

УДК 517.9:519.6

В'ЯЗКОПРУЖНИЙ СТАН АНІЗОТРОПНОЇ ПЛИТИ З ПООДИНОКИМ ЕЛІПТИЧНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ

¹ А. О. Кошкінandrii.koshkin@nure.ua,

ORCID: 0009-0005-0970-0403

^{1,2} О. О. Стрельнікова,

д-р техн. наук

elena15@gmx.com,

ORCID: 0000-0003-0707-7214

¹ Харківський національний університет радіоелектроніки, 61166, Україна, м. Харків, пр. Науки, 14

² Інститут енергетичних машин і систем ім. А. М. Підгорного НАН України, 61046, Україна, м. Харків, вул. Комунальників, 2/10

Розв'язано задачу лінійної в'язкопружності для нескінченної анізотропної плити з еліптичним пружним включенням, що перебуває в умовах ідеального механічного контакту з плитою-матрицею. Для отримання розв'язку застосовано метод малого параметра, де як параметр обрано зміну коефіцієнтів Пуассона у часі, що дозволило звести часову задачу до послідовності аналогічних крайових задач теорії пружності. Побудова розв'язку ґрунтується на використанні апарату комплексних потенціалів, методів конформних відображень і розкладів функцій у ряди Лорана. Для задоволення граничних умов на контурі контакту використано узагальнений метод найменших квадратів, що забезпечує високу точність визначення невідомих сталих у будь-який момент часу. У роботі наведено аналітичні вирази для згинальних моментів і перерізувальних сил у плиті, що явно містять часові оператори в'язкопружності. Для випадку, коли еліптичне включення вироджується у прямолінійну пружну лінію, виведено формули обчислення коефіцієнтів інтенсивності моментів у його кінцях. Запропонований підхід дозволяє коректно описати еволюцію сингулярної поведінки моментів й оцінити вплив властивостей матеріалу на їхню зміну у часі. Проведено числові дослідження для плит із матеріалів із різними релаксаційними властивостями за різних значень відносної жорсткості включення. Встановлено, що найбільш інтенсивний перерозподіл моментів відбувається на початковому етапі в'язкопружного процесу, після чого напружений стан плити наближується до стаціонарного. Доведено, що концентрація моментів нелінійно залежить від жорсткості включення: вона мінімальна при середніх значеннях жорсткості і різко зростає у випадках отворів або абсолютно жорстких включень. Ізотропні плити розглянуто як окремий випадок анізотропних, що дозволяє поширити отримані результати на великий клас задач механіки композитів і прогнозування їхньої довготривалої міцності.

Ключові слова: в'язкопружність, згин, математичне моделювання, числові методи, включення, комплексні потенціали, метод малого параметра.

Вступ

Попри велику практичну важливість знань про зміну напруженого стану багатозв'язних в'язкопружних плит із плином часу після прикладання навантаження, досі такі дослідження в достатньому обсязі не проводилися [1]. У даній роботі задача в'язкопружності для плит завдяки методу малого параметра зведена до послідовності аналогічних задач теорії пружності, що розв'язуються з використанням комплексних потенціалів й узагальненого методу найменших квадратів. Розв'язано задачу для плити з еліптичним (у частковому випадку лінійним) пружним включенням, у частковому випадку – отворами або жорсткими включеннями. Представлено результати числових розрахунків, які дозволили виявити вплив часу на значення згинальних моментів, що виникають у плиті.

Постановка та метод розв'язання задачі

Розглянемо нескінченну анізотропну плиту з еліптичним отвором L_1 із центром у початку системи координат Oxy й напівосями a_1, b_1 , розташованими уздовж осей координат (рис. 1). У цей отвір без попереднього натягу вставлено пружне включення з іншого матеріалу, яке знаходиться в умовах ідеального механічного контакту з плитою-матрицею. Нехай на нескінченності до плити прикладено згинальні моменти постійної величини $M_x^\infty, M_y^\infty, H_{xy}^\infty$.

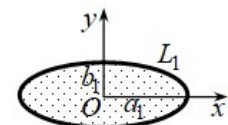


Рис. 1. Нескінченна плита з еліптичним включенням

Цю задачу у пружній постановці можна розв'язати за допомогою комплексних потенціалів теорії згину. У такому випадку задача зводиться до знаходження функцій комплексних змінних $W'_k(z_k)$ із відповідних граничних умов [2]. Вони є функціями узагальнених комплексних змінних

Статтю ліцензовано на умовах Ліцензії Creative Commons «Attribution» («Атрибуція») 4.0 Міжнародна.
© А. О. Кошкін, О. О. Стрельнікова, 2026

$$z_k = x + \mu_k y, \quad (1)$$

де μ_k – корні відповідного характеристичного рівняння [2], яке залежить від жорсткостей матеріалу плити D_{ij} .

Через функції $W'_k(z_k)$ обчислюються всі основні характеристики пружно-деформованого стану плити

$$(M_x, M_y, H_{xy}, N_x, N_y) = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 (p_k, q_k, r_k, \mu_k, s_k, -s_k) W''_k(z_k),$$

де

$$\begin{aligned} p_k &= D_{11} + 2D_{16}\mu_k + D_{12}\mu_k^2; & q_k &= D_{12} + 2D_{26}\mu_k + D_{22}\mu_k^2; \\ r_k &= D_{16} + 2D_{66}\mu_k + D_{26}\mu_k^2; & s_k &= -D_{16} - (D_{12} + 2D_{66})\mu_k - 3D_{26}\mu_k^2 - D_{22}\mu_k^3. \end{aligned} \quad (2)$$

При знаходженні значень досліджуваних величин у часі можна скористатися принципом Вольтера [3], тобто розв'язати задачу без урахування властивостей в'язкопружності, а потім у цьому розв'язку замінити пружні сталі часовими операторами й визначити їх дію в часі. Однак для багатозв'язних областей такі розв'язки задач теорії пружності отримувати нереально. Тому безпосереднє застосування принципу Вольтера до аналізу напружено-деформованого стану тіл є неможливим.

У зв'язку з цим виникає необхідність отримувати такі розв'язки, які явно містили б пружні сталі. Це можна зробити, використовуючи метод малого параметра, за який можна взяти зміну у часі коефіцієнтів Пуассона ν_{12} . Запишемо його у вигляді

$$\nu_{12} = \nu_{12}^0 + \lambda, \quad (3)$$

де ν_{12}^0 – миттєве пружне значення коефіцієнта ν_{12} ; λ – малий параметр.

Для ортотропних матеріалів коефіцієнти деформацій пов'язані з технічними сталими наступними співвідношеннями:

$$a_{11} = \frac{1}{E_1}; \quad a_{22} = \frac{1}{E_2}; \quad a_{12} = -\frac{\nu_{21}}{E_1} = -\frac{\nu_{12}}{E_2}; \quad a_{66} = \frac{1}{G_3},$$

де E_i, G_3 – відповідні модулі Юнга та модуль зсуву.

Враховуючи (3), для a_{12} отримаємо

$$a_{12} = a_{12}^0 - \lambda a_{11},$$

де $a_{12}^0 = -\nu_{12}^0 a_{11}$.

Розкладаючи всі величини за малим параметром λ і враховуючи, що для реальних матеріалів

$\left| \frac{\lambda}{\lambda_1} \right| < 1, \left| \frac{\lambda}{\lambda_2} \right| < 1$, отримаємо наступний вигляд величин (2):

$$p_k = \sum_{j=0} p_{jk} \lambda^j; \quad q_k = \sum_{j=0} q_{jk} \lambda^j; \quad r_k = 2D_0 b_{66} \mu_k,$$

а комплексні потенціали набувають вигляду

$$W'_k(z_k) = \sum_{j=0} \lambda^j W'_{jk}(z_k), \quad (4)$$

де $W'_k(z_k) = \Gamma_{jk} z_k + W'_{j0k}(z_k)$; Γ_{jk} визначаються із системи рівнянь

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left(1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \right) \Gamma_{0k} &= \left(-\frac{a_{11} M_x^\infty}{D_0} - \frac{a_{12} M_y^\infty}{D_0}, -\frac{a_{66} H_{xy}^\infty}{2D_0}, -\frac{a_{12}^0 M_x^\infty}{D_0} - \frac{a_{22} M_y^\infty}{D_0}, 0 \right); \\ 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left(1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \right) \Gamma_{1k} &= \left(\frac{a_{11} M_y^\infty}{D_0}, 0, \frac{a_{11}^0 M_x^\infty}{D_0}, 0 \right); \quad \Gamma_{ij}=0 \quad (j \geq 2); \end{aligned}$$

$D_0 = 2h^3/3$; h – напівтовщина плити; $W'_{j0k}(z_k)$ – функції, які голоморфні в областях S_k , обмежених контурами L_{k1} при афінних перетвореннях (1) області S .

Похідні комплексних потенціалів для включення аналогічно наведемо у наступному вигляді:

$$W_k^{(1)}(z_k^{(1)}) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j W_{jk}^{(1)}(z_k^{(1)}). \quad (5)$$

Тут $W_k^{(1)}(z_k^{(1)})$ – функції, які голоморфні в областях $S_k^{(1)}$.

Враховуючи це, розв’язання задачі в’язкопружності зводиться до знаходження похідних комплексних потенціалів наближень $W_k'(z_k)$ із відповідних граничних умов.

Функції $W_k'(z_k)$ визначені в областях S_k , що отримуються із заданої області S афінними перетвореннями (1). Використовуючи методи конформних відображень і розкладів функцій у ряди Лорана, для похідних комплексних потенціалів наближень отримаємо вирази

$$W_{jk}'(z_k) = \Gamma_{jk} z_k + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{jk1n}}{\zeta_{k1}^n}, \quad (6)$$

де a_{jk1n} – невідомі; ζ_{k1} – змінні, які визначаються із співвідношень

$$z_k = R_{k1} \left(\zeta_{k1} + \frac{m_{k1}}{\zeta_{k1}} \right); \quad R_{k1} = \frac{a_1 - i\mu_k b_1}{2}; \quad m_{k1} = \frac{a_1 + i\mu_k b_1}{2R_{k1}}. \quad (7)$$

Похідні комплексних потенціалів для включення $W_k^{(1)}(z_k^{(1)})$ розкладемо в ряди по поліномам Фабера і після перетворень отримаємо

$$W_{jk}^{(1)}(z_{jk}^{(1)}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{jkn}^{(1)} \left(\frac{z_k^{(1)}}{R_k^{(1)}} \right)^n, \quad (8)$$

де $R_k^{(1)}$ обчислюються відповідно до формул (7); $a_{jkn}^{(1)}$ – невідомі.

Комплексні потенціали для плити-матриці і включення повинні задовольняти граничні умови в точках контакту. Ці умови мають вигляд

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left(g_{k1i} W_k'(z_k) - g_{ki}^{(1)} W_k^{(1)}(z_k^{(1)}) \right) = 0, \quad (9)$$

де $g_{k11} = 1$; $g_{k1}^{(1)} = 1$; $g_{k12} = \mu_k$; $g_{k2}^{(1)} = \mu_k^{(1)}$; $g_{k13} = \frac{p_k}{\mu_k}$; $g_{k3}^{(1)} = \frac{p_k^{(1)}}{\mu_k^{(1)}}$; $g_{k14} = q_k$; $g_{k4}^{(1)} = q_k^{(1)}$.

Якщо підставимо вирази для функцій (4) і (5) в граничні умови (9) і прирівняємо коефіцієнти при відповідних степенях параметра λ , отримаємо наступну рекурентну послідовність граничних умов для знаходження цих наближень:

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left(g_{0k1i} W_k'(z_k) - g_{0ki}^{(1)} W_k^{(1)}(z_k^{(1)}) \right) = f_{j1i}(t), \quad (i = \overline{1, 4}), \quad (10)$$

$$g_{0k11} = 1; \quad g_{0k1}^{(1)} = 1; \quad g_{0k12} = \mu_k; \quad g_{0k2}^{(1)} = \mu_k^{(1)}; \quad g_{0k13} = \frac{p_{0k}}{\mu_k}; \quad g_{0k3}^{(1)} = \frac{p_{0k}^{(1)}}{\mu_k^{(1)}}; \quad g_{0k14} = q_{0k}; \quad g_{0k4}^{(1)} = q_{0k}^{(1)},$$

$$f_{j11} = -(1 - \delta_j^0) 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \sum_{i=0}^{j-1} \left[W_{ik}'(z_k) - W_{ik}^{(1)}(z_k^{(1)}) \right];$$

$$f_{j12} = -(1 - \delta_j^0) 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \sum_{i=0}^{j-1} \left[\mu_k W_{ik}'(z_k) - \mu_k^{(1)} W_{ik}^{(1)}(z_k^{(1)}) \right];$$

$$f_{j13} = -(1 - \delta_j^0) 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \sum_{i=0}^{j-1} \left[\frac{p_{j-i,k}}{\mu_k} W_{ik}'(z_k) - \frac{p_{j-i,k}^{(1)}}{\mu_k^{(1)}} W_{ik}^{(1)}(z_k^{(1)}) \right];$$

$$f_{j14} = -(1 - \delta_j^0) 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \sum_{i=0}^{j-1} \left[q_{j-i,k} W_{ik}'(z_k) - q_{j-i,k}^{(1)} W_{ik}^{(1)}(z_k^{(1)}) \right].$$

Для знаходження невідомих множників λ^j у формулах (4) будемо використовувати часові оператори Работнова

$$\lambda = D_1 \cdot \mathcal{E}_\alpha^* (-\beta_1^* - \delta_1^*) + D_2 \cdot \mathcal{E}_\alpha^* (-\beta_2^*),$$

де $D_1 = \frac{\delta_1^*}{4} \left[\frac{E_1^0}{E_2^0} \frac{\delta_2^*}{\beta_1^* - \beta_2^* + \delta_1^*} + 1 - 4\nu_{12}^0 \right]$; $D_2 = \frac{\delta_2^*}{4} \frac{E_1^0}{E_2^0} \frac{\beta_1^* - \beta_2^*}{\beta_1^* - \beta_2^* + \delta_1^*}$; E_i^0 – миттєві пружні значення модулів

Юнга E_i ; δ_i^* , β_i^* – реологічні сталі матеріалу плити, пов’язані зі зміною E_i в часі [4]. Якщо пінести λ до степеня, отримаємо

$$\lambda^j = \sum_{k=0}^j C_j^k D_1^{j-k} D_2^k \frac{\mathcal{E}_\alpha^{*k} (-\beta_2^*) - \mathcal{E}_\alpha^{*j-k} (-\beta_1^* - \delta_1^*)}{-\beta_2^* + \beta_1^* + \delta_1^*}. \quad (11)$$

Обчислюючи λ^j за формулою (11) і підставляючи їх у вирази (4), знайдемо функції $W'_k(z_k)$ та їхні похідні, а отже, згинальні моменти й перерізувальні сили в будь-який момент часу. Для визначення невідомих сталих a_{jkl_n} , $a_{jkl_n}^{(1)}$, функцій (6) і (8) використаємо узагальнений метод найменших квадратів і задовольнимо граничні умови (10) в диференціальній формі. Для цього на контурі контакту плити з включеннями виберемо набір точок $t_{1m}(x_{1m}, y_{1m})$ ($m = \overline{1, M}$) і задовольнимо в них умови, диференційовані за дугою контуру

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[g_{0k1i} \delta_k \phi'_{k1n}(t_{k1m}) a_{jkl_n} - g_{0ki}^{(1)} \delta_k^{(1)} \phi_{kn}^{(1)}(t_{km}^{(1)}) a_{jkn}^{(1)} \right] = \frac{df_{jli}(t_m)}{ds} - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 g_{0k1i} \delta_k \Gamma_{jk}, \quad (i = \overline{1, 4}; m = \overline{1, M}),$$

де $\delta_k = \frac{dz_k}{ds}$; $\delta_k^{(1)} = \frac{dz_k^{(1)}}{ds}$; $t_{k1m} = x_{1m} + \mu_k y_{1m}$; $t_{km}^{(1)} = x_{1m} + \mu_k^{(1)} y_{1m}$; $\phi'_{k1n} = -\frac{n}{\zeta_{k1}^{n-1} R_{k1} (\zeta_{k1}^2 - m_{k1})}$, $\phi_{kn}^{(1)} = -\frac{n(z_k^{(1)})^{n-1}}{R_{k1} (R_k^{(1)})^n}$.

Якщо включення стає пружною лінією, то можна обчислювати коефіцієнти інтенсивності моментів (КІМ) k_{1M}^\pm (для моментів $M_y^{(1)}$) і k_{2M}^\pm (для моментів $H_{xy}^{(1)}$) [5]. Для них маємо наступні формули

$$k_{1M}^\pm = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 q_k G_k; \quad k_{2M}^\pm = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 r_k G_k$$

в яких $G_k = \pm \frac{\sqrt{a_1}}{2R_1} \sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^n n a_{k1n}$; верхні знаки відповідають правому та лівому кінцям лінійного включення.

Числові дослідження

Проведено чисельні дослідження значень величин для плити з алюмінію (матеріал М1) [6] і епоксиду (матеріал М2) [7]. Коефіцієнти деформацій та реологічні сталі для цих матеріалів наведені у табл. 1. Сталі деформації для матеріалу включення обиралися пропорційно коефіцієнтам для плити: $a_{ij}^{(l)} = \lambda^{(l)} a_{ij}$, де $\lambda^{(l)}$ – параметр відносної жорсткості.

Таблиця 1. Постійні матеріалів

Матеріал	$a_{11} \times 10^{-4}$, МПа ⁻¹	$a_{22} \times 10^{-4}$, МПа ⁻¹	$a_{12} \times 10^{-4}$, МПа ⁻¹	$a_{66} \times 10^{-4}$, МПа ⁻¹	α^* , с ^{-0.5}	$\beta_1^* \times 10^3$, с ^{-0.5}	$\beta_2^* \times 10^3$, с ^{-0.5}	$\delta_1^* \times 10^3$, с ^{-0.5}	$\delta_2^* \times 10^3$, с ^{-0.5}
М1	0,1408	0,1458	-0,0352	0,3521	0,500	0,00050	0,00049	0,00615	0,00614
М2	0,4347	0,6250	-0,0478	3,2467	0,846	0,1570	0,2745	0,0323	0,1295

Отримані результати показали, що із плином часу значення моментів у плиті змінюються. При цьому великі зміни відбуваються лише у перші 50 годин після прикладання навантаження, а через 200 годин вони практично не змінюються, тобто в плиті встановлюється стаціонарний стан.

При проведенні досліджень кількість наближень J по степенях малого параметра λ збільшувалася до того моменту, поки наступне наближення не змінювало значення моментів менше ніж на 0,01%. У розглянутих випадках за такої умови потрібно було залишати від 6 до 10 степенів параметра λ . Далі наведено результати для нескінченної плити з круговим включенням, на яку діють моменти $M_y^\infty = m$,

$M_x^\infty = H_{xy}^\infty = 0$. Усі результати надано з точністю до множника m/D_0 .

На рис. 2 для граничних випадків $\lambda^{(1)}$ ($\lambda^{(1)}=0$ та $\lambda^{(1)}=\infty$) залежно від центрального кута θ , який відраховується від додатного напрямку осі Ox проти годинникової стрілки, зображено графіки розподілу моментів M_s в початковому і стаціонарному станах. Суцільними лініями зображені моменти для початкового стану, а пунктирними – для стаціонарного. Криві 1, 3 відповідають матеріалу М2, а криві 2, 3 – матеріалу М1. Абсолютно м'яке включення ($\lambda^{(1)}=\infty$) зображено лініями 1, 2, в той час як абсолютно жорстке ($\lambda^{(1)}=0$) – лініями 3, 4.

Як бачимо із рис. 2, значення згинальних моментів суттєво змінюються при переході у стаціонарний стан. Найсуттєвіші зміни відбуваються у точках, які відповідають кутам $\theta=0$ і $\theta=\pi/2$, причому найбільша коцентрація моментів

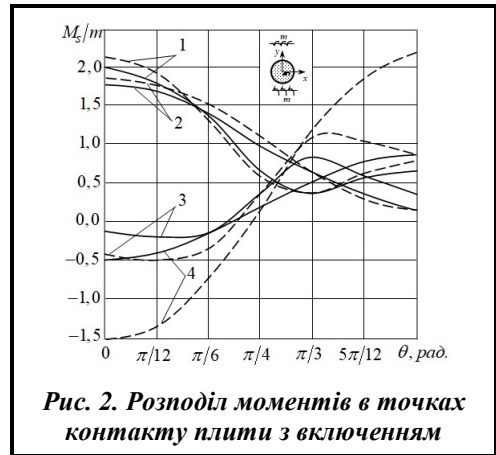


Рис. 2. Розподіл моментів в точках контакту плити з включенням

спостерігається в першому випадку для плити з абсолютно м'яким включенням (отвором). Найпомітніші зміни значень моментів у часі відбуваються для плити з абсолютно жорстким включенням (більш ніж втричі порівняно зі стаціонарним станом), а найменші – у випадку отвору (близько 3,5%).

Крім того, проведено дослідження зміни КІМ залежно від жорсткості матеріалу включення в початковому й стаціонарному станах. Встановлено, що вплив відносної жорсткості на значення моментів для лінійного включення такий самий, як і для кругового. Включення можна вважати абсолютно жорстким при $\lambda^{(1)} < 10^{-3}$ і абсолютно м'яким – при $\lambda^{(1)} > 10^3$. В інших випадках значення КІМ досить малі, а отже, ними можна знехтувати.

Результати, отримані за допомогою методу найменших квадратів, виявилися тотожними результатам за точним розв'язком.

Висновки

За допомогою методу малого параметра і апарату комплексних потенціалів розв'язано задачу згину нескінченної в'язкопружної анізотропної плити з еліптичним пружним включенням. Запропоновано підхід, за якого задача в'язкопружності зводиться до послідовності задач теорії пружності.

Математичне моделювання процесу згину для плит із різних матеріалів дозволило дослідити зміну в часі величин згинальних моментів у точках контакту плити з включенням, а також встановити вплив відносної жорсткості матеріалу включення на в'язкопружний стан плити.

Вивчено вплив відносної жорсткості включення на КІМ із плином часу. Визначені межі, при яких включення можна вважати абсолютно м'яким або абсолютно жорстким.

Література

- Lewandowski R., Litewka P., Łasecka-Plura M., Pawlak Z. M. Dynamics of structures, frames, and plates with viscoelastic dampers or layers: A literature review. *Buildings*. 2023. Vol. 13. Iss. 9. Article 2223. <https://doi.org/10.3390/buildings13092223>.
- Koshkin A. O., Strelnikova O. O. Mathematical modelling of bending of isotropic and anisotropic plates with elliptical and linear inclusions. *Journal of Mechanical Engineering – Problemy Mashynobuduvannia*. 2025. Vol. 28. Iss. 4. P. 56–61. <https://doi.org/10.15407/pmach2025.04.056>.
- Volterra V. Lecons sur les fonctions de lignes. Paris: Qauthier Villaed, 1913. 230 p.
- Rabotnov Yu. N. Creep problems in structural members. Amsterdam / London: North-Holland Publishing Company, 1969. 822 p. <https://doi.org/10.1002/zamm.19710510726>.
- Koshkin A., Strelnikova O. Bending analysis of multiply-connected anisotropic plates with elastic inclusions. *Bulletin of V. N. Karazin Kharkiv National University, Series: Mathematical Modeling. Information Technology. Automated Control Systems*. 2025. Vol. 68. P. 43–52. <https://doi.org/10.26565/2304-6201-2025-68-04>
- Savin G. N. Stress concentration around holes. New York: Pergamon Press, 1961. 430 p. <https://doi.org/10.1017/S0368393100075854>.
- Shaw M. T., MacKnight W. J. Introduction to Polymer Viscoelasticity, 4rd ed. New Jerse: John Wiley&Sons, 2018. 384 p.

Надійшла до редакції 19.02.2026