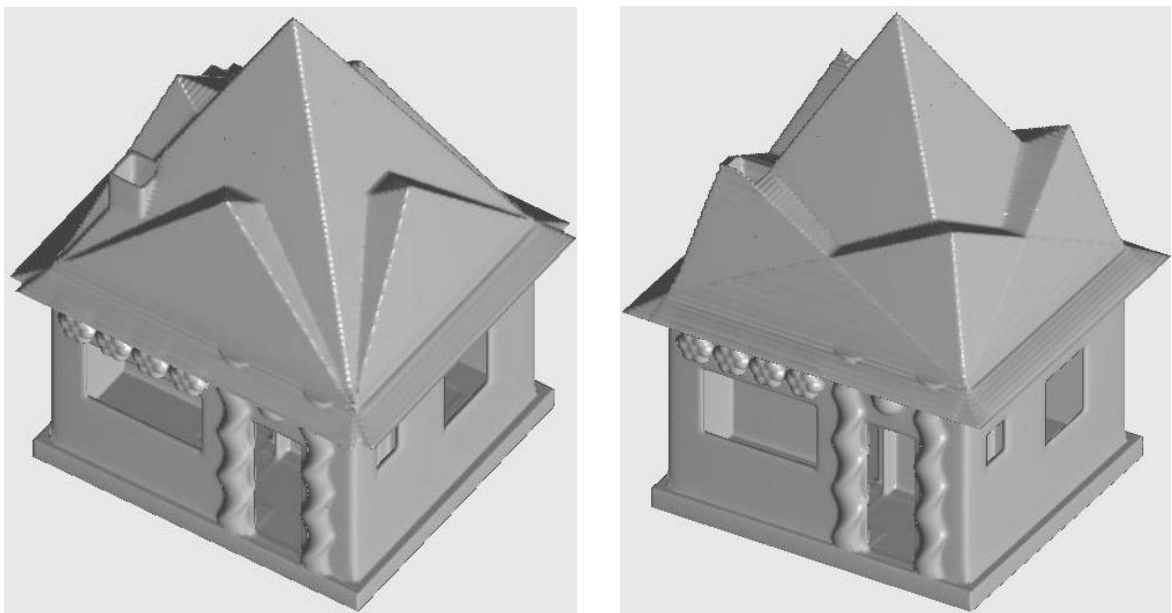


Рис 8. Дом с многопрофильной крышей при различных значениях $X_{об}$ U_{0i}

Ниже построено уравнение цветочного орнамента, в котором, меняя значения параметров n_{o1} , n_{o2} , получим разное количество элементов на окружности и количество лепестков цветка, что проиллюстрировано на рис. 9.

$$wk = w1 \vee_0 (rk^2 - x_1^2 - y_1^2 - z^2) \geq 0, \quad rk = \frac{0.5}{3.6}, \quad \begin{cases} x_1 = r_{o1} \cos mu_1 - 2/1.2 \\ y_1 = r_{o1} \sin mu_1 \end{cases}; \quad mu_1 = \frac{8}{n_{o1}\pi} \sum_k (-1)^{k+1} \frac{\sin ff_1}{(2k-1)^2};$$

$$ff_1 = \frac{\theta_1 n_{o1}}{2}; \quad r_{o1} = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta_1 = \arctg \frac{y}{x}; \quad n_{o1} = 14. \quad w_1 = (rk^2 - x_2^2 - y_2^2 - z^2) \geq 0,$$

$$\begin{cases} x_2 = r_{o2} \cos mu_2 - 1/3.6 \\ y_2 = r_{o2} \sin mu_2 \end{cases}; \quad mu_2 = \frac{8}{n_{o2}\pi} \sum_k (-1)^{k+1} \frac{\sin ff_2}{(2k-1)^2}; \quad ff_2 = \frac{\theta_2 n_{o2}}{2}; \quad r_{o2} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}, \quad \theta_2 = \arctg \frac{y_1}{x_1};$$

$$n_{o2} = 8.$$

Уравнение внешнего тора имеет вид $wt = rk^2 - \frac{xx_t^2}{0,25} - zz_t^2$, $\begin{cases} zz_t = ro \cos alt + z \sin alt \\ xx_t = -ro \sin alt + z \cos alt \end{cases}$,

$$ro = \sqrt{x^2 + y^2} - 8/3,6, \quad alt = narctg \frac{y}{x}, \quad n = 20. \quad (\text{При } alt = 0 \text{ получаем уравнение нескрученного тора.})$$

Центральная часть лепнины с подложкой и центральным отверстием описывается уравнением $f_{1l} = \left[(1 - x^2 - y^2 - 2z) \wedge_0 z \right] \vee_0 \left[\left((8/3,6)^2 - x^2 - y^2 \right) \wedge_0 \left((0,2/3,6)^2 - z^2 \right) \right] \geq 0$, $f_{2l} = x^2 + y^2 - 0,01 \geq 0$, $f_r = r^2 - f_{1l}^2 - f_{2l}^2 \geq 0$, $r = 0,3$, $f_{3l} = f_{1l} + f_{2l} - \sqrt{f_{1l}^2 + f_{2l}^2 + \frac{f_r}{8r^2} (|f_r| + f_r)} \geq 0$.

Первая линия обрамления центрального отверстия $f_4 = x_{e1}^2 + y_{e1}^2 - 0,06^2 \geq 0$, $\begin{cases} x_{e1} = roe \cos mu_{e1} - 0,3 \\ y_{e1} = roe \sin mu_{e1} \end{cases}$, $mu_{e1} = \frac{8}{no_{e1}\pi} \sum_k (-1)^{k+1} \frac{\sin ff_{e1}}{(2k-1)^2}$, $ff_{e1} = \frac{\theta e \cdot no_{e1}}{2}$, $no_{e1} = 8$, $roe = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta e = \arctg \frac{y}{x}$.

Вторая линия обрамления центрального отверстия $f_5 = x_{e2}^2 + y_{e2}^2 - 0,01 \geq 0$, $\begin{cases} x_{e2} = roe \cos mu_{e2} - 0,7 \\ y_{e2} = roe \sin mu_{e2} \end{cases}$, $mu_{e2} = \frac{8}{noe\pi} \sum_k (-1)^{k+1} \frac{\sin ff_{e2}}{(2k-1)^2}$, $ff_{e2} = \frac{(\theta e - \pi / noe) \cdot noe}{2}$, $noe = 6, 10$.

Третья линия обрамления центрального отверстия эллипсоидальными отверстиями $f_e = \left(1 - \frac{xe^2}{0,5^2} - \frac{ye^2}{0,1^2} - \frac{z^2}{0,9^2} \right) \wedge_0 (1 - x^2 - y^2) \geq 0$, $\begin{cases} xe = roe \cos mue - 1 \\ ye = roe \sin mue \end{cases}$, $mue = \frac{8}{noe\pi} \sum_k (-1)^{k+1} \frac{\sin ffe}{(2k-1)^2}$, $ffe = \frac{\theta e \cdot noe}{2}$.

Меняя значения буквенных параметров, можно оперативно менять толщину стен, расположение перегородок, размеры и форму окон и дверей, вид крыши, орнамент и др. Здесь для удобства чтения приведены лишь некоторые из них с соответствующей иллюстрацией. Кроме того, авторы стре-



Рис. 9. Виды лепнины в зависимости от значений n_{o1} , n_{o2} , n

мились показать возможности метода R-функций, поэтому фасад несколько перегружен декоративными элементами. Компьютерная реализация выполнена с помощью [6].

Выводы

В данной работе теория R-функций впервые применяется к математическому и компьютерному моделированию строительных конструкций. Аналитическая идентификация проектируемых объектов дает возможность использовать буквенные геометрические параметры, что, в свою очередь, позволяет оперативно изменять конструктивные элементы проектируемого объекта. При реализации построенных моделей на 3D-принтере заполнение строительным материалом происходит при $w \geq 0$ ($f_{jin} \geq 0$). Заметим, что может возникнуть техническая проблема из-за неоднозначности рассматриваемых объектов. Решить ее весьма просто: оконные и дверные проемы можно выполнять из другого материала, вставив в программу соответствующие дополнения, что легко осуществить с помощью R-функций; либо проводить построение в три этапа: при $z \leq h_1$, $h_1 \leq z \leq H$, $z > H$.

Литература

1. http://www.bbc.co.uk/ukrainian/ukraine_in_russian/2013/04/130416_ru_s_3d_building_amsterdam.shtml
2. Рвачев, В. Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения / В.Л. Рвачев. – Киев: Наук.думка, 1982. – 552 с.
3. Rvachev, V. L. R-functions in boundary value problems in mechanics / V. L. Rvachev, T. I. Sheiko // Appl. Mech. Reviews. – 1995. – Vol. 48, №. 4. – P. 151–188.
4. Максименко–Шейко, К. В. R-функции в математическом моделировании геометрических объектов и физических полей / К. В. Максименко-Шейко. – Харьков: ИПМаш НАН Украины, 2009. – 306 с.
5. R-функции в компьютерном моделировании дизайна автомобиля / Д. А. Лисин, К. В. Максименко-Шейко, А. В. Толок, Т. И. Шейко // Прикл. информатика. – 2011. – № 6 (36). – С. 78–85.
6. Лисін, Д. О. Комп'ютерна програма «Система візуалізації та побудови сітки на поверхні геометричних об'єктів, які описані за допомогою математичних засобів теорії R-функцій «RFPreview» // Свідectво про реєстрацію авторського права на твір. – 2012. – № 45951.

Поступила в редакцию 28.08.14

Н. А. Дёмина, канд. техн. наук

Таврический государственный
агротехнологический университет,
г. Мелитополь,
e-mail:deminanatasha@yandex.ru

УДК 539.3

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ШТАМПОВОЙ ОСНАСТКИ

Ключові слова: математична модель, система призматичних тіл, контактна взаємодія, метод варіаційних нерівностей.

Описана математична постановка задачі про контактну взаємодію системи призматичних тіл. За допомогою теорії варіаційних нерівностей задача зводиться до проблеми мінімізації випуклого функціонала на випуклій множині функцій.

Анализ контактного взаимодействия является актуальной задачей математики и механики. Для этого привлекаются различные методы: граничных интегральных уравнений, штрафных функций, метод конечных элементов и т. п. [1–7]. Они имеют определенные преимущества и недостатки, проявляющиеся для различного типа задач.

В частности, возникает проблема разработки эффективных постановок для задач о множественном контакте системы нескольких призматических тел. Например, такие задачи возникают при анализе напряженно-деформированного состояния (НДС) элементов штамповой оснастки [8]. При этом для моделирования контактного взаимодействия применяются различные упрощенные постановки, предусматривающие, в частности, раздельное моделирование НДС контактирующих тел. Это может приводить к значительным погрешностям в результатах анализа. В связи с этим возникает актуальная задача разработки математических моделей контактного взаимодействия системы призматических тел.