

## Литература

1. Костюк, А. Г. Прочность цельнокованых роторов турбин мощностью 200, 300 и 800 МВт производства ЛМЗ при длительном статическом нагружении / А. Г. Костюк, А. Д. Трухний // Теплоэнергетика. – 2004. – № 10. – С. 45–52.
2. *Визначення розрахункового ресурсу та оцінка живучості роторів і корпусних деталей турбін: СОУ-Н МЕНВ 40.1-21677681-52:2011.* – К.: М-во енергетики та вугільної пром. України, 2011. – 42 с. – (Нормативний документ Міненерговугілля України. Методичні вказівки).
3. *Турбины паровые стационарные. Расчет на статическую прочность дисков и роторов: ОСТ 108.020.109-82.* – Взамен ОСТ 108.020.109-76. – Л.: НПО ЦКТИ, 1983. – 22 с.
4. *Расчетная оценка длительной прочности дисков ротора паровой турбины / Н. Г. Шульженко, П. П. Гонтаровский, Ю. И. Матюхин, Н. Г. Гармаш // Пробл. прочности.* – 2010. – № 4. – С. 77–86.
5. *Шульженко, Н. Г. Задачи термочности, вибродиагностики и ресурса энергоагрегатов (модели, методы, результаты исследований): монография / Н. Г. Шульженко, П. П. Гонтаровский, Б. Ф. Зайцев.* – Saarbrücken, Germany: LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co.KG, 2011. – 370 с.
6. *Шульженко, Н. Г. Оценка длительной прочности роторов паровых турбин на основе анализа рассеянных повреждений / Н. Г. Шульженко, П. П. Гонтаровский, Ю. И. Матюхин // Пробл. машиностроения.* – 2007. – Т. 10, № 4. – С. 71–81.
7. *Розрахункова оцінка живучості пластин при повзучості з використанням параметрів розсіяного пошкодження. В 2 ч. Ч. 1 / М. Г. Шульженко, П. П. Гонтаровський, Ю. І. Матюхін, С. І. Панасенко // Вісн. Тернопіль. нац. техн. ун-ту. Спец. випуск.* – 2011. – С. 47–54.
8. *Резинских, В. Ф. Увеличение ресурса длительно работающих паровых турбин / В. Ф. Резинских, В. И. Гладштейн, Г. Д. Авруцкий.* – М.: Издательский дом МЭИ, 2007. – 296 с.
9. *Анализ и обобщение служебных характеристик роторной стали 25X1M1ФА (P2MA) в исходном состоянии. Работа № 510-1917 / ПО турбостроения «Ленинградский металлический завод».* – Л.: ПО ЛМЗ, 1986. – 102 с.

Поступила в редакцию 25.05.15

**Ш. Г. Гасанов,**

д-р. техн. наук

Азербайджанский

технический

университет

Азербайджан,

г. Баку,

e-mail: iske@mail.ru

УДК 539.375

## ВОЗДЕЙСТВИЕ МАЛЫХ ВЫТОЧЕК И УТОЛЩЕНИЙ НА РОСТ КОГЕЗИОННОЙ ТРЕЩИНЫ В ПЛАСТИНЕ, РАСТЯГИВАЕМОЙ ДВУМЯ СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ СИЛАМИ

*Розглядається тонка ізотропна пластина постійної товщини повсюди, за винятком деяких областей  $S1$  та  $S2$  поблизу кінців наскрізної прямолінійної тріщини зі зв'язками між берегами на продовженні тріщини. Пластина розтягується двома зосередженими силами. Вважається, що процес руйнування локалізовано в кінцевій зоні, що розглядається як частина тріщини і може порівнюватися з розміром тріщини. Досліджується плоска задача механіки руйнування відносно гальмування когезійної тріщини малими змінами товщини матеріалу на шляху її зростання. Крайова задача відносно рівноваги когезійної тріщини в пластині під впливом зовнішніх розтягувальних сил зводиться до розв'язання нелінійного сингулярного інтегрального рівняння. Із розв'язання цього рівняння знайдено напруження в зв'язках. Розглянуто найбільш поширені на практиці форми виточок та стовщень.*

**Ключові слова:** тріщина зі зв'язками між берегами, гальмування когезійної тріщини, тонка ізотропна пластина, зосереджені сили.

### Введение

В механике хрупкого разрушения проблема «залечивания» существующей в материале трещины получила особое внимание. Проблема торможения трещин имеет научное и важное практическое значение, так как ее решение позволяет продлить срок эксплуатации разнообразных конструкций и изделий практически во всех областях современной техники, а главное избежать катастроф, связанных с внезапным разрушением [1]. Вызывает интерес оценка эффективности использования локальных изменений в толщине вблизи конца трещины на ограничения роста трещин в тонкостен-

ных элементах конструкций. Такие локальные изменения в толщине пластины выполняются технологически как некоторые выточки или, наоборот, наплавления (утолщения) материала. Их задача состоит в задержке или торможении роста сквозной трещины. В связи с этим решение задач механики разрушения для пластин с трещинами, вблизи вершин которых имеются технологические выточки или утолщения, представляют теоретический и практический интерес.

### Постановка задачи

Рассмотрим бесконечную изотропную пластину, ослабленную сквозной прямолинейной трещиной длиной  $2\ell$  в начале координат вдоль оси  $Ox$  при  $y = 0$ ,  $|x| \leq \ell$  (рис. 1). Пластина растягивается в направлении оси ординат двумя сосредоточенными силами  $P$  (на единицу толщины пластины), приложенными в точках  $z = \pm iH$ .

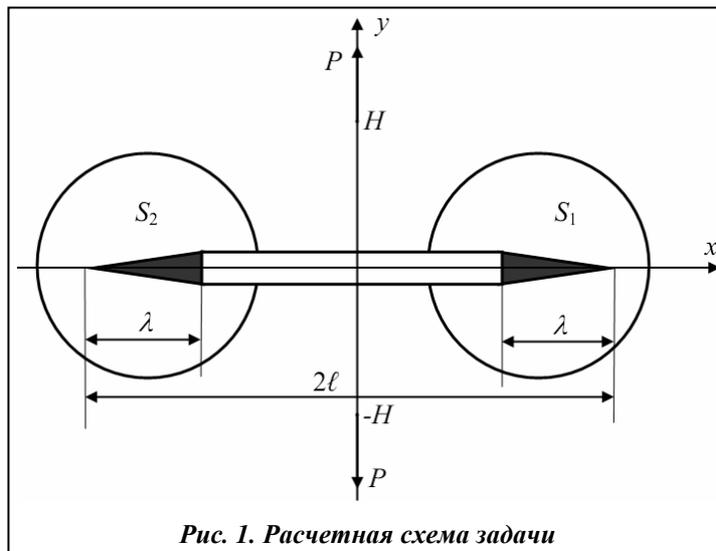


Рис. 1. Расчетная схема задачи

Рассматривается модель трещины, имеющей концевые зоны, в которых действуют силы сцепления материала, непрерывно распределенные в концевой области трещины. Эти зоны приняты примыкающими к вершинам трещины и имеющими размеры, сравнимые с длиной трещины. Эта модель трещины получила [2, 3] экспериментальное подтверждение.

Взаимодействие берегов трещины в концевых зонах моделируется как имеющие заданную диаграмму деформирования связи между ее берегами. Их физическая природа, а также размеры зон, где происходит взаимодействие берегов трещины, зависят от вида материала.

Вне концевых зон берега трещины считаются свободными от внешних нагрузок. Для торможения роста трещины создаются локальные изменения в толщине пластины на пути распространения трещины вблизи ее концов (рис. 1).

Процесс разрушения локализован в концевых областях, которые считаются частью трещины. Принимается, что связи образованы частицами в материале пластины. Зону процесса разрушения можно моделировать как примыкающий к трещине некоторый слой (концевая область), в котором частично нарушены связи между отдельными структурными элементами материала. Вне трещины материал пластины принят упругим. Деформирование материала вне трещины происходит без нарушения его сплошности. Анализ моделей трещины со связями между берегами и обзор современного состояния по решению задач механики разрушения в рамках этих моделей дан в статьях специального выпуска [3].

Рассмотрим тонкую упругую пластину постоянной толщины  $2h_0$  всюду, за исключением некоторых областей  $S = S_1 + S_2$  вблизи концов трещины. В области  $S$  толщина пластины является некоторой функцией координат. Пластина с трещиной находится в обобщенном плоско-напряженном состоянии. Полагается, что толщина пластины  $2h(x, y)$  удовлетворяет условиям  $0 < h_1 \leq h(x, y) \leq h_2$ , ( $h_1$  и  $h_2$  – наименьшее и наибольшее значения толщины пластины в области  $S$  соответственно). Область  $S$  может иметь любые конечные размеры и конфигурации. Декартовы координаты  $x, y$  в срединной плоскости пластины являются плоскостью симметрии.

Функция толщины может быть представлена в виде [4]

$$h(x, y) = h_0 [1 + \varepsilon \bar{h}(x, y)], \quad \varepsilon = (h_2 - h_1)/(h_2 + h_1),$$

где  $\bar{h}(x, y)$  – некоторая известная безразмерная непрерывная функция ( $-1 \leq \bar{h}(x, y) \leq 1$ ). При заданном законе изменения толщины малый параметр  $\varepsilon$  будет постоянным.

Выделим примыкающие к вершинам трещины концевые зоны длиной  $\lambda$ , в которых происходит сдерживающее раскрытие трещины взаимодействие ее берегов. При действии на пластину внеш-

них нагрузок в связях между берегами трещины будут возникать нормальные  $q_y(x)$  и касательные  $q_{xy}(x)$  напряжения. В процессе решения рассматриваемой краевой задачи механики разрушения величины этих напряжений будут определены.

Граничные условия на берегах трещины запишем в виде

$$\text{вне концевых зон трещины } \sigma_y - i\tau_{xy} = 0, \quad (1)$$

$$\text{на берегах концевых зон трещины } \sigma_y - i\tau_{xy} = q_y(x) - iq_{xy}(x).$$

Необходимо найти решение системы уравнений [4] теории обобщенного плоско-напряженного состояния пластин переменной толщины, удовлетворяющих граничным условиям (1).

Основные соотношения рассматриваемой задачи должны быть дополнены уравнением, связывающим раскрытия берегов трещины и напряжения в связях [5]

$$(v^+(x,0) - v^-(x,0)) - i(u^+(x,0) - u^-(x,0)) = C(x, \sigma)[q_y(x) - iq_{xy}(x)].$$

Здесь  $(v^+ - v^-)$ ,  $(u^+ - u^-)$  – нормальная и касательная составляющие раскрытия берегов трещины соответственно; функцию  $C(x, \sigma)$  можно рассматривать как эффективную податливость связей, зависящую от их натяжения;  $\sigma = \sqrt{q_y^2 + q_{xy}^2}$  – модуль вектора усилий в связях.

### Решение краевой задачи

Решение краевой задачи ищем методом возмущений. В полученных выражениях уравнения нулевого приближения совпадают [4] с уравнениями классической плоской задачи теории упругости, уравнения первого и второго приближений – с теми же дифференциальными уравнениями с объемной силой, определяемой из решения предыдущих приближений.

Для нулевого приближения получаем следующую краевую задачу:

$$\text{вне концевых зон трещины } \sigma_y^{(0)} - i\tau_{xy}^{(0)} = 0, \quad (2)$$

$$\text{на берегах концевых зон трещины } \sigma_y^{(0)} - i\tau_{xy}^{(0)} = q_y^{(0)} - iq_{xy}^{(0)}.$$

Уравнения задачи в нулевом приближении следует дополнить соотношением

$$(v_0^+ - v_0^-) - i(u_0^+ - u_0^-) = C(x, \sigma^0)[q_y^{(0)}(x) - iq_{xy}^{(0)}(x)], \quad (3)$$

где  $\sigma^0 = \sqrt{(q_y^{(0)})^2 + (q_{xy}^{(0)})^2}$  – модуль вектора усилий в связях в нулевом приближении.

Напряженно-деформированное состояние в пластине в условиях плоской задачи с разрезом вдоль оси абсцисс описывается [6] двумя аналитическими функциями

$$\sigma_x + \sigma_y = 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(\bar{z})}], \quad (4)$$

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = \Phi(z) + \Omega(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)},$$

$$2\mu \frac{\partial}{\partial x}(u + iv) = \kappa\Phi(z) - \Omega(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}. \quad (5)$$

Здесь  $\mu$  – модуль сдвига материала пластины;  $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ ;  $\nu$  – коэффициент Пуассона материала пластины.

Если в формулах (4) в нулевом приближении перейти к граничным значениям на контуре трещины ( $y \rightarrow \pm 0$ ) и учесть краевые условия (2) нулевого приближения, используя принцип суперпозиции, получим задачу линейного сопряжения граничных значений искомых функций  $\Phi_0(z)$  и  $\Omega_0(z)$  нулевого приближения

$$\begin{aligned} [\Phi_0(t) + \Omega_0(t)]^+ + [\Phi_0(t) + \Omega_0(t)]^- &= 2f_0(t), \\ [\Phi_0(t) - \Omega_0(t)]^+ - [\Phi_0(t) - \Omega_0(t)]^- &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $-\ell \leq t \leq \ell$ ;  $t$  – аффикс точек контура трещины с концевыми зонами;

$$f_0(t) = \begin{cases} f_0^*(t) & \text{на свободных берегах трещины} \\ q_y^{(0)}(t) - iq_{xy}^{(0)}(t) + f_0^*(t) & \text{на берегах концевых зон трещины,} \end{cases}$$

$$f_0^*(t) = \overline{\Phi_0^*(x)} + \overline{\Phi_0^*(x)} + x\overline{\Phi_0^*(x)} + \overline{\Psi_0^*(x)},$$

$$\Phi_0^*(x) = \frac{PH}{\pi(1+\kappa)} \frac{1}{x^2 + H^2} - \frac{P}{2\pi(1+\kappa)} \left\{ \left[ \frac{\kappa-1}{x^2 + H^2} + \frac{4H^2}{x^2 + H^2} \right] \times \right.$$

$$\left. \times \left[ H - x \frac{\sqrt{H^2 + \ell^2}}{\sqrt{x^2 - \ell^2}} \right] - \frac{2x\ell^2}{(x^2 + H^2)\sqrt{(H^2 + \ell^2)(x^2 - \ell^2)}} \right\},$$

$$\Psi_0^*(x) = -x\Phi_0^*(x).$$

Общие решения краевых задач (6) будут иметь вид [6]

$$\Phi_0(z) - \Omega_0(z) = 0,$$

$$\Phi_0(z) + \Omega_0(z) = \frac{1}{i\pi\sqrt{z^2 - \ell^2}} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{\sqrt{t^2 - \ell^2} f_0(t)}{t - z} dt.$$

Здесь под функцией  $1/\sqrt{z^2 - \ell^2}$  подразумевается ветвь, имеющая при больших  $|z|$  вид

$$(z^2 - \ell^2)^{-1/2} = \frac{1}{z} + \frac{\ell^3}{2z^3} + \dots$$

Для комплексных потенциалов  $\Phi_0(z)$  и  $\Omega_0(z)$  нулевого приближения находим

$$\Phi_0(z) = \Omega_0(z) = \frac{1}{2\pi i\sqrt{z^2 - \ell^2}} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{\sqrt{t^2 - \ell^2} f_0(t)}{t - z} dt. \quad (7)$$

Для окончательного определения комплексных потенциалов  $\Phi_0(z)$  и  $\Omega_0(z)$  необходимо найти усилия  $q_y^{(0)}$  и  $q_{xy}^{(0)}$  в связях. В силу симметрии задачи относительно оси  $Ox$  касательные усилия  $q_{xy}^{(0)}$  в нулевом приближении равны нулю.

Используя соотношение (5) и граничные значения функций  $\Phi_0(z)$ ,  $\Omega_0(z)$ , получаем на отрезке  $|x| \leq \ell$  следующее равенство:

$$\Phi_0^+(x) - \Phi_0^-(x) = \frac{2\mu}{1+\kappa} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (u_0^+ - u_0^-) + i \frac{\partial}{\partial x} (v_0^+ - v_0^-) \right]. \quad (8)$$

С учетом соотношения (8), используя формулы Сохоцкого–Племеля [6], находим

$$\Phi_0^+(x) - \Phi_0^-(x) = -\frac{i}{\pi\sqrt{\ell^2 - x^2}} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{\sqrt{\ell^2 - t^2} f_0(t)}{t - x} dt. \quad (9)$$

Подставляя в левую часть уравнения (8) полученное выражение (9), с учетом соотношения (3) после некоторых преобразований имеем интегро-дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции  $q_y^{(0)}(x)$ :

$$-\frac{1}{\pi\sqrt{\ell^2 - x^2}} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{\sqrt{\ell^2 - t^2}}{t - x} (q_y^{(0)}(t) + f_0^*(t)) dt = \frac{2\mu}{1+\kappa} \frac{\partial}{\partial x} [C(x, q_y^{(0)}) q_y^{(0)}(x)], \quad (10)$$

где  $\int_{-\ell}^{\ell} \frac{\sqrt{\ell^2 - t^2}}{t - x} q_y^{(0)}(t) dt = \int_{-\ell}^{\lambda_1^0} \frac{\sqrt{\ell^2 - t^2}}{t - x} q_y^{(0)}(t) dt + \int_{\lambda_2^0}^{\ell} \frac{\sqrt{\ell^2 - t^2}}{t - x} q_y^{(0)}(t) dt$ . В нулевом приближении  $\lambda_1^0 = -\lambda_2^0$  из-за симметрии.

Уравнение (10) является нелинейным сингулярным интегро-дифференциальным уравнением с ядром типа Коши и может быть решено численно. Целесообразно его решать, используя коллокационную схему с аппроксимацией неизвестной функции.

Перейдем к алгебраизации интегрального уравнения. Сначала в интегральном уравнении (9) все интервалы интегрирования приведем к одному отрезку  $[-1, 1]$ . Левая часть интегродифференциального уравнения при такой замене принимает вид

$$-\frac{1}{\pi\sqrt{1-\eta^2}} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}(\tau-\eta)} (q_y^{(0)}(\tau) + f_0^*(\tau)) d\tau.$$

Заменяя производную, входящую в правую часть уравнения (9), для произвольного внутреннего узла конечно-разностной аппроксимацией

$$\frac{d}{dt} [C(x, q_y^{(0)}) q_y^{(0)}] = \frac{C(x_{i+1}, q_y^{(0)}(x_{i+1})) q_y^{(0)}(x_{i+1}) - C(x_{i-1}, q_y^{(0)}(x_{i-1})) q_y^{(0)}(x_{i-1})}{2\Delta x},$$

где  $\Delta x = \frac{2\ell}{M}$ .

При этом учитываются граничные условия при  $\eta_0 = \pm 1$ ,  $q_y^0(-\ell) = q_y^0(\ell) = 0$  (это соответствует условиям  $v^+(-\ell, 0) - v^-(-\ell, 0) = 0$ ,  $v^+(\ell, 0) - v^-(\ell, 0) = 0$ ).

Используя квадратурные формулы типа Гаусса–Чебышева, интегралы в (9) заменяются конечными суммами, а производные в правой части (9) – конечно-разностной аппроксимацией. Это дает возможность [8–10] свести интегродифференциальное уравнение к конечной системе алгебраических уравнений относительно приближенных значений искомой функции  $q_y^0$  в узловых точках. В результате получим

$$\sum_{v=1}^M A_{mv} (q_{y,v}^{(0)} + f_{0,v}^{(0)}) = \frac{1+\kappa}{8\mu\ell} M [C(x_{m+1}, q_y^{(0)}) q_{y,m+1}^{(0)} - C(x_{m-1}, q_y^{(0)}) q_{y,m-1}^{(0)}],$$

$$\sum_{v=1}^M q_{y,v}^{(0)} = 0 \quad (m = 1, 2, \dots, M-1).$$
(11)

Здесь  $q_{y,v}^{(0)} = q_y^{(0)}(\tau_v)$ ;  $f_{0,v}^* = f_0^*(\tau_v)$ ;  $x_{m+1} = \ell\eta_{m+1}$ ;  $A_{mv} = -\frac{1}{M \sin \theta_m} \operatorname{ctg} \frac{\theta_m \mp \theta_v}{2}$ ; верхний знак берется в случае, когда число  $|m - v|$  нечетно, нижний – когда четно.

Если закон деформирования связей нелинейный, для усилий  $q_y^{(0)}(x)$  в связях находятся с помощью итерационной схемы, подобной методу упругих решений [7]. В частном случае линейно-упругих связей система (11) линейная, численно решалась методом Гаусса с выбором главного элемента. После решения алгебраической системы (11) можно определить напряженно-деформированное состояние пластины в нулевом приближении и найти коэффициенты интенсивности напряжений.

В первом приближении граничные условия задачи примут вид

$$\text{вне концевых зон трещины} \quad N_y^* - iN_{xy}^* = 0, \tag{12}$$

$$\text{на берегах концевых зон трещины} \quad N_y^* - iN_{xy}^* = -\bar{h}(x, 0)N_y^{(0)} + q_y^{*(1)} - iq_{xy}^{*(1)}.$$

$$N_y^{(0)} = h_0 q_y^0, \quad q_y^{*(1)} - iq_{xy}^{*(1)} = h_0 (q_y^{(1)} - iq_{xy}^{(1)}).$$

Здесь  $N_x^* = N_x^{(1)} - \bar{h}(x, y)N_x^{(0)}$ ,  $N_y^* = N_y^{(1)} - \bar{h}(x, y)N_y^{(0)}$ ,  $N_{xy}^* = N_{xy}^{(1)} - \bar{h}(x, y)N_{xy}^{(0)}$ .

При действии объемных сил решение представим в виде суммы

$$N_x^* = N_{x_0}^{(1)} + N_{x_1}^{(1)}, \quad N_y^* = N_{y_0}^{(1)} + N_{y_1}^{(1)}, \quad N_{xy}^* = N_{xy_0}^{(1)} + N_{xy_1}^{(1)}.$$

Для усилий  $N_x^*$ ,  $N_y^*$  и  $N_{xy}^*$  в первом приближении имеем [6] общие представления:

$$\frac{N_x^* + N_y^*}{2h_0} = 4 \operatorname{Re} \left[ \Phi_1(z) - \frac{1}{2(1+\kappa)} \frac{\partial F_1}{\partial z} \right],$$

$$\frac{N_y^* - N_x^* + 2iN_{xy}^*}{2h_0} = 2 \left[ \bar{z} \Phi_1'(z) + \Psi_1(z) + \frac{1}{2(1+\kappa)} \frac{\partial}{\partial z} (\kappa \bar{F}_1 - \bar{Q}_1) \right],$$

в которые входят две аналитические функции  $\Phi_1(z)$  и  $\Omega_1(z)$  комплексной переменной  $z = x + iy$  и две функции  $F_1(z, \bar{z})$  и  $Q_1(z, \bar{z})$ , представляющие собой любые частные решения уравнений

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial \bar{z}} = F, \quad \frac{\partial^2 Q_1}{\partial z^2} = \bar{F},$$

$$F = X_1 + iY_1 = \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} (N_x^{(0)} + iN_{xy}^{(0)}) + i \frac{\partial \bar{h}}{\partial y} (N_y^{(0)} - iN_{xy}^{(0)}).$$

Если в формулах (4) в первом приближении перейти к граничным значениям на контуре трещины и учесть краевые условия (12) первого приближения, получим задачу линейного сопряжения граничных значений искомых функций  $\Phi_1(z)$  и  $\Omega_1(z)$  первого приближения

$$\begin{aligned} [\Phi_1(t) + \Omega_1(t)]^+ + [\Phi_1(t) + \Omega_1(t)]^- &= 2f_1(t), \\ [\Phi_1(t) - \Omega_1(t)]^+ - [\Phi_1(t) - \Omega_1(t)]^- &= 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Здесь  $f_1(t) = \begin{cases} f(x) & \text{вне концевых зон трещины} \\ -\bar{h}(x,0)q_y^{(0)} + f(x) + q_y^{(1)} - iq_{xy}^{(1)} & \text{на берегах концевых зон} \end{cases}$

$$f(x) = \frac{1}{1+\kappa} \operatorname{Re} \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{1}{2(1+\kappa)} \left( \kappa \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial z} - \frac{\partial \bar{Q}_1}{\partial z} \right) \quad \text{при } y=0. \tag{14}$$

Функции  $F_1(z, \bar{z})$  и  $Q_1(z, \bar{z})$  можно записать как

$$F_1(z, \bar{z}) = \int_{-\ell}^z dz \int_{-\ell}^{\bar{z}} F(z, \bar{z}) d\bar{z}, \quad Q_1(z, \bar{z}) = \int_{-\ell}^z dz \int_{-\ell}^{\bar{z}} \overline{F(z, \bar{z})} dz. \tag{15}$$

Общее решение краевой задачи (13) будет иметь вид

$$\Phi_1(z) = \Omega_1(z) = \frac{1}{2i\pi\sqrt{z^2 - \ell^2}} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{\sqrt{t^2 - \ell^2}}{t - z} f_1(t) dt + \frac{c_0 z + c_1}{\sqrt{z^2 - \ell^2}}. \tag{16}$$

Разложив функцию (16) в ряд по степеням  $z$  в окрестности точки  $|z| = \infty$  и сопоставив это разложение с выражением

$$\Phi_1(z) = O\left(\frac{1}{z^2}\right),$$

получаем  $c_0 = 0$ .

Постоянная  $c_1$  определяется из условия однозначности смещений [6]

$$\int_{-\ell}^{\ell} [\Phi_1^+(x) - \Phi_1^-(x)] dx = 0.$$

Для окончательного определения комплексных потенциалов  $\Phi_1(z)$ ,  $\Omega_1(z)$  первого приближения необходимо найти усилия  $q_y^{(1)}$  и  $q_{xy}^{(1)}$  в связях.

Основные соотношения задачи в первом приближении необходимо дополнить уравнением

$$(v_1^+ - v_1^-) - i(u_1^+ - u_1^-) = C(x, \sigma^1) (q_y^{(1)}(x) - iq_{xy}^{(1)}(x)), \tag{17}$$

связывающим раскрытия берегов трещины и усилия в связях. Здесь  $C(x, \sigma^1)$  представляет собой эффективную податливость связей в первом приближении, зависящую от их натяжения;

$\sigma^1 = \sqrt{[q_y^{(1)}]^2 + [q_{xy}^{(1)}]^2}$  – модуль вектора усилий в связях в первом приближении.

Используя соотношение (5) и граничные значения функций  $\Phi_1(z)$ ,  $\Omega_1(z)$ , на отрезке  $|x| \leq \ell$ ,  $y = 0$  получаем следующее равенство:

$$\Phi_1^+(x) - \Phi_1^-(x) = \frac{2\mu}{1+\kappa} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (u_1^+ - u_1^-) + i \frac{\partial}{\partial x} (v_1^+ - v_1^-) \right]. \quad (18)$$

Используя формулы Сохоцкого–Племеля [6] и учитывая формулу (16), находим

$$\Phi_1^+(x) - \Phi_1^-(x) = -\frac{i}{\pi\sqrt{\ell^2 - x^2}} \left[ \int_{-\ell}^{\ell} \frac{\sqrt{\ell^2 - t^2} f_1(t)}{t-x} dt + 2c_1 \right]. \quad (19)$$

Подставив в левую часть уравнения (18) выражение (19), с учетом соотношения (17) получаем после некоторых преобразований систему нелинейных интегродифференциальных уравнений относительно неизвестных функций  $q_y^{(1)}(x)$  и  $q_{xy}^{(1)}(x)$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\pi\sqrt{\ell^2 - x^2}} \left[ \int_{-\ell}^{\ell} \frac{\sqrt{\ell^2 - t^2}}{t-x} q_y^{(1)}(t) dt + \int_{-\ell}^{\ell} \frac{\sqrt{\ell^2 - t^2}}{t-x} f_1^0(t) dt \right] &= \frac{2\mu}{1+\kappa} \frac{d}{dx} (C(x, \sigma^1) q_y^{(1)}(x)), \\ -\frac{1}{\pi\sqrt{\ell^2 - x^2}} \left[ \int_{-\ell}^{\ell} \frac{\sqrt{\ell^2 - t^2}}{t-x} q_{xy}^{(1)}(t) dt + \int_{-\ell}^{\ell} \frac{\sqrt{\ell^2 - t^2}}{t-x} f_1^1(t) dt + 2c_1 \right] &= \frac{2\mu}{1+\kappa} \frac{d}{dx} (C(x, \sigma^1) q_{xy}^{(1)}(x)). \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь  $f_1^0(x) = -\bar{h}(x, 0)q_y^{(0)} + \text{Re } f(x)$ ,  $f_1^1(x) = \text{Im } f(x)$ ,

Если толщина пластины в области  $S$  представляет собой симметричную относительно оси абсцисс некоторую функцию координат, касательные усилия  $q_{xy}^{(1)}(x)$  будут равны нулю.

### Методика численного решения и анализ решения

Каждое из уравнений (20) является нелинейным интегро-дифференциальным уравнением с ядром типа Коши и решается только численно. Для их решения поступим аналогично нулевому приближению.

Представим уравнения (20) в виде

$$\begin{aligned} -\frac{1+\kappa}{2\mu} \int_{-\ell}^x Q_1^0(x) dx &= C(x, \sigma^1) q_y^{(1)}(x), \\ -\frac{1+\kappa}{2\mu} \int_{-\ell}^x Q_2(x) dx &= C(x, \sigma^1) q_{xy}^{(1)}(x), \end{aligned} \quad (21)$$

где  $Q_1^0(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{\ell^2 - x^2}} \left[ \int_{-\ell}^{\ell} \frac{\sqrt{\ell^2 - t^2}}{t-x} q_y^{(1)}(t) dt + \int_{-\ell}^{\ell} \frac{\sqrt{\ell^2 - t^2}}{t-x} f_1^0(t) dt \right],$

$$Q_2(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{\ell^2 - x^2}} \left[ \int_{-\ell}^{\ell} \frac{\sqrt{\ell^2 - t^2}}{t-x} q_{xy}^{(1)}(t) dt + \int_{-\ell}^{\ell} \frac{\sqrt{\ell^2 - t^2}}{t-x} f_1^1(t) dt + 2c_1 \right].$$

Разбивая отрезок  $[-\ell, \ell]$  на  $M$  узловых точек  $t_m$  ( $m = 1, 2, \dots, M$ ) и требуя выполнения условий (21) в узловых точках, получим вместо каждого из уравнений (20) алгебраическую систему из  $M_1$  уравнений для определения приближенных значений  $q_y^{(1)}(t_m)$  и  $q_{xy}^{(1)}(t_m)$  ( $m = 1, 2, \dots, M_1$ )

$$\begin{aligned}
 A Q_1^0(t_1) &= C(t_1, \sigma^1(t_1)) q_y^{(1)}(t_1), \\
 A(Q_1^0(t_1) + Q_1^0(t_2)) &= C(t_2, \sigma^1(t_2)) q_y^{(1)}(t_2), \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}
 \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
 A \sum_{m=1}^{M_1} Q_1^0(t_m) &= C(t_{M_1}, \sigma^1(t_{M_1})) q_y^{(1)}(t_{M_1}), \\
 A Q_2(t_1) &= C(t_1, \sigma^1(t_1)) q_{xy}^{(1)}(t_1), \\
 A(Q_2(t_1) + Q_2(t_2)) &= C(t_2, \sigma^1(t_2)) q_{xy}^{(1)}(t_2), \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}
 \tag{23}$$

$$A \sum_{m=1}^{M_1} Q_2(t_m) = C(t_{M_1}, \sigma^1(t_{M_1})) q_{xy}^{(1)}(t_{M_1}).$$

При получении алгебраической системы все интервалы интегрирования были приведены к отрезку  $[-1, 1]$ , а затем заменены конечными суммами с помощью квадратурных формул типа Гаусса–Чебышева.

В частном случае линейно-упругих связей системы (22), (23) оказались линейными и численно решались с помощью метода Гаусса с выбором главного элемента. Для определения напряжений в концевых зонах при нелинейном законе деформирования связей применялся итерационный алгоритм, подобный методу упругих решений [7]. После решения алгебраических систем (22), (23), вычислялись коэффициенты интенсивности напряжений. Коэффициенты интенсивности напряжений  $K_I$  и  $K_{II}$  при наличии связей (сил сцепления) в концевой зоне трещины согласно принципу суперпозиций можно представить в виде

$$K_I - iK_{II} = (K_I^H + K_I^C) - i(K_{II}^H + K_{II}^C).$$

Здесь  $K_I^H, K_{II}^H$  – коэффициенты интенсивности напряжений, вызванные силовой нагрузкой;  $K_I^C, K_{II}^C$  – коэффициенты интенсивности напряжений, вызванные напряжениями, возникающими в концевой зоне трещины.

Для левого конца трещины находим

$$\begin{aligned}
 K_I &= [1 + \varepsilon \bar{h}(-\ell, 0)] (K_I^0 + K_I^{0C}) + \varepsilon K_I^*, & K_{II} &= \varepsilon K_{II}^*, \\
 K_I^0 &= \frac{P\sqrt{\ell}}{(1 + \kappa)\sqrt{\pi(H^2 + \ell^2)}} \left[ 1 + \kappa + \frac{2H^2}{H^2 + \ell^2} \right], \\
 K_I^{0C} &= \frac{1}{\sqrt{\pi\ell}} \int_{-\ell}^{\ell} q_y^{(0)}(x) X(x) dx, & X(x) &= \frac{\sqrt{\ell - x}}{\sqrt{\ell + x}}, \\
 K_I^* &= \frac{1}{\sqrt{\pi\ell}} \int_{-\ell}^{\ell} [f_1^0(x) + q_y^{(1)}(x)] X(x) dx, \\
 K_{II}^* &= \frac{1}{\sqrt{\pi\ell}} \int_{-\ell}^{\ell} (f_1^1(x) + q_{xy}^{(1)}(x)) X(x) dx.
 \end{aligned}$$

Для правого конца трещины аналогично имеем

$$\begin{aligned}
 K_I &= [1 + \varepsilon \bar{h}(\ell, 0)] (K_I^0 + K_I^{0C}) + \varepsilon K_I^*, & K_{II} &= \varepsilon K_{II}^*, \\
 K_I^{0C} &= \frac{1}{\sqrt{\pi\ell}} \int_{-\ell}^{\ell} q_y^{(0)}(x) X_1(x) dx, & X_1(x) &= \frac{\sqrt{\ell + x}}{\sqrt{\ell - x}},
 \end{aligned}$$

$$K_I^* = \frac{1}{\sqrt{\pi\ell}} \int_{-\ell}^{\ell} (f_1^0(x) + q_y^{(1)}(x)) X_1(x) dx,$$

$$K_{II}^* = \frac{1}{\sqrt{\pi\ell}} \int_{-\ell}^{\ell} (f_1^1(x) + q_{xy}^{(1)}(x)) X_1(x) dx.$$

Рассмотрим энергетические характеристики для когезионной трещины. Скорость высвобождения энергии деформации вне зависимости от закона деформирования связей определяется следующим соотношением [11]:

$$G_b = \frac{1-\nu}{2\mu} K_{cb}^2,$$

где  $K_{cb} = \sqrt{K_I^2 + K_{II}^2}$  – модуль коэффициентов интенсивности напряжений при наличии связей в концевой зоне когезионной трещины.

Выражение для скорости потребления энергии деформации связями в концевой зоне трещины имеет вид

$$G_n = \frac{1}{2h_0} \frac{\partial U_n}{\partial \ell}, \quad U_n = 2h_0 \int_{\lambda_k}^{\ell} f(u) dx, \quad (24)$$

$$f(u) = \int_0^{v(x)} q_y(v) dv + \int_0^{u(x)} q_{xy}(u) du.$$

Здесь  $U_n$  – работа по деформированию связей;  $f(u)$  – плотность энергии деформации связей в концевой зоне трещины;  $q_y = q_y^{(0)} + \epsilon q_y^{(1)}$ ;  $q_{xy} = \epsilon q_{xy}^{(1)}$ .

Учитывая, что

$$v^+(\ell) - v^-(\ell) = 0, \quad u^+(\ell) - u^-(\ell) = 0;$$

из соотношения (24) получаем

$$G_n = 2h_0 \int_{\ell-\lambda_k}^{\ell} \frac{\partial}{\partial \ell} (v^+ - v^-) q_y(x) dx + 2h_0 \int_{\ell-\lambda_k}^{\ell} \frac{\partial}{\partial \ell} (u^+ - u^-) q_{xy}(x) dx.$$

Состоянию предельного равновесия соответствует выполнение условия

$$G_b = G_n. \quad (25)$$

Выполнение условия (25) необходимо, но не достаточно для предельно-равновесного состояния трещины с концевой зоной. Следовательно, для определения предельно-равновесного состояния вершины трещины и концевой зоны необходимо дополнительное критическое условие. Таковым можно считать условие критического раскрытия берегов трещины, т.е. разрыв связей на краю концевой зоны ( $x_0 = \lambda_k$ ) произойдет при выполнении условия

$$V(x_0) = \sqrt{v^2(x_0) + u^2(x_0)} = \delta_c, \quad (26)$$

где  $v = v^+ - v^-$ ;  $u = u^+ - u^-$ ;  $\delta_c$  – предельная вытяжка связей.

Совместное решение уравнений (25) и (26) позволяет при заданной длине трещины и характеристиках связей определить для предельно равновесного состояния вершины трещины и края концевой зоны критическую внешнюю нагрузку и размер концевой зоны  $d_k$  ( $k = 1, 2$ ). Найденная из этого решения критическая скорость потребления энергии деформации является энергетической характеристикой сопротивления разрушению:  $G_c = G_n(d_k, \ell)$ .

Используя предельные значения  $\delta_c$  и  $G_c$  для заданных размеров трещины и концевой зоны, можно выделить режимы равновесия и роста трещины в пластине с выточками (область  $S$ ) при монотонном нагружении.

Если  $G_b \geq G_c$ , а  $V(x_0) < \delta_c$ , то происходит одновременное продвижение вершины трещины и увеличение длины концевой зоны без разрыва межчастичных связей. Этот этап развития трещины можно рассматривать как процесс приспособляемости пластины к заданному уровню внешних нагрузок. Если  $G_b \geq G_c$ , но  $V_0(x_0) \geq \delta_c$ , будет происходить рост вершины трещины с одновременным разрывом связей на краю концевой зоны.

При выполнении условий  $G_b < G_c$ ,  $V(x_0) < \delta_c$ , положения вершины трещины и концевой зоны будут неизменными. Если  $G_b < G_c$ , а  $V_0(x_0) \geq \delta_c$  произойдет разрыв связей без продвижения вершины трещины и сокращение размера концевой зоны. Размер концевой зоны при этом будет приближаться к своему критическому для данного уровня нагрузки значению.

Этот анализ показывает, что критические параметры  $\delta_c$ ,  $G_c$  как и величина внешней нагрузки, определяют возможный характер разрушения: 1) рост вершины трещины при продвижении концевой зоны; 2) уменьшение размера концевой зоны при неподвижной вершине трещины; 3) рост вершины трещины одновременно с разрывом связей на краю концевой зоны.

При линейном законе деформирования межчастичных связей максимальные значения усилий в связях всегда имеют место на краю концевой зоны. Подобное правило справедливо и для величин раскрытия трещины, т.е. раскрытие трещины максимально на краю концевой зоны (при линейном и нелинейном законах деформирования). Следует отметить, что раскрытие трещины возрастает с увеличением относительной податливости связей.

В случае нелинейного закона деформирования межчастичных связей для определения напряжений в концевых зонах применялся итерационный алгоритм, подобный методу упругих решений А. А. Ильюшина [7]. Закон деформирования связей (силы сцепления) принимался линейным при  $V \leq V_*$ . Начальный этап итерационного процесса вычислений состоит в решении систем уравнений (22), (23) для линейно-упругих связей. Если на части концевой зоны выполняется неравенство  $V(x) > V_*$ , выполняются последующие итерации. Для этого в каждом приближении решается система уравнений для квазиупругих связей с переменной вдоль концевой зоны трещины эффективной податливостью, зависящей от полученной на предыдущем шаге расчета модуля вектора усилий в связях. Эффективная податливость определялась подобно секущему модулю в методе переменных параметров упругости [12]. Как только усилия вдоль концевой зоны будут достаточно мало отличаться от полученных на предыдущем итерационном шаге, процесс последовательных приближений заканчивается.

Нелинейная часть кривой деформирования межчастичных связей описывалась билинейной зависимостью [13], у которой восходящий участок соответствовал упругому деформированию связей ( $0 < V(x) \leq V_*$ ) с их максимальным натяжением. При  $V(x) > V_*$  закон деформирования связей представляли в виде нелинейной зависимости, определяемой точками  $(V_*, \sigma_*)$  и  $(\delta_c, \sigma_c)$ . При  $\sigma_c \geq \sigma_*$  имеет место возрастающая линейная зависимость (линейное упрочнение, соответствующее упругопластической деформации связей).

Были проведены расчеты зависимости относительного модуля коэффициентов интенсивности напряжений  $K_0 = K_{св}/K^H$  (который можно рассматривать как коэффициент упрочнения) от размера концевой трещины в пластине. Здесь  $K^H = \sqrt{[K_I^H]^2 + [K_{II}^H]^2}$ . Расчеты показывают, что при уменьшении относительной податливости коэффициент упрочнения снижается.

Анализ предельно-равновесного состояния пластины переменной толщины, имеющей трещину со связями в концевых зонах и подвергающейся силовой нагрузке, сводится к параметрическому исследованию решения алгебраических систем уравнений (11), (22), (23) при различных упругих и геометрических характеристиках пластины, законах деформирования связей и размерах концевых зон трещин. Из решения полученных алгебраических систем определяются в каждом приближении нормальные и касательные напряжения в связях и раскрытие трещины. Раскрытие трещины в концевых зонах можно также вычислить по соотношениям (3), (17). Коэффициенты интенсивности напряжений, скорости высвобождения и поглощения энергии определяются по вышеприведенным формулам. Полученные формулы дают возможность рассчитать влияние малого утолщения или выточки любой формы и размеров на рост сквозной когезионной трещины нормального разрыва.

Рассмотрим наиболее распространенные на практике формы выточек.

**Параболоидная выточка**

Пусть выточка имеет форму усеченного параболоида вращения с осью, проходящей через конец сквозной трещины, перпендикулярно плоскости  $Oxy$ . Верхняя поверхность правой и левой половин пластины описываются соответственно уравнениями

$$h = \begin{cases} h_1 + \varepsilon \frac{(x-\ell)^2 + y^2}{R_0} & \text{при } (x-\ell)^2 + y^2 \leq R_0^2 & \text{область } S_1 \\ h_0 & \text{при } (x-\ell)^2 + y^2 > R_0^2, \end{cases}$$

$$h = \begin{cases} h_1 + \varepsilon \frac{(x+\ell)^2 + y^2}{R_0} & \text{при } (x+\ell)^2 + y^2 \leq R_0^2 & \text{область } S_2 \\ h_0 & \text{при } (x+\ell)^2 + y^2 > R_0^2, \end{cases}$$

где  $\varepsilon = (h_0 - h_1)/R_0$  – малый параметр ( $\varepsilon \ll 1$ ).

Очевидно, что при  $h_1 > h_0$  имеем пластину с параболоидным утолщением. Используя изложенную выше методику, находим

$$\bar{h} = \begin{cases} -\frac{R_0}{h_0} + \frac{(x-\ell)^2 + y^2}{h_0 R_0} & \text{при } (x-\ell)^2 + y^2 \leq R_0^2 & \text{область } S_1 \\ 0 & \text{при } (x-\ell)^2 + y^2 > R_0^2, \end{cases}$$

$$\bar{h} = \begin{cases} -\frac{R_0}{h_0} + \frac{(x+\ell)^2 + y^2}{h_0 R_0} & \text{при } (x+\ell)^2 + y^2 \leq R_0^2 & \text{область } S_2 \\ 0 & \text{при } (x+\ell)^2 + y^2 > R_0^2, \end{cases}$$

при  $(x-\ell)^2 + y^2 > R_0^2$  и  $(x+\ell)^2 + y^2 > R_0^2$       $\frac{\partial \bar{h}}{\partial x} = 0$ ;      $\frac{\partial \bar{h}}{\partial y} = 0$ ,

при  $(x-\ell)^2 + y^2 \leq R_0^2$  (область  $S_1$ )      $\frac{\partial \bar{h}}{\partial x} = \frac{2(x-\ell)}{R_0 h_0}$ ;      $\frac{\partial \bar{h}}{\partial y} = \frac{2y}{R_0 h_0}$ ,

при  $(x+\ell)^2 + y^2 \leq R_0^2$  (область  $S_2$ )      $\frac{\partial \bar{h}}{\partial x} = \frac{2(x+\ell)}{h_0 R_0}$ ;      $\frac{\partial \bar{h}}{\partial y} = \frac{2y}{h_0 R_0}$ ,

$X_1 + iY_1 = F = 0$      при  $(x-\ell)^2 + y^2 > R_0^2$ ;      $(x+\ell)^2 + y^2 > R_0^2$ ,

$X_1 + iY_1 = F = \frac{2(x-\ell)}{h_0 R_0} (N_x^{(0)} + iN_{xy}^{(0)}) + \frac{2iy}{h_0 R_0} (N_y^{(0)} - iN_{xy}^{(0)})$      (область  $S_1$ ),

$X_1 + iY_1 = F = \frac{2(x+\ell)}{h_0 R_0} (N_x^{(0)} + iN_{xy}^{(0)}) + \frac{2iy}{h_0 R_0} (N_y^{(0)} - iN_{xy}^{(0)})$      (область  $S_2$ ).

Напряжения  $N_x^{(0)}$ ,  $N_y^{(0)}$ ,  $N_{xy}^{(0)}$  находятся с помощью комплексных потенциалов  $\Phi_0(z)$ ,  $\Omega_0(z)$  (7) нулевого приближения.

Запишем объемные силы через переменные  $z$  и  $\bar{z}$ . Интегрируя согласно соотношениям (15), находим функции  $F_1(z, \bar{z})$  и  $Q_1(z, \bar{z})$ . По найденным функциям  $F_1(z, \bar{z})$ ,  $Q_1(z, \bar{z})$  получаем согласно (14) функцию  $f(x)$ . Далее по соотношениям определяем коэффициенты интенсивности напряжений. В рассматриваемом случае  $K_{II} = 0$ .

Анализируя зависимость коэффициента интенсивности напряжений, можно оценить влияние геометрических параметров параболоидной выточки (утолщения) в пластине на значения критических коэффициентов интенсивности напряжений. Полученные результаты позволяют сделать для этого частного случая следующие выводы: а) параболоидная выточка в концах когезионной трещины уменьшает коэффициент интенсивности напряжений; б) если  $h_1/h_0 < (2 + \kappa)/(6 + 5\kappa)$ , коэффициент

интенсивности напряжений  $K_I$  становится отрицательным и рост трещины прекращается, т. е. параболоидная выточка останавливает когезионную трещину; в) параболоидное утолщение в концах сквозной когезионной трещины увеличивает коэффициента интенсивности напряжений. Следовательно, малые параболоидные выточки в концах когезионной трещины могут служить для остановки и торможения сквозных эксплуатационных трещин.

**Конусовидная выточка**

Пусть выточка имеет форму усеченного кругового конуса с осью, проходящей через концы сквозной трещины перпендикулярно плоскости  $Oxy$ . Верхнее основание конуса – круговое радиуса  $R_0$ , нижнее основание – круговое радиуса  $R_1$ . У основания выточки толщина пластины равна  $2h_1$ . Уравнение верхней поверхности правой и левой половины пластины соответственно имеют вид

$$h = \begin{cases} h_1 & \text{при } (x - \ell)^2 + y^2 \leq R_1^2 \quad \text{область } S_1 \\ h_0 + \varepsilon \left[ \sqrt{(x - \ell)^2 + y^2} - R_0 \right] & \text{при } R_1^2 \leq (x - \ell)^2 + y^2 \leq R_0^2 \\ h_0 & \text{при } (x - \ell)^2 + y^2 \geq R_0^2, \end{cases}$$

$$h = \begin{cases} h_1 & \text{при } (x + \ell)^2 + y^2 \leq R_1^2 \quad \text{область } S_2 \\ h_0 + \varepsilon \left[ \sqrt{(x + \ell)^2 + y^2} - R_0 \right] & \text{при } R_1^2 \leq (x + \ell)^2 + y^2 \leq R_0^2 \\ h_0 & \text{при } (x + \ell)^2 + y^2 \geq R_0^2, \end{cases}$$

где малый параметр  $\varepsilon = (h_0 - h_1)/(R_0 - R_1)$ .

При  $h_1 > h_0$  имеем конусовидное утолщение. Используя вышеизложенную методику, находим

$$\bar{h} = \begin{cases} -(R_0 - h_1)/h_0 & \text{при } (x - \ell)^2 + y^2 \leq R_1^2 \quad \text{область } S_1 \\ \frac{1}{h_0} \left[ \sqrt{(x - \ell)^2 + y^2} - R_0 \right] & \text{при } R_1^2 \leq (x - \ell)^2 + y^2 \leq R_0^2 \\ 0 & \text{при } (x - \ell)^2 + y^2 > R_0^2, \end{cases}$$

$$\bar{h} = \begin{cases} -(R_0 - h_1)/h_0 & \text{при } (x + \ell)^2 + y^2 \leq R_1^2 \quad \text{область } S_2 \\ \frac{1}{h_0} \left[ \sqrt{(x + \ell)^2 + y^2} - R_0 \right] & \text{при } R_1^2 \leq (x + \ell)^2 + y^2 \leq R_0^2 \\ 0 & \text{при } (x + \ell)^2 + y^2 > R_0^2, \end{cases}$$

при  $(x - \ell)^2 + y^2 \leq R_1^2$ ;  $(x - \ell)^2 + y^2 > R_0^2$ ,  $(x + \ell)^2 + y^2 \leq R_1^2$ ;  $(x + \ell)^2 + y^2 > R_0^2$

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \bar{h}}{\partial y} = 0,$$

при  $R_1^2 \leq (x - \ell)^2 + y^2 \leq R_0^2$  (область  $S_1$ )

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial x} = \frac{(x - \ell)}{h_0 \sqrt{(x - \ell)^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial \bar{h}}{\partial y} = \frac{y}{h_0 \sqrt{(x - \ell)^2 + y^2}},$$

при  $R_1^2 \leq (x + \ell)^2 + y^2 \leq R_0^2$  (область  $S_2$ )

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial x} = \frac{(x + \ell)}{h_0 \sqrt{(x + \ell)^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial \bar{h}}{\partial y} = \frac{y}{h_0 \sqrt{(x + \ell)^2 + y^2}}.$$

Подставляя последние формулы в выражение для объемной силы, имеем:

$$X_1 + iY_1 = F = 0 \quad \text{при } (x - \ell)^2 + y^2 \leq R_1^2; (x - \ell)^2 + y^2 > R_0^2,$$

$$X_1 + iY_1 = F = 0 \text{ при } (x + \ell)^2 + y^2 \leq R_1^2; (x + \ell)^2 + y^2 > R_0^2,$$

$$F = \frac{(x - \ell)}{h_0 \sqrt{(x - \ell)^2 + y^2}} (N_x^{(0)} + iN_{xy}^{(0)}) + \frac{iy}{h_0 \sqrt{(x - \ell)^2 + y^2}} (N_y^{(0)} - iN_{xy}^{(0)});$$

при  $R_1^2 \leq (x - \ell)^2 + y^2 \leq R_0^2$  (область  $S_1$ )

$$F = \frac{(x + \ell)}{h_0 \sqrt{(x + \ell)^2 + y^2}} (N_x^{(0)} + iN_{xy}^{(0)}) + \frac{iy}{h_0 \sqrt{(x + \ell)^2 + y^2}} (N_y^{(0)} - iN_{xy}^{(0)});$$

при  $R_1^2 \leq (x + \ell)^2 + y^2 \leq R_0^2$  (область  $S_2$ ).

Величины  $(N_x^{(0)} + iN_{xy}^{(0)})$  и  $(N_y^{(0)} - iN_{xy}^{(0)})$  находятся по соотношениям (4), (7).

Определяя с помощью соотношений (4), (7), (14), (15) функцию  $f(x)$ , в результате вычислений получим выражение для коэффициента интенсивности напряжений через геометрические параметры выточки (утолщения), а также приложенную растягивающую нагрузку и физические постоянные материала пластины. Из проведенных расчетов явствует, что  $K_1$  на дне конусовидной выточки вблизи концов трещины от радиусов нижнего и верхнего оснований и угла конуса не зависит, однако зависит от отношения глубины выточки к толщине пластины. Можно сделать следующие выводы: а) конусовидная выточка в концах трещины уменьшает коэффициент интенсивности напряжений пропорционально относительной толщине пластины  $h_1/h_0$ ; б) если относительная толщина пластины на дне выточки меньше  $(3 + \kappa)/(7 + 5\kappa)$ , происходит остановка и закрытие трещины вблизи ее концов (коэффициент интенсивности напряжений становится отрицательным); в) конусовидное утолщение увеличивает коэффициент интенсивности напряжений пропорционально относительно толщины утолщения  $h_1/h_0$ . Таким образом, конусовидная выточка, создавая сжимающие напряжения вблизи концов трещины, способствует ее остановке. Полученный результат имеет весьма важное практическое значение, так как позволяет активно бороться с опасными сквозными трещинами эксплуатационного и технологического происхождения, достигая полного торможения таких сквозных трещин путем высверливания несковязных конусовидных выточек достаточной глубины в вершинах трещин.

### Параболоидная или конусовидная выточка перед когезионной трещиной

Пусть выточки имеют форму усеченного парабоида вращения с осью, проходящей перпендикулярно плоскости  $Oxy$  на расстоянии  $R_0$  от конца сквозной трещины на ее продолжении. Толщина пластины на дне выточки равна  $2h_1$ . Верхнее круговое основание парабоида имеет радиус  $R$ .

Уравнение верхней поверхности правой и левой половины пластины соответственно выглядит так:

$$h = \begin{cases} h_1 + \varepsilon \frac{(x - \ell - R_0)^2 + y^2}{R_0} & \text{при } (x - \ell - R_0)^2 + y^2 \leq R_0^2 \quad \text{область } S_1 \\ h_0 & \text{при } (x - \ell - R_0)^2 + y^2 > R_0^2, \end{cases}$$

$$h = \begin{cases} h_1 + \varepsilon \frac{(x + \ell + R_0)^2 + y^2}{R_0} & \text{при } (x + \ell + R_0)^2 + y^2 \leq R_0^2 \quad \text{область } S_2 \\ h_0 & \text{при } (x + \ell + R_0)^2 + y^2 > R_0^2, \end{cases}$$

где малый параметр  $\varepsilon = (h_0 - h_1)R_0$ .

Для правой и левой соответственно половины пластины функция  $\bar{h}(x, y)$  имеет вид

$$\bar{h} = \begin{cases} -\frac{R_0}{h_0} + \frac{(x - \ell - R_0)^2 + y^2}{h_0 R_0} & \text{при } (x - \ell - R_0)^2 + y^2 \leq R_0^2 \quad \text{область } S_1 \\ 0 & \text{при } (x - \ell - R_0)^2 + y^2 > R_0^2, \end{cases}$$

$$\bar{h} = \begin{cases} -\frac{R_0}{h_0} + \frac{(x + \ell + R_0)^2 + y^2}{h_0 R_0} & \text{при } (x + \ell + R_0)^2 + y^2 \leq R_0^2 \quad \text{область } S_2 \\ 0 & \text{при } (x + \ell + R_0)^2 + y^2 > R_0^2, \end{cases}$$

$$\text{при } (x - \ell - R_0)^2 + y^2 > R_0^2 \quad \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \bar{h}}{\partial y} = 0,$$

$$\text{при } (x - \ell - R_0)^2 + y^2 \leq R_0^2 \quad (\text{область } S_1) \quad \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} = \frac{2(x - \ell - R_0)}{h_0 R_0}, \quad \frac{\partial \bar{h}}{\partial y} = \frac{2y}{h_0 R_0},$$

$$\text{при } (x + \ell + R_0)^2 + y^2 > R_0^2 \quad \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \bar{h}}{\partial y} = 0,$$

$$\text{при } (x + \ell + R_0)^2 + y^2 \leq R_0^2 \quad (\text{область } S_2) \quad \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} = \frac{2(x + \ell + R_0)}{h_0 R_0}; \quad \frac{\partial \bar{h}}{\partial y} = \frac{2y}{h_0 R_0}.$$

$$X_1 + iY_1 = F = 0 \quad \text{при } (x - \ell - R_0)^2 + y^2 > R_0^2 \quad \text{и } (x + \ell + R_0)^2 + y^2 > R_0^2,$$

$$X_1 + iY_1 = \left[ \frac{2(x - \ell)}{h_0 R_0} - \frac{2}{h_0} \right] (N_x^{(0)} + iN_{xy}^{(0)}) + \frac{2iy}{h_0 R_0} (N_y^{(0)} - iN_{xy}^{(0)}) \quad (\text{область } S_1),$$

$$X_1 + iY_1 = \left[ \frac{2(x + \ell)}{h_0 R_0} + \frac{2}{h_0} \right] (N_x^{(0)} + iN_{xy}^{(0)}) + \frac{2iy}{h_0 R_0} (N_y^{(0)} - iN_{xy}^{(0)}) \quad (\text{область } S_2).$$

Величины  $(N_x^{(0)} + iN_{xy}^{(0)})$  и  $(N_y^{(0)} - iN_{xy}^{(0)})$  определяются по формулам (4), (7).

Используя полученные формулы, с помощью вышеизложенной методики определяем коэффициент интенсивности напряжений, выраженный через геометрические параметры параболической выточки перед трещиной.

Проведенные по полученным формулам расчеты показывают, что если параболическая выточка находится перед трещиной, коэффициент интенсивности напряжений уменьшается. Однако при увеличении внешней нагрузки возможен рост трещины, поскольку коэффициент интенсивности не становится отрицательным. В рассматриваемом случае коэффициент интенсивности напряжений также не зависит от размеров выточки (утолщения) в плане, а лишь от относительной глубины выточки. Даже в предельном случае  $h_1 = 0$  (сквозная выточка) коэффициенты интенсивности напряжений положительны. Поэтому в данном случае параболическая выточка хотя и оказывает тормозящий эффект на трещину, предотвратить ее рост не может. Сравнение показывает, что наибольший тормозящий эффект оказывают выточки, соосные с концом сквозной трещины. Следует отметить, что чем дальше выточка от вершины сквозной трещины, тем меньше эффект торможения.

Аналогично рассматривается случай конусовидной выточки (утолщение) перед трещиной. Численный анализ показывает, что влияние конусовидной выточки перед трещиной качественно такое же, что и параболической выточки.

Используя вышеизложенную методику, можно рассмотреть и другие формы выточек (утолщения) и их положения относительно концов трещины.

## Выводы

Рассмотренные примеры демонстрируют новые эффекты торможения и устойчивого развития сквозных когезионных трещин, которые вызваны только переменной толщиной пластины в концах трещины.

## Литература

1. Финкель, В. М. Физические основы торможения разрушения / В. М. Финкель. – М.: Металлургия, 1977. – 360 с.

2. Cox, B. N. Concepts for bridged cracks fracture and fatigue / B. N. Cox, D. B. Marshall // Acta Met. Mater. – 1994. – Vol. 42, № 2. – P. 341–363.
3. The special issue: Cohesive models // Eng. Fract. Mech. – 2003. – Vol. 70, № 14. – P. 1741–1987.
4. Mirsalimov, V. M. Fracture of plates of variable thickness / V. M. Mirsalimov // Materials Sci. – 1996. – Vol. 71, № 32. – P. 296–305.
5. Гаджиев, В. Д. Предельно-равновесное состояние детали типа втулки контактной пары при наличии трещин со связями между берегами / В. Д. Гаджиев, В. М. Мирсалимов // Оптимальное проектирование механических систем. – Баку: Элм, 1999. – С. 50–63.
6. Мухелишвили, Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мухелишвили. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
7. Ильюшин, А. А. Пластичность / А. А. Ильюшин. – М.; Л.: Гостехиздат, 1948. – 376 с.
8. Панасюк, В. В. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дацышин. – Киев. Наук. думка, 1976. – 443 с.
9. Мирсалимов, В. М. Неоднородные упругопластические задачи / В. М. Мирсалимов. – М.: Наука, 1987. – 256 с.
10. Ladopoulos, E. G. Singular integral equations: Linear and non-linear theory and its Applications in Science and Engineering / E. G. Ladopoulos. – Berlin: Springer Verlag, 2000. – 553 p.
11. Черепанов, Г. П. Механика хрупкого разрушения / Г. П. Черепанов. – М.: Наука, 1974. – 640 с.
12. Биргер, И. А. Расчет конструкций с учетом пластичности и ползучести / И. А. Биргер // Изв. АН СССР. Механика. – 1965. – № 2. – С. 113–119.
13. Гольдштейн, Р. В. Моделирование трещиностойкости композиционных материалов / Р. В. Гольдштейн, М. Н. Перельмутер // Вычисл. механика сплош. сред. – 2009. – Т. 2, № 2. – С. 22–39.

Поступила в редакцию 29.03.15

**В. М. Мирсалимов,**

д-р физ.-мат. наук

**П. Э. Ахундова,**

канд. физ.-мат. наук

Институт математики и  
механики НАН Азербайджана  
Азербайджан, г. Баку,

e-mail:

vagif.mirsalimov@imm.az,  
sopromat\_v@mail.ru

**Ключові слова:** *фрикційна пара, втулка, плунжер, температура, шорстка поверхня тертя, мінімізація коефіцієнтів інтенсивності напружень.*

УДК 539.375

## **МИНИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ РАЗРУШЕНИЯ ВТУЛКИ ФРИКЦИОННОЙ ПАРЫ**

*Розглядається задача механіки руйнування для втулки фрикційної пари в процесі роботи. Вважається, що втулка поблизу поверхні тертя ослаблена однією прямолінійною тріщиною. На основі моделі шорсткої поверхні тертя та мінімаксного критерію проведено теоретичний аналіз із визначення функції переміщень точок зовнішнього контуру втулки фрикційної пари, що забезпечує мінімізацію параметрів руйнування втулки фрикційної пари. Знайдена функція переміщень точок зовнішнього контуру втулки забезпечує підвищення несучої здатності втулки фрикційної пари. Як приклад розглянуто розрахунок для фрикційної пари стосовно свердловинних штангових насосів.*

### **Введение**

Фрикционные пары являются ответственными узлами, определяющими надежность и долговечность эксплуатации различных машин и оборудования. Ресурс работы фрикционной пары в значительной степени определяется долговечностью втулки. На современном этапе развития техники весьма востребовано оптимальное проектирование элементов фрикционной пары. Задачи теории оптимального проектирования состоят в определении таких характеристик проектируемого изделия, чтобы при действии заданных нагрузок оно в определенном смысле было наилучшим из всех изделий рассматриваемого типа.