

УДК 534.1

ХАОТИЧНА ДИНАМІКА КОНСОЛЬНИХ БАЛОК ІЗ ДИХАЮЧИМИ ТРІЩИНАМИ

^{1,2} С. Є. Малишев, ORCID: 0009-0000-7739-9230

² К. В. Аврамов, член-кор. НАН України
kvavramov@gmail.com, ORCID: 0000-0002-8740-693X

¹ Національний технічний університет
«Харківський політехнічний інститут»,
61002, Україна, м. Харків, вул. Кирпичова, 2

² Інститут енергетичних машин і систем
ім. А. М. Підгорного НАН України,
61046, Україна, м. Харків, вул. Комунальників, 2/10

Отримано нелінійну динамічну систему зі скінченним числом ступенів свободи, яка описує вимушені коливання балки з двома дихаючими тріщинами. Тріщини розташовані на протилежних сторонах балки. Для виведення нелінійної динамічної системи застосовано метод Бубнова-Гальоркіна. Нескінченні послідовності біфуркацій подвоєння періоду викликають хаотичні коливання і спостерігаються при субгармонічному резонансі другого порядку. Для аналізу властивостей хаотичних коливань розраховано перерізи Пуанкаре і спектральні щільності. Крім того, показники Ляпунова розраховуються для підтвердження хаотичної поведінки. Як впливає з чисельного аналізу, хаотичні коливання виникають внаслідок нелінійної взаємодії між тріщинами.

Ключові слова: балка з тріщинами, вимушені коливання, біфуркація подвоєння періоду, хаотичні коливання, показник Ляпунова.

Вступ

Коливання валів і балок із тріщинами є серйозною проблемою для енергетики. Так, тріщини з'являються на лопатках компресора і валах турбін, унаслідок чого змінюються динамічні характеристики конструкції. Коливання конструкцій з тріщинами переважно нелінійні [1]. Нелінійні коливання балок із тріщинами проаналізували Крістідес і Барр [2]. Вони вивели диференціальне рівняння коливань балки в частинних похідних, використовуючи розширений варіаційний принцип Ху-Вашидзу. У свою чергу, Шен, П'єр [3] пропонують функції тріщини й зміщення для опису коливань балки з тріщиною. Систему з одним ступенем свободи, що описує коливання балки з тріщиною, отримано з використанням теорії балки Крістідеса і Барра [4, 5]. Детальне виведення диференціального рівняння у частинних похідних, яке описує коливання балки з відкритою тріщиною, надано в роботі [6]. Нелінійні форми балки з тріщинами розглянуто Чаті, Рендом і Мукерджи [7], а Карнейро та Рібейро [8] – геометрично-нелінійні коливання балки з дихаючою тріщиною. Тріщина описується дельта-функцією у виразі для жорсткості на згині в роботі [9]. Коливання балки з довільною кількістю тріщин вивчають Кадемі, Карлі і Марлетта [10], а коливання балки з геометричною нелінійністю та відкритою тріщиною – Бікрі, Бенамаром і Беннуна [11]. У [12] виведено нелінійну динамічну систему для опису коливань ротора з тріщиною. Балку з кількома дихаючими тріщинами досліджують Сінха, Фрісвелл, Едвардс [13]. Власні частоти та власні форми балки з кількома відкритими тріщинами за допомогою моделі балки Ейлера-Бернуллі аналізують Стахович і Кравчук [14]. Тріщина враховується додатковими граничними умовами. Вимушені коливання балок із поперечною тріщиною досліджено Плахтієнко, Ясінським [15]. У роботі [16] для аналізу вимушених коливань балки з дихаючою тріщиною запропоновано асимптотичну процедуру на основі методу багатьох масштабів, а в роботі [17] чисельно проаналізовано біфуркації періодичних коливань балки з двома тріщинами, розташованими з одного боку балки. Метод скінчених елементів застосовано для розрахунку нелінійної динаміки балок із дихаючою тріщиною в роботах [18–21]. Комбінаційний резонанс нелінійних коливань балки розглядається в [22]. Застосування функції Мельникова для аналізу субгармонічних коливань балки вивчено в [23]. Згинально-згинально-крутильні геометрично нелінійні коливання балок досліджено в [24].

У цій статті виведено модель нелінійних коливань балки з двома дихаючими тріщинами, розташованими на протилежних сторонах балки. Для опису дихання тріщин використовуються два контактні параметри. Виведено нелінійну динамічну систему зі скінченим числом ступенів свободи для опису коливань балки. Нелінійні коливання в області основного й субгармонічного резонансу другого порядку аналізуються за допомогою продовження по параметру. Розглянуто властивості хаотич-

Статтю ліцензовано на умовах Ліцензії Creative Commons «Attribution» («Атрибуція») 4.0 Міжнародна.
© С. Є. Малишев, К. В. Аврамов, 2025

них коливань. Як впливає з чисельного аналізу, хаотичні коливання виникають внаслідок нелінійної взаємодії між тріщинами.

Постановка задачі й основні рівняння

Розглянуто нелінійні згинальні коливання консольної балки з двома дихаючими тріщинами. Балка має прямокутний переріз, а на її протилежних сторонах розташовані дві дихаючі тріщини (рис. 1).

Кожну з тріщин можна відкрити або закрити. Якщо тріщину розкрити, жорсткість змінюється. Для опису нелінійних коливань балки використовується математична модель, що враховує локальну зміну жорсткості поблизу тріщин. Тріщина описується дельта-функціями у виразі для жорсткості на згин, а коливання балки з дихаючими тріщинами – рівнянням у частинних похідних [17]

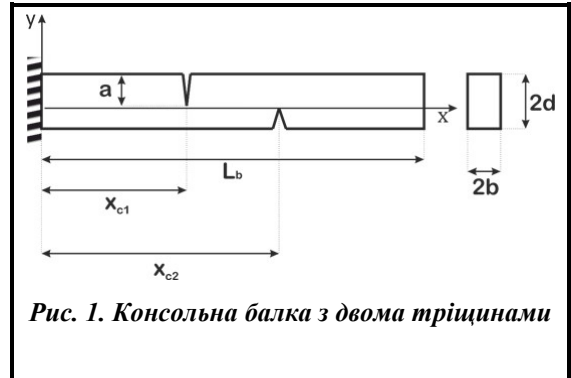


Рис. 1. Консольна балка з двома тріщинами

$$E_0 I_0 \left\{ 1 - \sum k_i \gamma_i \delta(x - x_{ci}) \right\}_{xx} + m \ddot{w} = p(x, t), \tag{1}$$

де $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = w''_{xx}$; w – поперечне зміщення балки; m – маса одиниці довжини; $E_0 I_0$ – жорсткість балки на згин без тріщин; $p(x, t)$ – зовнішня поперечна сила на одиницю довжини; $\delta(x - x_{ci})$ – дельта-функція; x_{ci} – поздовжня координата тріщини; γ_i – безрозмірний параметр інтенсивності пошкодження [25]; k_i – параметр контакту. Якщо тріщина розкрита, то $k_i=1$, а якщо закрита, $k_i=0$.

Згідно з [17] дихання тріщини описується знаком $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$. Умова відкриття/закриття тріщини, розташованої в точці ($x=x_{ci}$), набуває вигляду

$$\begin{cases} w''|_{x=x_{c,1}} < 0; k_1 = 1; \\ w''|_{x=x_{c,1}} > 0; k_2 = 0. \end{cases}$$

Умова відкриття/закриття правої тріщини

$$\begin{cases} w''|_{x=x_{c,2}} > 0; k_1 = 1; \\ w''|_{x=x_{c,2}} < 0; k_2 = 0. \end{cases}$$

Спостерігаються наступні чотири фази руху балки:

- ліва тріщина закрита, а права розкрита ($k_1=0; k_2=1$);
- ліва і права тріщини закриті ($k_1=k_2=0$);
- ліва тріщина розкрита, а права закрита ($k_1=1; k_2=0$);
- ліва і права тріщини розкриті ($k_1=k_2=1$).

Метод Бубнова–Гальоркіна застосовано до рівняння (1) для виведення нелінійної динамічної системи зі скінченним числом ступенів свободи. У даному випадку поперечні переміщення балки набувають вигляду

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^{N_c} q_i(t) \Psi_i(x),$$

де $\Psi_i(x) = (1-k_1)k_2W_{0,1}^{(i)}(x) + (1-k_1)(1-k_2)W_{0,0}^{(i)}(x) + k_1(1-k_2)W_{1,0}^{(i)}(x) + k_1k_2W_{1,1}^{(i)}(x)$; $W_{0,1}^{(i)}(x)$; $W_{0,0}^{(i)}(x)$; $W_{1,0}^{(i)}(x)$; $W_{1,1}^{(i)}(x)$ – власні форми чотирьох фаз руху балки, розглянуті вище. Власні форми $W_{k_1k_2}^{(i)}$ позначені параметрами контакту k_1 і k_2 . Наприклад, власна форма $W_{0,1}^{(i)}$ описує коливання балки, коли ліва тріщина закрита і права розкрита.

У результаті використання методу Бубнова–Гальборкіна отримано нелінійну динамічну систему зі скінченним числом ступенів свободи

$$\sum_{i=1}^{N_c} [M_{ji}(q)\ddot{q}_i + R_{ji}(q)q_i] = \tilde{p}_j(t); \quad j=1, \dots, N_c, \quad (2)$$

де $M_{ji}(q) = m \int_0^{L_b} \Psi_i(x)\Psi_j(x)dx$; $\tilde{p}_j(t) = \int_0^{L_b} p(x,t)\Psi_j(x)dx$; $R_{ji}(q) = E_0I_0 \int_0^{L_b} \left\{ \left[1 - \sum_{i=1}^2 k_i \gamma_i \delta(x-x_{ci}) \right] \Psi_i''(x) \right\} \Psi_j(x)dx$;
 $q=(q_1, \dots, q_{N_c})$ – вектор узагальнених координат.

Елементи матриці $R_{ji}(q)$ розраховуються так

$$R_{ji}(q) = \tilde{\omega}_i^2 m \int_0^{L_b} \Psi_i(x)\Psi_j(x)dx,$$

де $\tilde{\omega}_i$ – власні частоти на відповідній фазі рухів конструкції, яка визначається параметром контакту. Елементи матриць $R_{ji}(q)$ і $M_{ji}(q)$ містять інтеграли $\int_0^{L_b} \Psi_i(x)\Psi_j(x)dx$, які залежать від фаз руху конструкції як

$$\int_0^{L_b} \Psi_i(x)\Psi_j(x)dx = \begin{cases} \int_0^{L_b} W_{1,1}^{(i)}(x)W_{1,1}^{(j)}(x)dx; & G(x_{c1}, q) < 0; G(x_{c2}, q) > 0; \\ \int_0^{L_b} W_{1,0}^{(i)}(x)W_{1,0}^{(j)}(x)dx; & G(x_{c1}, q) < 0; G(x_{c2}, q) < 0; \\ \int_0^{L_b} W_{0,1}^{(i)}(x)W_{0,1}^{(j)}(x)dx; & G(x_{c1}, q) > 0; G(x_{c2}, q) > 0; \\ \int_0^{L_b} W_{0,0}^{(i)}(x)W_{0,0}^{(j)}(x)dx; & G(x_{c1}, q) > 0; G(x_{c2}, q) < 0; \end{cases} \quad (3)$$

$$i=1, \dots, N_c; \quad j=1, \dots, N_c,$$

де $G(x, q) = \sum_{i=1}^{N_c} \frac{d^2 W_{0,0}^{(i)}(x)}{dx^2} q_i(t)$.

Власні форми балки з двома закритими тріщинами беруть участь у співвідношеннях (3). У цьому випадку вони входять до рівняння (3) і задовольняють наступним умовам ортогональності:

$$\int_0^{L_b} W_{k_1k_2}^{(i)} W_{k_1k_2}^{(j)} d\xi = \pi_i^{(k_1k_2)} \delta_{ij}; \quad k_1=0, 1; k_2=0, 1; i=1, \dots, N_c; \quad j=1, \dots, N_c, \quad (4)$$

де δ_{ij} є символом Кронекера. Зауважимо, що умова ортогональності (4) задовольняє всі чотири розглянуті вище фази рухів конструкції.

Враховуючи внутрішнє тертя матеріалу балки, нелінійна система (2) набуває такого матричного вигляду:

$$\begin{cases} M^{(1,1)}\ddot{q} + D\dot{q} + R^{(1,1)}q = F^{(1,1)}(t); G(x_{c1}, q) < 0; G(x_{c2}, q) > 0; \\ M^{(1,0)}\ddot{q} + D\dot{q} + R^{(1,0)}q = F^{(1,0)}(t); G(x_{c1}, q) < 0; G(x_{c2}, q) < 0; \\ M^{(0,1)}\ddot{q} + D\dot{q} + R^{(0,1)}q = F^{(0,1)}(t); G(x_{c1}, q) > 0; G(x_{c2}, q) > 0; \\ M^{(0,0)}\ddot{q} + D\dot{q} + R^{(0,0)}q = F^{(0,0)}(t); G(x_{c1}, q) > 0; G(x_{c2}, q) < 0, \end{cases} \quad (5)$$

де $F_j^{(1,1)}(t) = \frac{1}{m\pi_j^{(1,1)}} \tilde{p}_j(t)$; $F_j^{(1,0)}(t) = \frac{1}{m\pi_j^{(1,0)}} \tilde{p}_j(t)$; $F_j^{(0,1)}(t) = \frac{1}{m\pi_j^{(0,1)}} \tilde{p}_j(t)$; $F_j^{(0,0)}(t) = \frac{1}{m\pi_j^{(0,0)}} \tilde{p}_j(t)$.

Таким чином, рухи конструкції задовольняють звичайні диференціальні рівняння (5). Динамічну систему (5) перепишемо відносно таких безрозмірних змінних:

$$y = \frac{q}{2d}; \quad \tau = \omega_{0,0}^{(1)} t,$$

де $\omega_{0,0}^{(1)}$ – перша власна частота балки без тріщин; $2d$ – висота поперечного перерізу балки (рис. 1). Динамічна система (5) відносно безрозмірних змінних і параметрів набуває вигляду:

$$\begin{cases} M^{(1,1)}y'' + \bar{D}y' + \bar{R}^{(1,1)}y = \bar{F}^{(1,1)}(\tau); G(x_{c1}, y) < 0; G(x_{c2}, y) > 0; \\ M^{(1,0)}y'' + \bar{D}y' + \bar{R}^{(1,0)}y = \bar{F}^{(1,0)}(\tau); G(x_{c1}, y) < 0; G(x_{c2}, y) < 0; \\ M^{(0,1)}y'' + \bar{D}y' + \bar{R}^{(0,1)}y = \bar{F}^{(0,1)}(\tau); G(x_{c1}, y) > 0; G(x_{c2}, y) > 0; \\ M^{(0,0)}y'' + \bar{D}y' + \bar{R}^{(0,0)}y = \bar{F}^{(0,0)}(\tau); G(x_{c1}, y) > 0; G(x_{c2}, y) < 0, \end{cases} \quad (6)$$

де $y' = \frac{dy}{d\tau}$; $\bar{F}^{(i_1, i_2)}(t) = \frac{F^{(i_1, i_2)}(t)}{2d\omega_{0,0}^{(1)2}}$; $\bar{D} = \frac{D}{\omega_{0,0}^{(1)}}$; $\bar{R}^{(i_1, i_2)}(t) = \frac{R^{(i_1, i_2)}}{\omega_{0,0}^{(1)2}}$; $i_1=1, 2$; $i_2=1, 2$.

Частотний відклик нелінійної системи (6) аналізується в подальшому. Чисельно оцінено стійкість і біфуркації періодичних коливань. Метод продовження по параметру використовується для розрахунку частотних відкликів. Теоретичне обґрунтування цього методу викладено в роботах [26, 27].

Систему рівнянь у варіаціях, яка виводиться із системи (6), отримано для аналізу стійкості й біфуркацій періодичних коливань [28]. Показники Ляпунова розраховуються з чисельних рішень варіаційних рівнянь. Стійкість і біфуркації періодичних рухів визначаються із розрахунків мультиплікаторів [28]. Результати чисельного моделювання стійкості й біфуркацій періодичних рухів розглядаються в наступному розділі.

Чисельний аналіз нелінійних коливань балки

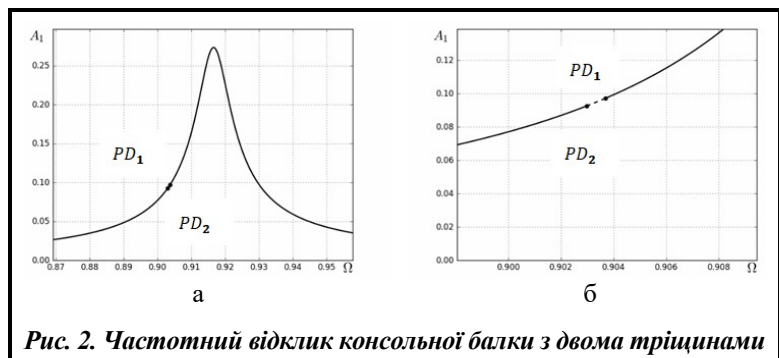
Чисельно проаналізовано нелінійні коливання консольної балки з двома дихаючими тріщинами (рис. 1). Обрано наступні числові значення геометричних і фізичних параметрів балки: $E=2,1 \times 10^{11}$ Па; $\rho=7800$ кг/м³; $L_b=0,117$ м; $x_c=0,015$ м; $b=0,005$ м; $d=0,005$ м; $a=0,8 \cdot d$.

Вимушені коливання збуджуються періодичними рухами затиску

$$p(x, t) = H\Omega^2 \sin \Omega t,$$

де амплітуда періодичних рухів консольного затиску $H=0,003 \cdot d$. Дві тріщини мають поздовжні координати $x_{c1}=0,015$ м; $x_{c2}=0,5 \cdot L_b$.

Проведено чисельний аналіз нелінійної динамічної системи (5). Чисельно проаналізовано параметри періодичних коливань як функції Ω . Для отримання цих функцій використовується метод продовження по параметру [17, 26, 27]. Розраховано мультиплікатори періодичних коливань [28] для аналізу їх стійкості й біфуркацій.



Частотний відклик основного резонансу показано на рис. 2, а. Залежність амплітуди A_1 коливань $y_1(\tau)$ від частоти Ω зображено на рис. 2, а. Дві біфуркації подвоєння періоду PD_1 і PD_2 показані на рис. 2, а. У цих точках біфуркацій стійкі періодичні коливання стають нестійкими. На рис. 2, б надана частотна характеристика в малому масштабі. Стійкі й нестійкі коливання показані суцільною й пунктирною кривими відповідно.

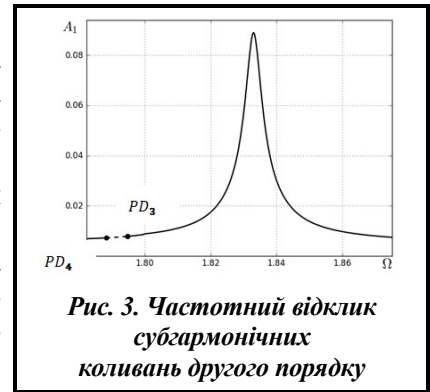


Рис. 3. Частотний відклик субгармонічних коливань другого порядку

Ще одна біфуркація подвоєння періоду спостерігається на частоті $\Omega=1,75$. Тоді коливання з періодом $T_1=2\pi/\Omega$ втрачають стійкість і виникають коливання з періодом $T=2T_1$. Ці коливання показані на рис. 3.

Субгармонічні коливання другого порядку (рис. 3) зазнають біфуркацій подвоєння періоду, які позначаються PD_3 і PD_4 .

Проаналізовано усталені рухи між точками біфуркацій подвоєння періоду (рис. 2 і рис. 3). Проведено пряме чисельне інтегрування динамічної системи (5). Коливання системи розглядаються як перехідні процеси на інтервалі часу $\tau \in [0; 1000 \cdot T_1]$. Перерізи Пуанкаре [29] розраховані для аналізу сталих коливань. Після цього аналізується перетворення підпростору динамічної системи (6) в себе

$y_1(\tau), \dots, y_{N_c}(\tau), \dot{y}_1(\tau), \dots, \dot{y}_{N_c}(\tau); \frac{\tau}{T_1} \in Z$, де Z – множина цілих чисел. Цей підпростір позначається так:

$$\Sigma = \left\{ (y_1, \dots, y_{N_c}, \dot{y}_1, \dots, \dot{y}_{N_c}) \mid \frac{\tau}{T_1} \in Z \right\}.$$

Переріз Пуанкаре визначає перетворення таким чином $\Sigma \rightarrow \Sigma$.

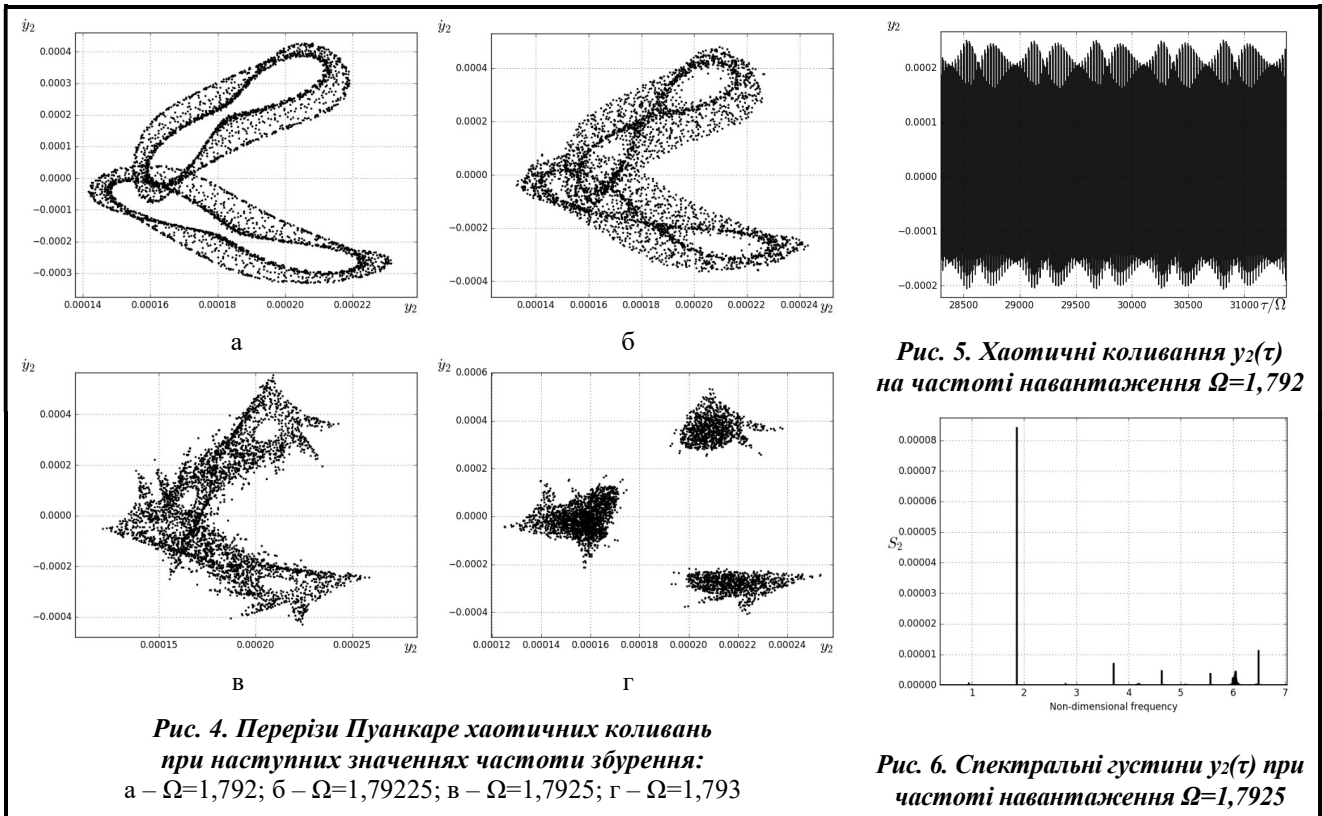


Рис. 4. Перерізи Пуанкаре хаотичних коливань при наступних значеннях частоти збурення: а – $\Omega=1,792$; б – $\Omega=1,79225$; в – $\Omega=1,7925$; г – $\Omega=1,793$

Рис. 5. Хаотичні коливання $y_2(\tau)$ на частоті навантаження $\Omega=1,792$

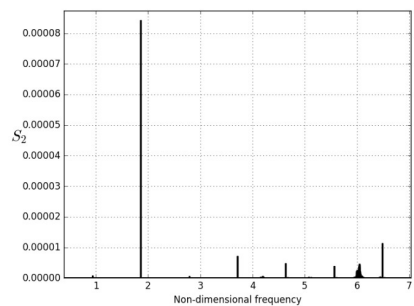


Рис. 6. Спектральні густини $y_2(\tau)$ при частоті навантаження $\Omega=1,7925$

Проаналізовані усталені коливання між біфуркаціями подвоєння періоду PD_1 і PD_2 . Ці біфуркації призводять до нескінченної послідовності біфуркацій подвоєння періоду, унаслідок чого генеруються хаотичні коливання. На рис. 4 показано перерізи Пуанкаре хаотичних коливань на частотах: $\Omega=1,792$; $\Omega=1,79225$; $\Omega=1,7925$; $\Omega=1,793$. На рис. 5 зображені хаотичні коливання $y_2(\tau)$ при $\Omega=1,792$.

Чисельно проаналізовано спектральні щільності хаотичних коливань. На рис. 6 показано спектральну густину при $\Omega=1,7925$. Спектральні густини складаються з набору дискретних компонент, які при $\omega \approx 6$ розмиваються, що підтверджує хаотичність режимів рухів.

Для аналізу хаотичних рухів розраховано спектр показників Ляпунова λ_i ; $i=1, 2, \dots$. Щоб обчислити ці значення, варіаційні рівняння розв'язуються чисельно й виконується ортогоналізація Грама-Шмідта. Ця процедура розрахунку спектра Ляпунова добре відома [28]. На рис. 7 показано поведінку першого показника Ляпунова λ_1 в часі при $\Omega=1,792$. Як випливає з цього рисунка, перший показник Ляпунова має позитивне значення. Отже, рух системи при $\Omega=1,792$ є хаотичним.

Спектр Ляпунова розраховано для різних значень частот навантаження Ω . Перші чотири показники Ляпунова наведені в табл. 1. Таким чином, вони додатні, що підтверджує хаотичність коливань.

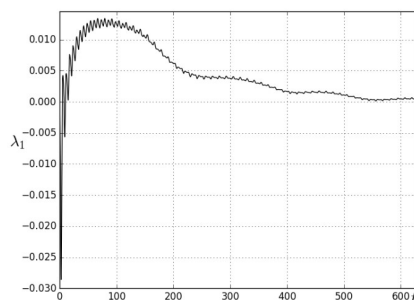


Рис. 7. Поведінка першого показника Ляпунова в часі при $\Omega=1,792$

Таблиця 1. Спектр Ляпунова

Ω	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
1,79200	$4,229 \times 10^{-4}$	$-3,107 \times 10^{-3}$	$-6,033 \times 10^{-3}$	$-8,688 \times 10^{-3}$
1,79225	$4,201 \times 10^{-4}$	$-3,324 \times 10^{-3}$	$-5,999 \times 10^{-3}$	$-8,804 \times 10^{-3}$
1,79250	$4,339 \times 10^{-4}$	$-4,142 \times 10^{-3}$	$-6,013 \times 10^{-3}$	$-9,720 \times 10^{-3}$
1,79300	$4,126 \times 10^{-4}$	$-3,198 \times 10^{-3}$	$-5,989 \times 10^{-3}$	$-8,775 \times 10^{-3}$

Висновки

Вимушені коливання балки з двома тріщинами, розташованими на протилежних сторонах балки, описуються нелінійною динамічною системою зі скінченними ступенями свободи. Ця нелінійна динамічна система отримана шляхом застосування методу Бубнова–Гальоркіна до нелінійного диференціального рівняння руху системи в частинних похідних.

Рухи балки складаються з наступних чотирьох фаз: ліва тріщина закрита, а права розкрита; ліва і права тріщини закриті; ліва тріщина розкрита, а права закрита; ліва і права тріщини розкриваються. Протягом одного періоду коливань послідовно відбуваються чотири фази рухів системи. Нелінійні властивості системи реалізуються переходами між чотирма фазами.

У цій балці з тріщинами зароджуються нескінченні послідовності біфуркацій подвоєння періоду і хаотичні рухи. Послідовність біфуркацій подвоєння періоду й хаотичні рухи спостерігаються при субгармонічному резонансі.

Фінансування

Вищенаведені результати отримані за проектом 2023.04/0001, що фінансується Національним фондом досліджень України.

Література

1. Bovsunovsky A., Surace C. Non-linearities in the vibrations of elastic structures with a closing crack: A state of the art review. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2015. Vol. 62–63. P. 129–148. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2015.01.021>.
2. Christides S., Barr A. D. S. One-dimensional theory of cracked Bernoulli-Euler beams. *International Journal of Mechanical Sciences*. 1984. Vol. 26. Iss. 11–12. P. 639–648. [https://doi.org/10.1016/0020-7403\(84\)90017-1](https://doi.org/10.1016/0020-7403(84)90017-1).
3. Shen M.-H. H., Pierre C. Free vibrations of beams with a single – edge crack. *Journal of Sound and Vibration*. 1994. Vol. 170. Iss. 2. P. 237–259. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1994.1058>.
4. Shen M.-H. H., Chu Y. C. Vibrations of beams with a fatigue crack. *Computers & Structures*. 1992. Vol. 45. Iss. 1. P. 79–93. [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(92\)90347-3](https://doi.org/10.1016/0045-7949(92)90347-3).

5. Chu Y. C., Shen M.-H. H. Analysis of forced bilinear oscillators and the application to cracked beam dynamics. *AIJA Journal*. 1992. Vol. 30. No. 10. P. 2512–2519. <https://doi.org/10.2514/3.11254>.
6. Chondros T. G., Dimarogonas A. D., Yao J. A continuous cracked beam vibration theory. *Journal of Sound and Vibration*. 1998. Vol. 215. Iss. 1. P. 17–34. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1998.1640>.
7. Chati M., Rand R., Mukherjee S. Modal analysis of a cracked beam. *Journal of Sound and Vibration*. 1997. Vol. 207. Iss. 2. P. 249–270. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1997.1099>.
8. Carneiro G. N., Ribeiro P. Vibrations of beams with a breathing crack and large amplitude displacements. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*. 2016. Vol. 230. P. 34–54. <https://doi.org/10.1177/0954406215589333>.
9. Tsyfansky S. L., Beresnevich V. I. Detection of fatigue cracks in flexible geometrically non-linear bars by vibration monitoring. *Journal of Sound and Vibration*. 1998. Vol. 213. Iss. 1. P. 159–168. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1998.1502>.
10. Caddemi S., Calio I., Marletta M. The non-linear dynamic response of the Euler–Bernoulli beam with an arbitrary number of switching cracks. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2010. Vol. 45. Iss. 7. P. 714–726. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2010.05.001>.
11. El Bikri K., Benamar R., Bennouna M. M. Geometrically non-linear free vibrations of clamped–clamped beams with an edge crack. *Computers & Structures*. 2006. Vol. 84. Iss. 7. P. 485–502. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2005.09.030>.
12. Ballo I. Non-linear effects of vibration of a continuous transverse cracked slender shaft. *Journal of Sound and Vibration*. 1998. Vol. 217. Iss. 2. P. 321–333. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1998.1809>.
13. Sinha J. K., Friswell M. I., Edwards S. Simplified models for the location of cracks in beam structures using measured vibration data. *Journal of Sound and Vibration*. 2002. Vol. 251. Iss. 1. P. 13–38. <https://doi.org/10.1006/jsvi.2001.3978>.
14. Stachowicz W. M., Krawczuk M. Analysis of the effect of cracks on the natural frequencies of a cantilever beam. *Journal of Sound and Vibration*. 1991. Vol. 150. Iss. 2. P. 191–201. [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(91\)90615-Q](https://doi.org/10.1016/0022-460X(91)90615-Q).
15. Plakhtienko N. P., Yasinskii S. A. Resonance of second order in vibrations of a beam containing a transverse crack. *Strength of Materials*. 1995. Vol. 27. Iss. 3. P. 146–152. <https://doi.org/10.1007/BF02209480>.
16. Avramov K., Raimberdiyev T. Modal asymptotic analysis of sub-harmonic and quasi-periodic flexural vibrations of beams with cracks. *Nonlinear Dynamics*. 2017. Vol. 88. Iss. 2. P. 1213–1228. <https://doi.org/10.1007/s11071-016-3305-0>.
17. Avramov K., Raimberdiyev T. Bifurcations behavior of bending vibrations of beams with two breathing cracks. *Engineering Fracture Mechanics*. 2017. Vol. 178. P. 22–38. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2017.04.006>.
18. Andreus U., Casini P., Vestroni F. Non-linear dynamics of a cracked cantilever beam under harmonic excitation. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2007. Vol. 42. Iss. 3. P. 566–575. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2006.08.007>.
19. Bovsunovskii A. P., Bovsunovskii O. A. Application of nonlinear resonances for the diagnostics of closing cracks in rod like elements. *Strength of Materials*. 2010. Vol. 42. Iss. 3. P. 331–342. <https://doi.org/10.1007/s11223-010-9222-4>.
20. Bovsunovsky A. P., Surace C. Considerations regarding superharmonic vibrations of a cracked beam and the variation in damping caused by the presence of the crack. *Journal of Sound and Vibration*. 2005. Vol. 288. Iss. 4–5. P. 865–886. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2005.01.038>.
21. Pugno N., Surace C. Evaluation of the non-linear dynamic response to harmonic excitation of a beam with several breathing cracks. *Journal of Sound and Vibration*. 2000. Vol. 235. Iss. 5. P. 749–762. <https://doi.org/10.1006/jsvi.2000.2980>.
22. Avramov K. V. Nonlinear beam oscillations excited by lateral force at combination resonance. *Journal of Sound and Vibration*. 2002. Vol. 257. Iss. 2. P. 337–359. <https://doi.org/10.1006/jsvi.2002.5043>.
23. Avramov K. V. Bifurcations of parametric oscillations of beams with three equilibrium. *Acta Mechanica*. 2003. Vol. 164. P. 115–138. <https://doi.org/10.1007/s00707-003-0022-9>.
24. Avramov K. V., Pierre C., Shiraeva N. Flexural- flexural- torsional nonlinear vibrations of pre-twisted rotating beams with asymmetric cross section. *Journal of Vibration and Control*. 2007. Vol. 13. Iss. 4. P. 329–364. <https://doi.org/10.1177/1077546307073675>.
25. Caddemi S., Calio I. Exact closed-form solution for the vibration modes of the Euler-Bernoulli beam with multiple open cracks. *Journal of Sound and Vibration*. 2009. Vol. 327. Iss. 3–5. P. 473–489. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2009.07.008>.
26. Seydel R. Tutorial on continuation. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 1991. Vol. 1. No. 1. P. 3–11. <https://doi.org/10.1142/S0218127491000026>.
27. Seydel R. Nonlinear computation. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 1997. Vol. 7. No. 9. P. 2105–2126. <https://doi.org/10.1142/S0218127497001564>.

28. Parker T. S., Chua L. O. Practical numerical algorithms for chaotic systems. New York: Springer-Verlag, 1989. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-3486-9>.
29. Guckenheimer J., Holmes P. Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields. New York: Springer, 1983. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1140-2>.

Надійшла до редакції 25.11.2024